

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

**ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГОРОДСКОГО ХОЗЯЙСТВА ИМЕНИ А. Н. БЕКЕТОВА**

К. К. Намитоков

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

ПО ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

**(ТОМ I. МЕХАНИКА, МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА,
ТЕРМОДИНАМИКА)**

(для высших технических учебных заведений)

**Харьков
ХНУГХ
2015**

Нами́токов К. К. Конспект лекций по технической физике (том 1. Механика, молекулярная физика, термодинамика) для студентов высших технических учебных заведений / **К. К. Нами́токов**; Харьков. нац. ун-т гор. хоз-ва им. А. Н. Бекетова. – Харьков: ХНУГХ, 2015. – 522 с.

Автор: проф. **К. К. Нами́токов**

Рецензент: проф. В. И. Карась

Рекомендовано ученым советом ХНУГХ имени А. Н. Бекетова,
протокол № 11 от 27 июня 2014 г.

АННОТАЦИЯ

Настоящий трёхтомник «Конспект лекций по технической физике» (1-й том – Механика, молекулярная физика, термодинамика; 2-й том – Электричество и магнетизм; 3-й том – Оптика, атомная физика и светотехника) составлен на основе лекций, которые читались автором в разное время и для различных категорий слушателей – студентов, магистров и аспирантов ВУЗов, а также дипломированных инженеров на курсах и в институтах усовершенствования квалификации. Это, конечно, не могло не отразиться на содержании, структуре и форме изложения, хотя автор при обобщении и переработке первичных материалов лекций стремился учесть и сложившиеся традиции, и современные требования к учебным пособиям для технических ВУЗов, сохранив при этом изначально обозначенные приоритеты – акценты на прикладные аспекты рассматриваемых физических явлений, законов и формул.

Конспект лекций рекомендован студентам, аспирантам и преподавателям технических ВУЗов, как учебное пособие, а также инженерно-техническим работникам, желающим самостоятельно восстановить и повысить свои профессиональные знания по физике.

СОДЕРЖАНИЕ

Общее предисловие к I, II, III томам.....	9
Глава 1. Кинематика.....	13
1.1 Прямолинейное движение материальной точки.....	13
1.2 Криволинейное движение материальной точки.....	19
1.3 Поступательное и вращательное движение твердого тела.....	30
1.4 Примеры кинематических схем машин и механизмов.....	35
1.5 Орбиты небесных тел и искусственных космических объектов...	39
Глава 2. Динамика.....	47
2.1 Законы динамики материальной точки.....	47
2.2 Динамика твердого тела.....	54
2.3 Динамика механических систем.....	60
2.4 Динамика реактивного движения.....	70
2.5 Элементы биомеханики.....	79
Глава 3. Статика.....	87
3.1 Законы равновесия тел.....	87
3.2 Упругие и инерционные силы.....	95
3.3 Статика и кинетостатика механизмов.....	104
3.4 Упругость, пластичность и прочность материалов.....	110
3.5 Элементы сопротивления материалов.....	122
Глава 4. Работа и энергия.....	130
4.1 Кинетическая и потенциальная энергия.....	130
4.2 Закон сохранения механической энергии.....	136
4.3 Консервативные системы.....	140
4.4 Диссипативные системы.....	149
4.5 Столкновения твердых тел. Удар.....	157
4.6 Столкновения молекул в газах.....	169
Глава 5. Законы всемирного тяготения.....	177
5.1 Гравитационное взаимодействие тел.....	177
5.2 Гравитационное поле Земли. Гравиметрия.....	186
5.3 Элементы небесной механики.....	193
5.4 Элементы космонавтики.....	201
5.5 Понятие об общей теории относительности.....	210
Глава 6. Механика жидкостей и газов.....	219
6.1 Законы гидро- и аэростатики. Плавание тел.....	219
6.2 Законы гидро- и аэродинамики.....	227
6.3 Гидравлические машины и механизмы.....	236
6.4 Сверхзвуковое течение.....	240
6.5 Летательные аппараты.....	249
Глава 7. Механические колебания и волны.....	257
7.1 Законы гармонических колебаний.....	257
7.2 Колебательные системы в технике.....	267

7.3 Упругие волны в природе и технике.....	275
7.4 Элементы прикладной акустики.....	282
7.5 Ультразвук	293
Глава 8. Молекулярное строение вещества.....	304
8.1 Законы идеальных газов.....	304
8.2 Межмолекулярные взаимодействия. Реальные газы.....	312
8.3 Газовые смеси.....	318
8.4 Взаимодействие молекул газа с поверхностью твердых тел.....	322
8.5 Элементы вакуумной техники.....	329
8.6 Элементы техники низких температур.....	337
8.7 Свойства жидкостей. Краткие сведения.....	344
8.8 Свойства твердых тел (краткие сведения).....	354
Глава 9. Тепло- и массообмен.....	362
9.1 Теплообмен в природе и технике.....	362
9.2 Конвективный теплообмен.....	369
9.3 Радиационный теплообмен.....	377
9.4 Теплопроводность. Кондуктивный теплообмен.....	385
9.5 Тепло- и массоперенос в материалах.....	398
9.6 Постановка задач теплообмена и выбор методов их решений.....	406
Глава 10. Термодинамика.....	415
10.1 Термодинамика как отрасль науки и техники.....	415
10.2 Основные термодинамические понятия и соотношения.....	416
10.3 Первое начало термодинамики.....	422
10.4 Второе начало термодинамики.....	428
10.5 КПД тепловых машин.....	434
10.6 Двигатели внутреннего сгорания.....	443
10.7 Реактивные двигатели.....	450
10.8 Холодильные машины и тепловые насосы.....	456
10.9 Термодинамика в химии.....	463
10.10 Термодинамика биологических систем.....	472
Приложения	
Приложение А. Некоторые справочные данные по физике.....	480
1. Основные физические постоянные.....	480
2. Единицы и размерности физических величин.....	481
3. Кратные и дольные приставки к системе СИ.....	488
4. Соотношение между частотой и длиной электромагнитной волны (в вакууме).....	488
5. Относительные и логарифмические величины.....	488
6. Плотность ρ различных веществ	489
7. Плотность (ρ), теплопроводность (λ) и удельная теплоемкость (c) некоторых твердых материалов	490
8. Коэффициент температуропроводности $a = \lambda / (\rho c)$ элементов ($\text{м}^2/\text{с} \cdot 10^6$) при различных температурах T (К).....	490

9. Теплопроводность некоторых веществ (в 10^{-4} кал·см ⁻¹ ·сек ⁻¹ ·°C ⁻¹) ...	495
10. Термические постоянные химических элементов	496
11. Температура плавления $T_{пл}$ и удельная теплота плавления λ при $P = 101,325$ кПа для некоторых веществ	498
12. Удельные теплоемкости c_p и c_v некоторых газов при $T = 20^\circ\text{C}$, $P = 101,325$ кПа	498
13. Удельная теплоемкость c_p некоторых веществ в твердом и жидком состояниях.....	499
14. Физические свойства некоторых газов и паров	500
15. Физические свойства сухого воздуха при 10^5 Па в интервале от -50 до 1200°C	501
16. Динамическая вязкость η некоторых жидкостей и газов при $T = 20^\circ\text{C}$, $P = 101,3$ кПа	502
17. Коэффициент взаимной диффузии некоторых газовых смесей.....	502
18. Критические постоянные газов.....	502
19. Температура кипения $T_{кип}$ и удельная теплота испарения r при $P = 101,3$ кПа для некоторых веществ	503
20. Поверхностное натяжение некоторых жидкостей σ , дн/см (эрг/см ²), при различных температурах.....	503
21. Вязкость жидкостей в 10^{-5} пуаз	504
22. Вязкость газов в 10^{-5} пуаз	504
23. Давление и плотность насыщенного водяного пара при различной температуре.....	505
24. Давление насыщенного пара воды, льда и переохлажденной воды.	506
25. Давление насыщенного пара ртути.....	506
26. Степень диссоциации некоторых молекулярных газов.....	507
27. Характеристики различных степеней вакуума.....	508
28. Модуль Юнга E , коэффициент Пуассона μ , модуль сдвига G для некоторых веществ.....	509
29. Коэффициент трения покоя (μ_p) и трения скольжения ($\mu_{ск}$).....	509
30. Равномерно темперированная шкала (частоты).....	510
31. Скорость звука в веществе (м/сек).....	510

Приложение Б. Некоторые примеры постановки и решения тепловых задач

Задача 1.....	511
Задача 2.....	512
Задача 3.....	513
Задача 4.....	514
Задача 5.....	515
Задача 6.....	517

Уважаемые коллеги!

Харьковский национальный университет городского хозяйства имени А. Н. Бекетова имеет давнюю и богатую историю, являющейся частью отечественного городского хозяйства и которая тесно переплелась с историей нашей страны. В стенах университета в разные года работали известные ученые и талантливые педагоги, имена которых украшают страницы отечественной истории науки и техники. Усилиями многих поколений коллектива, университет сегодня занимает достойное место среди высших учебных заведений Украины.

Вашему вниманию представлены лекции выдающегося отечественного ученого, Заслуженного деятеля науки и техники, почетного профессора университета **Намитокова Кемалья Кадыровича**, стоявшего у источников научной школы по электроаппаратостроению, светотехнике и источников света и становления факультета «Электроснабжения и освещения городов».

Доктор технических наук К. К. Намитоков – известный и уважаемый среди широкой общественности академических и научных учреждений как Украины, так и далеко за ее пределами человек, все свои знания, свой незаурядный талант ученого, педагога, руководителя бескорыстно отдающего великому делу дальнейшего развития науки и техники, подготовке кадров высшей квалификации и воспитанию молодежи.

Организаторский талант и прогрессивные идеи Кемалья Кадыровича ярко проявились на должности заведующего кафедрой светотехники и источников света Харьковского национального университета городского хозяйства имени А. Н. Бекетова (раньше ХИИКС), которую он возглавлял почти 25 лет. Под его руководством кафедра значительно улучшила свой качественный состав, получила дальнейшее развитие специальность, появились новые научные школы и направления, связанные с усовершенствованием высокоинтенсивных источников света для лазеров, разработкой систем автоматического контроля и управлением режимами работы осветительных установок пускорегулирующих аппаратов и т. п.

За выдающиеся достижения в профессиональной и общественной деятельности, многолетний и добросовестный труд Намитоков Кемаль Кадырович награжден многими орденами и медалями, дипломами и отличиями.

Лекции профессора К. К. Намитокова будут интересны и полезны как специалистам в области электроаппаратостроения, светотехники и источников света, так и молодым педагогам и студентам, делающим первые шаги в освоении своей профессии.

Ректор Бабаев В.Н.



Намитоков Кемаль Кадырович

Основатель школы научно-педагогических кадров светотехники в Украине,

доктор технических наук, профессор,

заведующий кафедрой светотехники и источников света (с 1979 по 2002 гг.),

заслуженный деятель науки и техники Украины,

Отличник образования Украины,

академик Инженерной академии Украины,

действительный член Академии строительства Украины,

член Национального комитета по освещению,

Почетный член Адыгейской (Черкесской) Международной академии наук (АМАН),

действительный член Ассоциации инженеров-электриков СНГ,

Стипендиат Президента Украины,

заслуженный профессор ХНУГХ имени А. Н. Бекетова

Общее предисловие к I, II, III томам «Лекции по технической физике»

Научно-технический прогресс на современном этапе является основной движущей силой развития экономики и производства. Достижения науки, реализуемые в технике и вообще в народном хозяйстве, стали в наше время непосредственной производительной силой для создания материально-технической базы развития общества.

В осуществлении этой задачи громадная роль принадлежит физике, которая в настоящее время представляет собой большой комплекс фундаментальных и прикладных научных дисциплин, ставших по существу самостоятельными отраслями науки и техники. Проникая в глубинные тайны строения материи и раскрывая сущность явлений, физика постоянно подпитывает технику новыми идеями, воплощаемыми в разработках разнообразных машин и аппаратов, энергетических установок, высокоточных приборов, новых технологических процессов. В свою очередь техника вооружает физику все более совершенными и более мощными экспериментальными средствами изучения явлений и законов природы. В этой взаимосвязи – постоянно действующий источник развития как самой фундаментальной и прикладной физики, так и общего технического прогресса, который в последние десятилетия приобрел характер научно-технической революции во всем мире.

Ведущая роль физической науки в этом процессе очевидна. Она отчетливо проявляется везде, практически во всех технических отраслях. Наиболее ярко это демонстрируется в таких новых направлениях, как например, атомная энергетика, электроэнергетика, информатика и кибернетика, космическая техника и лазерные технологии и др. Уже созданы новые типы реакторов, в которых осуществляется принцип воспроизводства ядерного горючего, созданы прообразы будущих термоядерных реакторов; мощность тепловых агрегатов (паровых турбин) намного превзошла 1 млн. кВт; совершенствуются методы передачи (транспортировки) электроэнергии; открываются новые энергетические ресурсы; число и мощность атомных электростанций непрерывно возрастают.

Комплексная автоматизация и механизация всех видов производства, создание робототехнических и автоматизированных систем управления стало в настоящее время неременным условием технического перевооружения практически любого вида производства. Прогресс в этой области базируется, прежде всего, на новейших достижениях физической электроники, которые стимулируют развитие современной быстродействующей вычислительной техники и информатики, создание компьютерных технологий и т. д. Дальнейший прогресс лазерной техники открывает исключительные возможности во многих отраслях народного хозяйства – в технике, в сельском хозяйстве, в медицине, связи, в военном деле и т. д.

Еще одним важнейшим направлением использования достижений физической науки в производстве является создание электрофизических, физико-химических, магнитоимпульсных, электрогидравлических и других новых способов и средств технологий обработки материалов, «бесконтактного» формообразования, позволяющие изготовление всевозможных изделий для промышленности независимо от свойств материалов. Применение этих методов позволяет повысить не только эффективность технологических процессов и качество готовых изделий, но и открывает новые возможности реализации конструкторских идей. Внедрение этих методов дает и большой социальный эффект, т. к. существенно улучшает условия труда в производстве.

Неоспорима роль физических исследований в освоении Космоса. В частности, на основе данных, получаемых космическими исследовательскими аппаратами, например межпланетными станциями, формируется новая отрасль науки – космическая физика, достижения которой (несмотря на молодой возраст этой науки) уже позволяют по-новому подойти к целому ряду проблем строения Вселенной в целом и к изучению глубинных свойств материи, что в будущем может обусловить новые революционные подходы в космогонии.

Из выше изложенного видно существование неразделимого единства физической науки и практики на современном этапе. Это предъявляет и новые требования к методам обучения основам физики будущих специалистов – инженеров всех специальностей.

Одним из направлений совершенствования высшего технического образования является достижение студентами достаточно широких знаний по фундаментальным учебным дисциплинам и сближение этих знаний с практикой их применения. Весь процесс обучения должен строиться таким образом, чтобы будущий специалист овладевал теоретическими знаниями в неразрывном единстве с углубленным изучением практических проблем народного хозяйства. В результате обучения в ВУЗе специалист должен всесторонне быть подготовлен к продуманному, рациональному решению своих инженерных задач на научной основе, с полным пониманием физической сущности технических устройств и производственных процессов.

В решении этой педагогической проблемы особую роль играет правильная организация изучения курса физики в технических ВУЗах, поскольку, как отмечалось выше, современная физика, представляющая собой грандиозный комплекс наук, является теоретической основой практически всех технических отраслей производства (машиностроение, приборо- и аппаратостроение, автомобилестроение, самолетостроение, электроэнергетика, теплоэнергетика и др.). Достижения физики широко используются также в биологии, сельском хозяйстве, медицине, военном деле и т. д. Поэтому сказанное выше относится не только к техническим ВУзам. Естественно, что преподавание физики в том или ином ВУЗе всегда

должно носить специализированную направленность. Изложение основ физики должно проводиться с использованием фактического материала из специальных областей техники и народного хозяйства по профилю подготовки специалистов данного ВУЗа. На эти основы должны опираться и преподаватели специальных инженерных дисциплин, что, разумеется, требует знаний этих основ. Однако зачастую существует разрыв между этими двумя требованиями. В результате, даже при удовлетворительном знании студентами основ физики, у них не создаются навыки, умения применять эти знания в последующей своей практической инженерной деятельности. Такое положение в значительной мере объясняется отсутствием соответствующих учебных пособий, которые способствовали бы устранению указанного разрыва в самом «зародыше» – в процессе обучения в ВУЗе.

Существует значительное количество хороших учебников и учебных пособий по курсу общей физики для технических ВУЗов. В них, как правило, уделяется основное внимание изучению теоретических законов физики и методов их экспериментального обоснования. Но при этом недостаточно внимания уделяется выяснению физической сущности явлений, лежащих в основе производственных процессов, физических принципов работы различных машин и механизмов и анализу других специфических вопросов, т. е. выяснению физических основ явлений и процессов уделяется недостаточно внимания, что обуславливает в последующем возникновение разрыва между физической теорией и инженерной практикой.

Идеальным средством преодоления этого недостатка было бы создание комплекса учебников по общей физике с конкретной направленностью на те или иные основные инженерные специальности, то есть для технических ВУЗов определенного профиля (приборостроительного, транспортного, машиностроительного, электротехнического и др.). Создание такого комплекса пока является делом будущего. Поэтому в данном курсе лекций по физике для инженеров автор стремился в какой-то мере заполнить указанный пробел и дать преподавателям и студентам пока «переходное» учебное пособие, в котором на основе общих законов физики более подробно (в сравнении с общими курсами физики) рассматриваются их разнообразные приложения.

Итак, овладение основами физики должно постоянно сопровождаться анализом практической роли и значимости рассматриваемых явлений, объяснением физической сущности тех или иных технологических процессов, принципов действия соответствующего производственного оборудования, приборов и аппаратов, которые изучаются будущими инженерами в специальных курсах. Предлагаемый курс лекций является дополнением к имеющимся учебным пособиям по физике. Цель его издания – помочь преподавателям физики в технических ВУЗах решить задачу органического слияния обучения основам физики с ее инженерными приложениями, а студентам – выработать необходимый научно-технический

кругозор и «физический» подход к изучаемым в специальных курсах инженерным вопросам. Структура и содержание курса соответствуют типовым программам по общей физике для технических ВУЗов. Однако изложение материала ведется в «прикладном» плане, причем большое внимание уделено рассмотрению основных приложений тех или иных физических законов, принципов и формул во всевозможных областях народного хозяйства. При таком построении специалисты практически всех инженерных специальностей могут найти в курсе интересный для себя материал, способствующий углубленному пониманию научных основ специальных инженерных проблем, с которыми они могут встретиться в своей деятельности. Разумеется, при этом автор вовсе не претендует на полноту изложения всех прикладных физических вопросов (для этого потребовался бы курс во много раз большего объема). Поэтому в конце книги указаны рекомендуемые источники, в которых более подробно освещаются вопросы, лишь упомянутые (или вообще не затронутые) в курсе. Помимо этого, в ходе учебного процесса студентам следует использовать также и периодические научные издания, информационную литературу и т. д. по указанию преподавателя.

Современный специалист – это инженер, который должен быть постоянно в курсе новейших научных достижений, знать их приложения в практике вообще и в своей профессиональной области, в частности. Формирование современного специалиста является перманентным процессом, который не заканчивается обучением в ВУЗе. Необходим неустанный повседневный труд по поддержанию общего уровня знаний и совершенствованию своей специальности.

Поэтому предложенный курс может быть полезным не только в процессе подготовки специалистов в ВУЗах, но и в последующем для уже «готовых» инженеров, которые должны постоянно обращаться к истокам технических достижений.

Для удобства пользования материал предлагаемого курса распределен примерно равномерно в 3-х томах по традиционным разделам физики:

- в I-м томе – механика, молекулярная физика и термодинамика;
- во II-м томе – электричество, магнетизм, электроника;
- в III-м томе – оптика, атомная физика, светотехника.

От автора

ГЛАВА 1 КИНЕМАТИКА

1.1 Прямолинейное движение материальной точки

Простейшим материальным объектом, движение которого рассматривается в кинематике, является материальная точка. Она обычно определяется как тело, размеры которого можно не учитывать в условиях данной задачи, т. е. при достаточно больших масштабах пространства и движения тела. Ввиду фундаментальной важности этого понятия необходимо разъяснить его более подробно.

Рассмотрим шар массой M , падающей вертикально вниз без вращения вокруг какой-либо внешней или внутренней оси (рис. 1.1). Выделим траектории движения некоторых геометрических точек тела, например, центра шара O и произвольной точки A . Очевидно, что при таком характере движения тела все траектории его геометрических точек совершенно одинаковы. Такое движение тела называется поступательным и будет рассмотрено подробнее в п. 1.3. Ясно, что при этом движение тела (его кинематические параметры) можно полностью описать движением одной произвольной точки в его объёме или на поверхности, считая, что в ней сосредоточена вся масса тела M . В этом случае понятие материальной точки вводится естественным образом как геометрического объекта сколь угодно малого размера (и, разумеется, произвольной формы), имеющего некоторую материальную массу (что и придаёт ему «физический», материальный характер). Однако такой простейший характер движения материальных тел

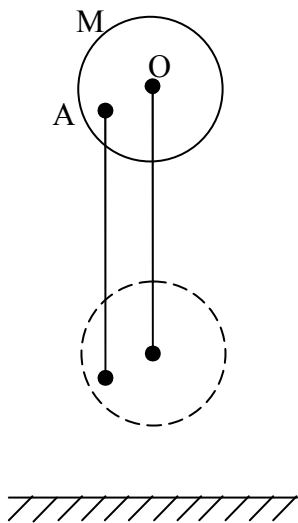


Рис. 1.1

соблюдается в природе и технике отнюдь не всегда. Рассмотрим другой простой пример – качение шара по горизонтальной плоскости – рис. 1.2 а. Опять-таки представим себе траектории движения нескольких произвольных точек тела – рис. 1.2 б. Сразу видно, что в этом случае эти траектории существенно неодинаковы, причем траектория точки O – центра шара – резко выделяется своей простотой по сравнению с траекториями других точек – она является прямолинейной, в то время как другие траектории – криволинейными. Заметим также, что с увеличением расстояния от точки O , отклонение траектории точек $A, B...$ тела от прямолинейности возрастает.

Изобразим теперь движение тела в более мелком масштабе по сравнению с длиной пройденного им пути L – рис. 1.2. Легко видеть, что при такой процедуре форма траектории всех точек будет приближаться к прямолинейной и в пределе стремиться к траектории центра O . Отсюда следует, что при достаточно «мелкомасштабном» движении любого твердого тела траектории его отдельных геометрических точек можно приближенно

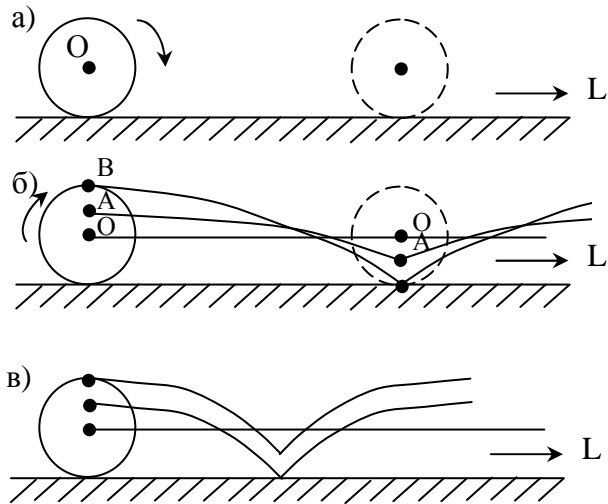


Рис. 1.2

считать одинаковыми и совпадающими с траекторией некоторой точки – «центра инерции» или «центра масс», в которой считается сосредоточенной вся масса тела. Так мы приходим к образцу материальной точки как объекта, размеры и форма которого несущественны при большом масштабе его движения. Теперь становится ясным смысл

этого понятия. Сложное движение реального тела при этом представляется как сумма «поступательного» движения «центра масс» тела, рассматриваемого как материальная точка, и «вращательного» движения остальных точек тела относительно этого центра (материальной точки), как имеет место, например, для движения, представленного на рис. 1.2. Ниже, в п. 1.3 эта идея «разложения» сложного движения на более простые составляющие будет рассмотрена подробно. Однако теперь уже ясно, что материальная точка отличается от «большого» тела тем, что она может совершать лишь «поступательное» (прямолинейное или криволинейное) движение. В этом и состоит фундаментальный смысл введения данного понятия, поскольку при рассмотрении основных законов динамики Ньютона будет установлено (см. п. 2.1), что эти законы справедливы только для материальных точек, а не для тел конечных размеров и сложной геометрической формы. Для рассмотрения кинематики и динамики этих тел приходится мысленно расчленять их на отдельные элементы – материальные точки, более или менее жестко связанные друг с другом и составлять уравнения движения для этих точек. Только затем путем суммирования по всем этим элементам можно установить законы движения этих «больших» тел.

Итак, при введении понятия материальной точки реальное движущееся тело представляется как простейший геометрический объект (геометрическая точка), положение которого изменяется в пространстве с течением времени. Совокупность положений точки в различные моменты времени образует определенное геометрическое место – траекторию движения. Очевидно, что для описания траектории движения в количественной форме необходимо выбрать систему координат и, прежде всего, начало отсчета, связанного с некоторым материальным «телом отсчета».

Поскольку механическое движение и состояние покоя относительны, то описание движения без указания тела отсчета лишено всякого смысла, так

как при изменении тела отсчета характер движения может коренным образом измениться. В качестве начала отсчета может быть выбрана, вообще говоря, любая материальная точка, причем это может быть или тело, размерами и формой которого можно пренебречь по сравнению с пространственными масштабами данной задачи, или же геометрическая точка внутри некоторого «большого» материального тела (например, центр Земли). Однако на практике, разумеется, стремятся выбрать такое тело отсчета, что связанная с ним система отсчета (система координат) является инерциальной. То есть в ней с хорошей точностью выполняются законы динамики Ньютона (п. 2.1). Так, например, при расчете траектории космических объектов (планет, комет, космических кораблей) обычно выбирают гелиоцентрическую систему, в которой начало отсчета совпадает с центром Солнца, а оси координат направлены на выбранные определенным образом удаленные («неподвижные») звезды. При расчете движений в околоземном пространстве может быть выбрана геоцентрическая система, жестко связанная с Землей. Отклонение от инерциальности этой системы в основном обусловлено суточным вращением Земли вокруг своей оси; это движение может быть учтено введением фиктивных «сил инерции» (см. ниже, 2.1). В технике, при описании движения машин и механизмов, ввиду его сравнительно «мелкого» масштаба, можно в качестве системы отсчета использовать любую прямоугольную систему координат с началом в точке, жестко связанной с Землей и считающейся неподвижной. Кроме того, поверхность Земли при этом обычно можно считать плоской, что определяет естественный выбор осей – две оси располагаются в плоскости горизонта, а третья ось направляется по нормали к этой плоскости. Такой выбор системы отсчета оказывается вполне достаточным для решения целого ряда задач технической механики. В специальных областях науки, например, в астрономии, приходится использовать другие, специальным образом выбранные системы отсчета. Так, при рассмотрении движения Солнечной системы в целом во Вселенной в качестве начала отсчета выбирается центр нашей Галактики. (Известно, что Солнечная система совершает полный оборот вокруг этого центра примерно за 280 млн. лет).

Если выбрана система координат с началом отсчета в точке О, рис. 1.3, то закон движения материальной точки А описывается в самом общем виде тремя скалярными зависимостями:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \quad (1.1)$$

Или же одним векторным соотношением:

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \quad (1.2)$$

где \vec{r} – радиус вектор точки А. Знание закона движения в форме (1.1) или (1.2) позволяет дать полное кинематическое описание состояния движения, т. е. определить положение материальной точки в пространстве в любой заданный момент времени, а также вычислить скорость и ускорение материальной точки:

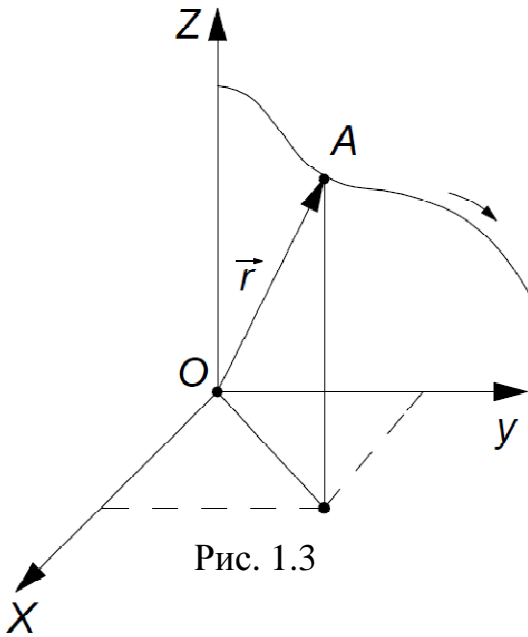


Рис. 1.3

$$\vec{v} = \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}, \quad \vec{a} = \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}. \quad (1.3)$$

При этом положение точки А в пространстве определяется тремя координатами (x, y, z) . В этом случае говорят о пространственном движении материальной точки. Как мы увидим ниже, для твердого тела произвольных размеров и формы ситуация существенно изменяется: его положение в пространстве не описывается полностью заданием трех координат, или, иными словами, «число степеней свободы» большого тела, вообще говоря, больше трех (пункт 1.3).

Пространственное движение материальной точки сравнительно редко реализуется в природе и технике. Значительно чаще встречается так называемое «плоское» движение; закон движения при этом в плоскости (x, y) имеет вид:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = \text{const}. \quad (1.4)$$

Такой характер движения может быть обусловлен наличием связей в системе материальных точек (тел) или же симметрией действия сил (взаимодействие тел). Первый случай осуществляется во многих машинах и механизмах. Например, в кривошипно-шатунном механизме (см. ниже, п. 1.4) все материальные точки, образующие звенья механизма, совершают движение в одной плоскости, поскольку в ней действуют все приложенные силы, а выходу из той плоскости препятствуют силы жесткости (упругости), связывающие звенья механизма. На ровной местности автомобиль совершает плоское (вообще говоря, криволинейное) движение, поскольку его случайному выходу из этой плоскости препятствуют силы тяжести и упругие силы реакции дороги. Во всех этих или подобных случаях систему координат можно выбрать таким образом, что $z=0$, и полностью исключить эту координату из рассмотрения. Примеры плоского движения материальной точки будут рассмотрены ниже, в п. 1.2.

Особую роль в природе и технике играет прямолинейное равномерное движение, закон которого имеет вид:

$$x = x(t), \quad y = \text{const}, \quad z = \text{const}, \quad (1.5)$$

при этом систему координат всегда можно выбрать так, что направление прямолинейного движения материальной точки и одной из осей (x) совпадают, а $y = z = 0$. Фундаментальная роль прямолинейного равномерного движения обусловлена наличием первого закона Ньютона, согласно которому всякое тело, свободное от действия сил, движется прямолинейно и равномерно («по инерции», см. п. 2.1). Таким образом, вдали от «силовых центров», а также находясь под действием взаимно уравновешивающихся

сил, тело (материальная точка) всегда стремится к состоянию прямолинейного (и равномерного) движения. Однако прямолинейное (и неравномерное) движение возможно и в том случае, когда на материальную точку действует множество сил, если на движение точки наложены определенные ограничения (связи). Так, например, ползун в кривошипно-шатунном механизме совершает прямолинейное (возвратно-поступательное) движение из-за наличия направляющей, которая и определяет в данном случае ось x в законе движения (1.5). Как мы увидим ниже (см. п. 2.1), прямолинейное движение возникает и при взаимодействии материальных точек друг с другом, причем осью x в этом случае является линия, соединяющая эти точки.

Законы прямолинейного движения $x = x(t)$ могут быть весьма разнообразными. Простейшим случаем является упомянутое выше равномерное прямолинейное движение («свободной» материальной точки), закон которого имеет вид

$$x(t) = V \cdot t + x_0, \quad V = \text{const}, \quad (1.6)$$

где x_0 – начальная координата материальной точки. Величина V характеризует постоянную скорость движения точки. Величина

$$S(t) = x(t) - x_0 = V \cdot t, \quad x(t=0) = x_0 \quad (1.7)$$

определяет величину пути, пройденного при движении материальной точки за некоторый промежуток времени t . Заметим, что в этом простейшем случае путь S и перемещение материальной точки Δx совпадают; во всех остальных случаях это, вообще говоря, не имеет места.

Еще одним простым примером прямолинейного движения материальной точки является так называемое равнопеременное движение (движение с постоянным ускорением, положительным или отрицательным), закон которого имеет вид:

$$x(t) = x_0 + V_0 t + \frac{at^2}{2}, \quad x(t=0) = x_0, \quad V(t=0) = V_0, \quad (1.8)$$

где a – ускорение материальной точки, причем $a = \text{const}$. Выражение для скорости движения при этом имеет вид:

$$V(t) = \frac{dx}{dt} = V_0 + at, \quad a = \text{const}. \quad (1.9)$$

Если $a > 0$ (равноускоренное движение), то скорость тела линейно возрастает со временем; если же $a < 0$ (равнозамедленное движение), то скорость тела линейно спадает от начального значения V_0 , достигая нулевого значения в момент времени $t_0 = V_0/a$. Перемещение и путь материальной точки в этом случае также совпадают. Если же $a \neq \text{const}$, то эти величины уже могут не совпадать, поскольку пройденный путь всегда является положительной величиной, а изменение координаты может иметь любой знак.

Различные виды прямолинейного движения удобно представлять графическим способом, как показано на рис. 1.4а, б для случаев $a > 0$ и $a < 0$. Такие графики дают наглядное, представление о характере движения и

особенно удобны при рассмотрении движения множества материальных точек (например, графики движения поездов на железнодорожных линиях). Если $a = \text{const}$, то движение является переменным прямолинейным движением. Изменение знака ускорения с течением времени означает, что направление движения материальной точки также изменяется. Специфическим примером такого рода движения является возвратно-поступательное движение, которое, например, для упомянутого выше ползуна кривошипно-шатунного механизма может быть записано в виде уравнения гармонического колебания (см. п. 1.4):

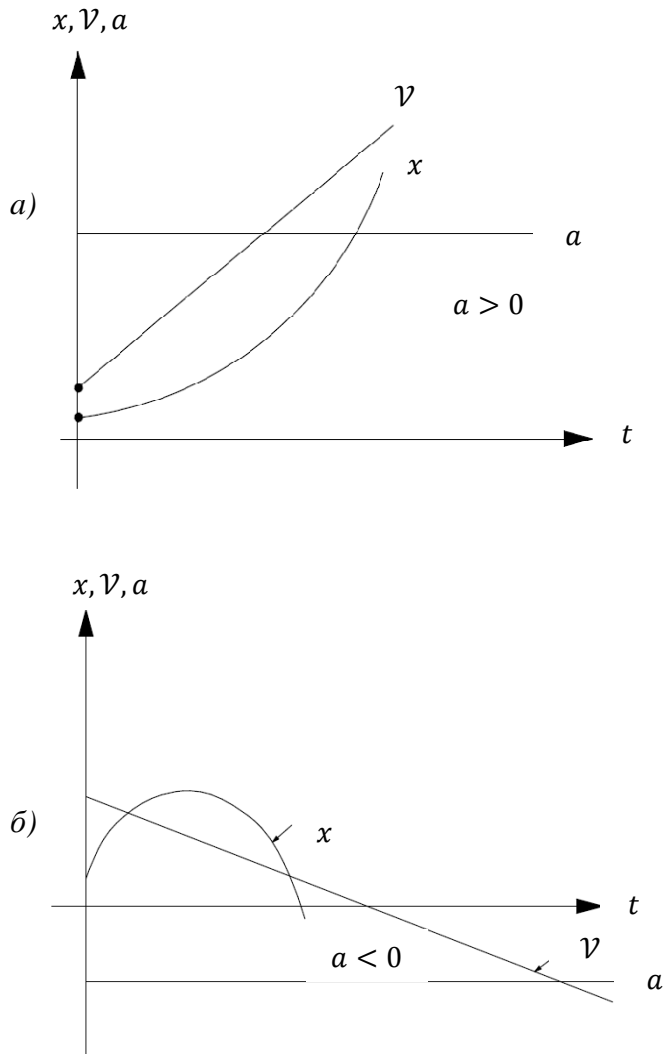


Рис. 1.4

$$x = x_m \sin(\omega t + \varphi), \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad x(t = 0) = x_m \sin \varphi. \quad (1.10)$$

График такого движения имеет вид, показанный на рис. 1.5 ($\varphi < 0$).

Здесь ω – циклическая частота, T – период, x_m – амплитуда, φ – начальная фаза колебания. Динамика колебательного движения будет подробно рассматриваться в главе 7. Однако здесь важно подчеркнуть, что основной особенностью кинематики этого вида прямолинейного движения является

периодичность изменения координаты $x\left(t + 2\pi/\omega\right) = x(t)$ и,

следовательно, также и скорости и ускорения согласно выражениям:

$$\begin{aligned} v &= \dot{x} = \omega x_m \cos(\omega t + \varphi) = v_m \cos(\omega t + \varphi), \\ a &= -v_m \omega \sin(\omega t + \varphi) = a_m \sin(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Ускорение и координаты изменяются в противоположных фазах, так что переходы через точки $a=0$ соответствуют переходам колеблющейся материальной точки через начало координат, а при $a=\pm a_m$ происходит смена направления движения точки.

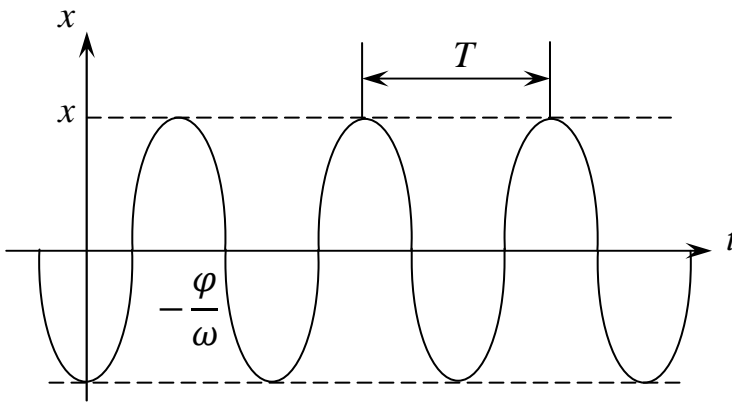


Рис. 1.5

Встречаются также движения с более сложной кинематикой, примеры которых будут рассмотрены ниже.

Из рассмотрения примера, представленного на рис. 1.1, следует чрезвычайно важное обстоятельство, уже упоминавшееся выше: при поступательном движении

тела, которое нельзя считать материальной точкой, характер его движения может быть описан кинематикой любой произвольно выбранной точки этого тела. Таким образом, все изложенное выше относительно кинематики материальной точки полностью применимо и к любому телу, движущемуся поступательно. Ввиду этого на практике при описании кинематики машин и механизмов зачастую можно не делать различия между звеном (телом сложной формы) и материальной точкой (это часто молчаливо предполагается, исходя из поступательного характера движения). Так, уравнение движения (1.10) мы отнесли в качестве примера к ползуну кривошипно-шатунного механизма, который никак нельзя считать «материальной точкой», однако это уравнение все же приложимо к нему ввиду поступательного характера его движения. Примеров такого рода множество.

1.2 Криволинейное движение материальной точки

Как указывалось выше, в случае непрямолинейного движения материальной точки ее положение в выбранной системе отсчета определяется двумя или тремя координатами. В этих случаях вектор скорости движения точки непрерывно изменяет свою ориентацию в плоскости или пространстве (при этом он может, разумеется, изменяться и по величине). Совокупность положений, занимаемых материальной точкой в последовательные моменты времени, образует траекторию движения. В

случае плоского движения траектория представляет собой кривую линию, описываемую уравнением общего вида:

$$f(x,y)=0. \quad (1.12)$$

Это уравнение в принципе может быть получено путем исключения времени t из уравнений движения

$$x = x(t), \quad y = y(t). \quad (1.13)$$

В природе и в технике встречаются движения с весьма разнообразными формами траектории. В частности, многие небесные и другие тела, детали механизмов совершают замкнутые траектории, периодически возвращаясь в одни и те же точки пространства. Такое движение носит периодический характер. Однако весьма распространены и непериодические движения, например, движения комет по параболическим траекториям, движения транспортных средств и т.п., при которых траектория движения является незамкнутой. Степень кривизны траектории также может быть весьма различной. Заметим, что траектория, которая является криволинейной в «большом», т.е. на всем ее протяжении, может считаться прямолинейной «в малом», т.е. на сравнительно небольших ее участках.

Рассмотрим некоторые криволинейные траектории, представляющие наибольший практический интерес. Простейшим криволинейным движением, чрезвычайно распространенным в природе и технике, является

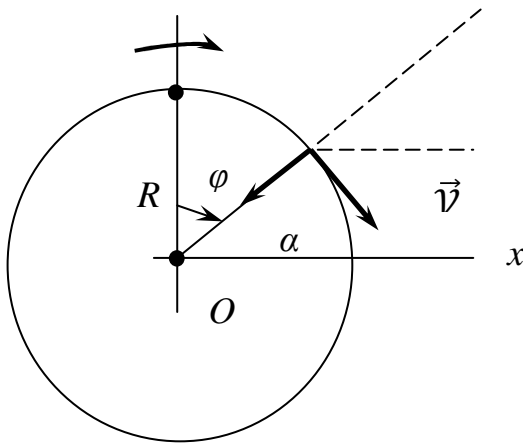


Рис. 1.6

равномерное движение материальной точки по окружности радиуса R с некоторой линейной скоростью V . Например, такое движение совершают элементы множества машин и механизмов (см. п.1.4). Близким к нему является движение планет вокруг Солнца (см. п.1.5), и т. д. При этом вектор скорости периодически изменяется по направлению и остается неизменным по величине. Это изменение можно описывать количественно, определяя, например, проекцию вектора скорости на ось X . Из

рис. 1.6 видно, что

$$V_x = V \cos \varphi = V \cos \omega t = V \cos \frac{2\pi t}{T} = V \cos \frac{V}{R} t. \quad (1.14)$$

Поскольку вектор скорости \vec{V} изменяется со временем (по направлению), то имеется и вектор ускорения $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$. При равномерном движении по окружности вектор \vec{a} направлен к центру вращения, а его величина равна $a = \frac{V^2}{R}$.

При неравномерном движении по окружности вектор скорости материальной точки изменяется как по направлению, так и по величине. Вектор ускорения в этом случае может быть разложен на две составляющие – нормальное (или центростремительное) ускорение \vec{a}_n , направленное к центру вращения, причем $a_n = \frac{v^2}{R}$, и тангенциальное (или касательное) ускорение \vec{a}_t , направленное по касательной к траектории, причем $a_t = \frac{dv}{dt}$.

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t = \frac{v^2}{R} \vec{e}_n + \frac{dv}{dt} \vec{c}, \quad (1.15)$$

где \vec{e}_n и \vec{c} – единичные векторы с указанными выше направлениями.

Рассмотрим теперь примеры сложного движения материальной точки (по-прежнему ограничиваемся случаем плоского движения) и принципы математического описания траектории. Выше, в п. 1.1, мы уже рассматривали траекторию движения точки на окружности катящегося по плоскости круглого тела рис. 1.1. Соответствующая кривая называется циклоидой.

Выведем уравнения движения точки М в системе координат (x,y) – рис. 1.7. Начальное положение рассматриваемой материальной точки совпадает с началом координат 0. За некоторое время τ тело поворачивается (при качении без скольжения) на угол $\theta = \omega\tau$, где ω – угловая скорость вращения ($\omega = \frac{2\pi}{T}$ – период вращения). Заметим, что за один оборот тело

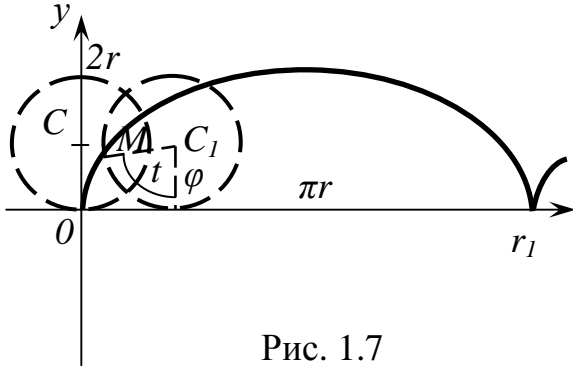


Рис. 1.7

перемещается на расстояние $OO' = 2\pi R$, т. е. его центр тяжести движется прямолинейно со скоростью $V = \frac{2\pi R}{T}$, откуда $\omega = \frac{V}{R}$, так что угол поворота $\theta = \frac{V}{R} \tau$. При отсутствии скольжения отрезок ON равен дуге MN (рис. 1.7), которая, в свою очередь, равна $R\theta$. Теперь можно выразить координаты М через угол θ следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= OQ = ON - QN = R\theta - R\sin\theta = R(\theta - \sin\theta) = R\left(\frac{V}{R}\tau - \sin\frac{V}{R}\tau\right), \\ y &= QM = NC - R\theta = R - R\cos\theta = R(1 - \cos\theta) = R\left(1 - \cos\frac{V}{R}\tau\right). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Полученные зависимости $x(\tau)$, $y(\tau)$ характеризуют закон движения материальной точки М. В данном случае, зависимости $x(\theta)$, $y(\theta)$ описывают траекторию движения точки в параметрической форме, причем роль параметра играет величина θ , прямо пропорциональная времени движения τ . Параметр θ можно брать в интервале $(0, 2\pi)$, поскольку ветвь циклоиды от 0 до O' (базис циклоиды) будет затем периодически повторяться.

Исключив величину θ из двух уравнений (1.16), можно получить траекторию точки М в координатах (x,y):

$$x + \sqrt{y(2R - y)} = R \arccos \frac{R-y}{R}. \quad (1.17)$$

Но при математических расчетах (например, при определении длины нормали к циклоиде, длины ветви ($=8R$) и т.п.) значительно удобнее пользоваться параметрическим представлением циклоиды (1.16).

Если точка М, описывающая циклоиду, находится не на окружности тела, а внутри или вне его (последний случай имеет место, например, для точек реборды колеса железнодорожного вагона, катящегося по рельсам), то при качении она будет описывать, соответственно, укороченную (рис. 1.8 а) или удлиненную (рис. 1.8 б) циклоиду (иногда обе эти кривые называют

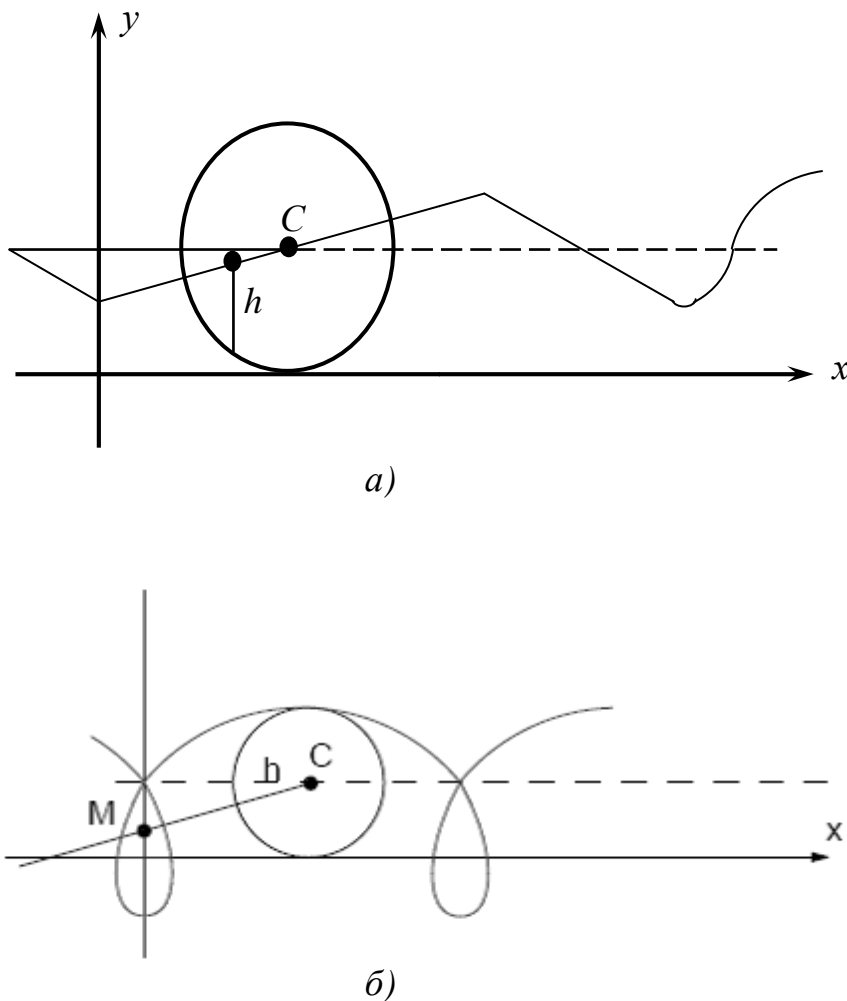


Рис. 1.8

трохоидами). Если обозначить через h расстояние от центра круга C до точки M , то уравнение циклоиды принимает вид:

$$\begin{aligned} x &= Rt - h \sin \theta, & y &= \\ &= R - h \cos \theta, \end{aligned} \quad (1.18)$$

причем в первом случае $h < R$, а во втором случае $h > R$.

Может оказаться, что круг, на окружности которого лежит рассматриваемая точка M , катится не по прямой линии, а по другой окружности (рис. 1.9). Обозначим радиусы катящейся и неподвижной окружностей через r и R соответственно, и рассмотрим поворот линии, соединяющей центры этих окружностей, на угол θ

от начального положения (0°), причем подвижная окружность повернулась на угол $\varphi = LNCM$. Если качение происходит без скольжения, то дуги NM и NK одинаковы, и тогда $R\theta = r\varphi$, $\varphi = \frac{R\theta}{r}$. После некоторых вычислений из чертежа находим координаты (x, y) точки M .

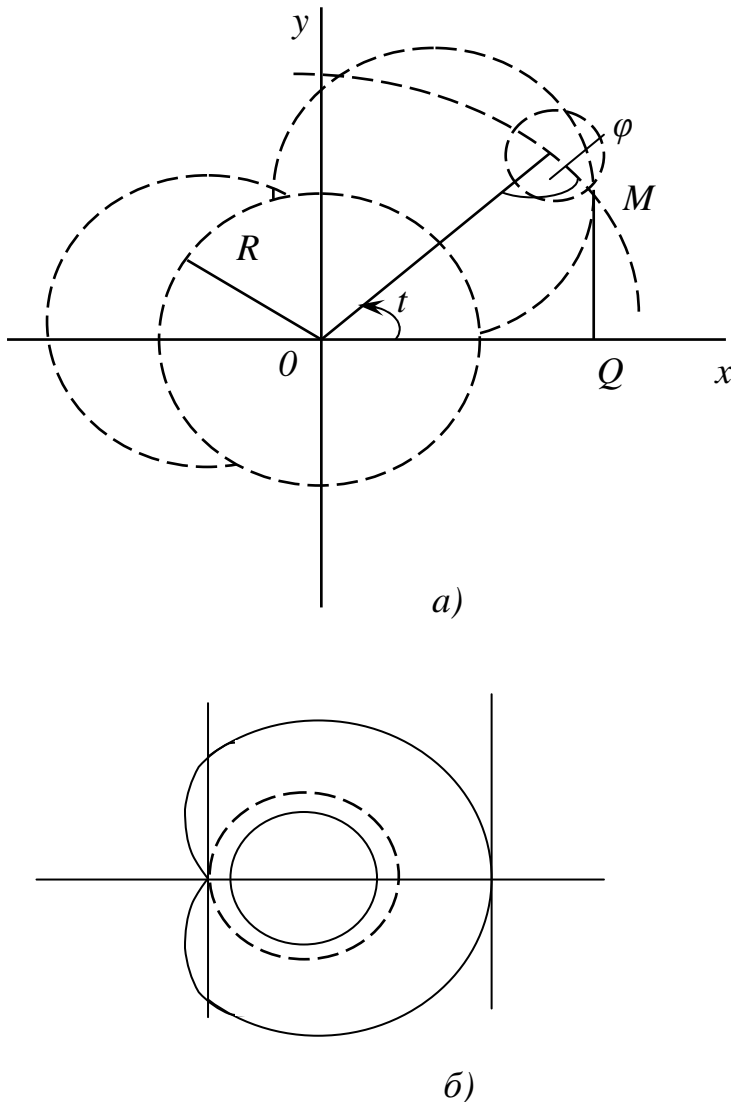


Рис. 1.9

$$x = OQ = (r + R)\cos\theta - r\cos\frac{R+r}{r}\theta,$$

$$y = QM = (r + R)\sin\theta - r\sin\frac{R+r}{r}\theta.$$

(1.19)

Это и есть уравнения данной кривой называемой эпициклоидой, в параметрической форме. Вид кривой зависит от отношения $\frac{R}{r} = m$. При $m=1$ уравнения (1.19) принимают вид ($2R = 2r = a$):

$$\begin{aligned} x &= a\cos\theta - \frac{1}{2}a\cos 2\theta, \\ y &= a\sin\theta - \frac{1}{2}a\sin 2\theta. \end{aligned}$$

(1.20)

Эта кривая называется кардиой и показана на рис. 1.9 б. При целом $m \neq 1$ кривая является замкнутой и состоит из m ветвей, каждая из которых соответствует полному обороту подвижного круга (т. е. увеличение угла φ на 2π). Концы этих дуг («точки возврата») соответствуют условию: $\theta=0, \frac{2\pi}{m}, \frac{4\pi}{m},$

$$\frac{2\pi(m-1)}{m}.$$

На рис. 1.9 а представлен случай $m=3, \theta=0, \theta_2 = \frac{2\pi}{3}, \theta_3 = \frac{4\pi}{3}$.

При дробном m кривая также является замкнутой, но ее ветви перекрещиваются, и точка М возвращается в исходную точку К лишь после нескольких оборотов вокруг точки О. Если же m иррациональна (например, $m = \sqrt{2}$), т. е. R и r неизмеримы друг с другом, то эпициклоида является разомкнутой (точка М не возвращается в исходное положение К). Длина одной кривой равна $\frac{8(r+R)}{m}$. При целом m длина всей замкнутой эпициклоиды равна $8(r+R)$.

Если подвижный круг катится внутри неподвижного, то точка М на его окружности описывает гипоциклоиду – рис. 1.10. Ее уравнения получаются из уравнений эпициклоиды (1.19) путем формальной замены r на $-r$. То есть

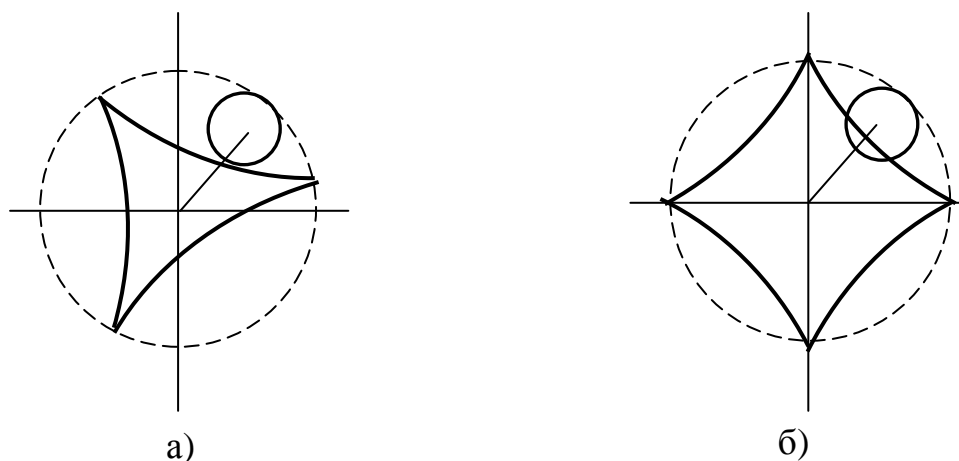


Рис. 1.10

$$\begin{aligned} x &= (R - r)\cos\theta + r\cos\frac{R-r}{r}\theta, \\ y &= (R - r)\sin\theta - r\sin\frac{R-r}{r}\theta. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Число ветвей (и точек возврата) опять-таки определяется величиной m ($m > 1$).

При $m=1$ вновь получается кардиоиды (см. формулу (1.20) и рис. 1.9 б).

При $m=2$ кривая вырождается в диаметр неподвижного круга. Случаи $m=3$ и $m=4$ показаны на рис. 1.10 а и б (соответственно).

В частности, при $m=4$ (эта кривая называется астроидой) уравнения (1.21) принимают вид:

$$x = R\cos^3\theta, \quad y = R\sin^3\theta. \quad (1.22)$$

Отсюда уравнение кривой в декартовых координатах имеет вид:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3}. \quad (1.23)$$

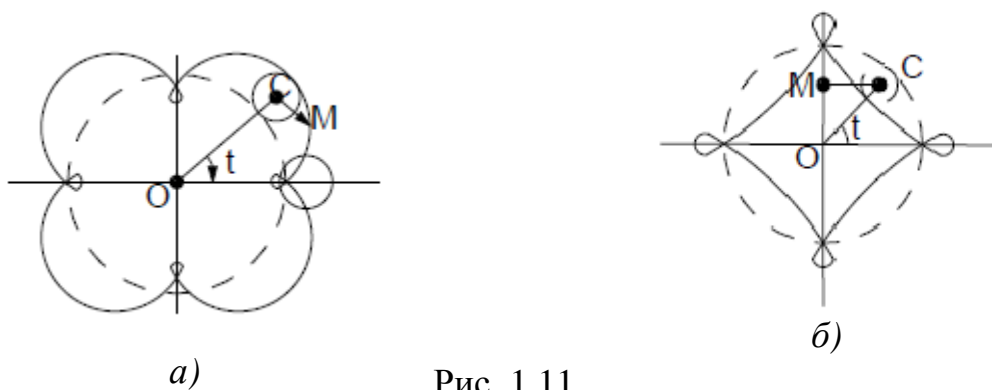


Рис. 1.11

Если рассматриваемая точка лежит вне подвижной окружности, то получаем удлиненную эпициклоиду или гипоциклоиду (эпи – или

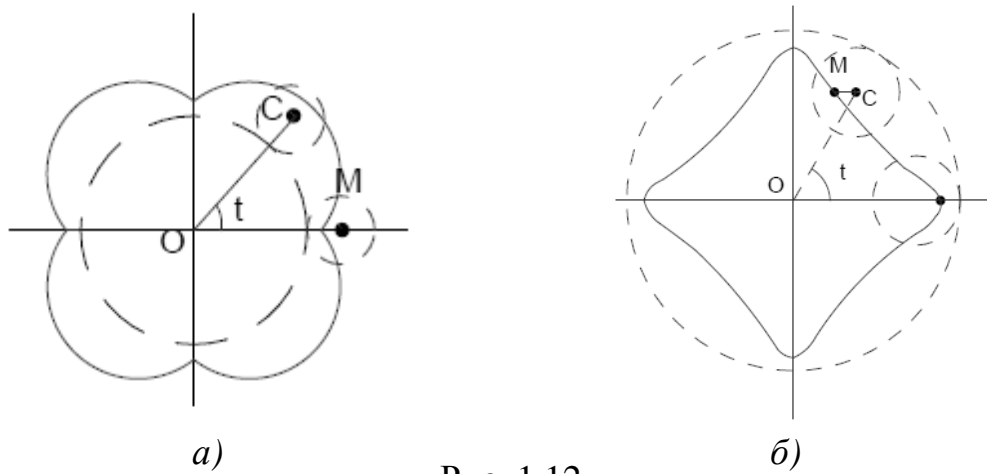


Рис. 1.12

гипотрохида). Ее вид представлен на рис. 1.11 а, б (соответственно) для случая $m = 4$. Если же точка лежит внутри подвижной окружности, то получаются, соответственно, ускоренные эпи – или гипоциклоида, представленные на рис. 1.12 (а, б) для случая $m = 4$.

Уравнения этих кривых в случае эпициклоиды в параметрической форме имеют вид:

$$\begin{aligned} x &= (R + r)\cos\theta - \lambda r \cos \frac{R+r}{r}\theta, \\ y &= (R + r)\sin\theta - \lambda r \sin \frac{R+r}{r}\theta \end{aligned} \quad (1.24)$$

(в случае гипоциклоиды следует заменить r на $-r$).

Случаю $\lambda > 1$ соответствует удлиненная, $\lambda < 1$ – укороченная эпи- или гипоциклоида.

При $R = 2r$ ($\lambda \neq 1$) гипоциклоида превращается в эллипс с полуосями $r(1+\lambda)$ и $r(1-\lambda)$ соответственно.

Важное практическое значение имеют траектории, описываемые так называемыми кривыми 2-го порядка или коническими сечениями – эллиптические, гиперболические или параболические траектории. (Их значение будет установлено при рассмотрении орбит небесных тел и других космических объектов).

Эллипс представляет собой множество всех точек на плоскости, для которых сумма расстояний от двух заданных точек – фокусов эллипса – есть величина постоянная. Эта величина определяет длину большой оси эллипса $2a$ (рис. 1.13). Кроме этой величины, эллипс задается еще и расстоянием между фокусами на большой оси. Величина $e=c/a$ ($e < 1$) называется эксцентриситетом и определяет «вытянутость» эллипса, т. е. величину его малой оси $2b$ ($b^2=a^2-e^2$). Величина $p=b^2/a$ называется фокальным параметром эллипса.

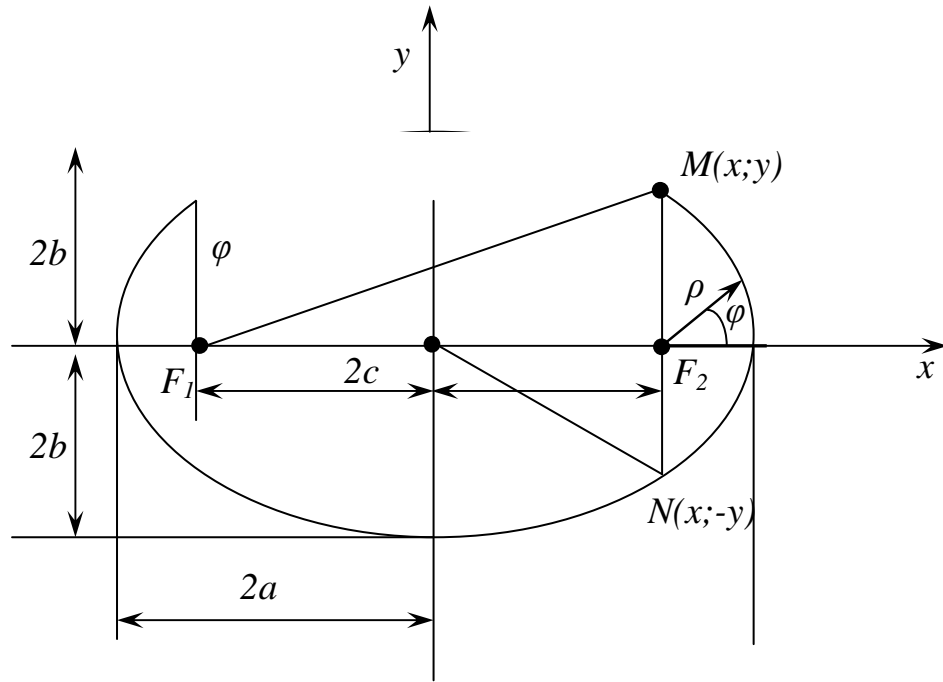


Рис. 1.13

Эллипс описывается уравнением, которое в различных системах координат имеет разный вид. В параметрической форме (см. выше) уравнение эллипса имеет вид:

$$x = a \cos \theta, \quad y = b \sin \theta. \quad (1.25)$$

Исключая t , получаем уравнение в прямоугольных координатах (каноническое уравнение):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1.26)$$

Наконец, в полярных координатах (см. рис. 1.13):

$$\rho = \frac{P}{1 + e \cdot \cos \varphi} \quad (1.27)$$

где P – фокальный параметр, e – эксцентриситет.

Площадь сектора эллипса (см. рис. 1.13):

$$S_{OMPN} = a \cdot b \cdot \arccos \frac{x}{a}. \quad (1.28)$$

Полная площадь, отображенная эллипсом, равна $S = \pi ab$.

Гипербола есть множество всех точек на плоскости, для которых разности расстояний от двух заданных точек – фокусов – есть величина постоянная. Эта величина определяет длину действительной оси гиперболы $2a$ (рис. 1.14). Гипербола имеет две ветви: для одной из них $r_1 - r_2 = 2a$, для другой $r_2 - r_1 = 2a$. Кроме этой величины, гипербола задается еще и расстоянием между фокусами на действительной оси $2c$. Величина $e = c/a$ ($e > 1$) называется эксцентриситетом и определяет величину «мнимой» оси эллипса ($b^2 = c^2 - a^2$). Величина $p = b^2/a$ называется фокальным параметром гиперболы.

Уравнения гиперболы в параметрической форме:

$$x = a \cdot \operatorname{ch} \theta, \quad y = b \cdot \operatorname{sh} \theta \quad (x = a \cdot \sec \theta, y = b \cdot \operatorname{tg} \theta). \quad (1.29)$$

В прямоугольных координатах (x, y) каноническое уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1.30)$$

В полярных координатах (см. рис. 1.14) уравнение имеет вид (1.27), оно определяет одну из двух ветвей гиперболы. При удалении в бесконечность ветви гиперболы

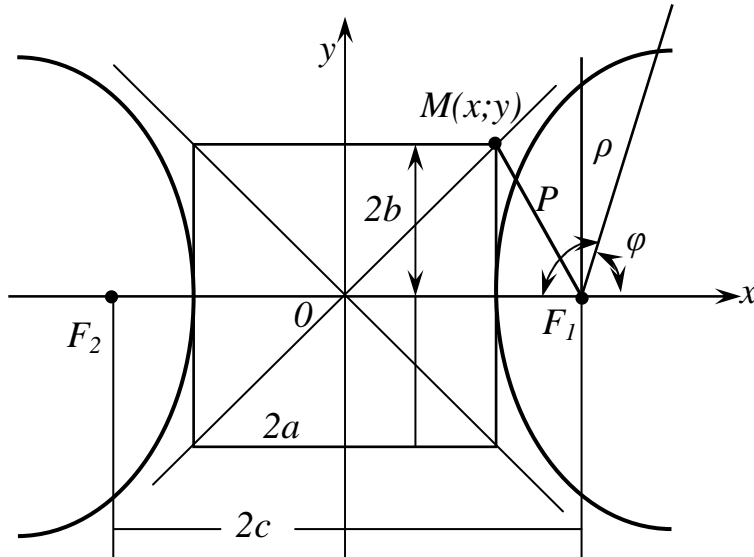


Рис. 1.14

неограниченно приближаются к двум прямым – асимптотам гиперболы, уравнения которых имеют вид: $y = \pm b/a \cdot x$. Если $a = b$, то гипербола называется равнобочной; ее уравнение: $x^2 - y^2 = a^2$. При этом асимптоты взаимно перпендикулярны и их удобно принять за оси координат, тогда уравнение принимает вид: $xy = a^2/2$.

Парабола – есть множество всех точек на плоскости, равноудаленных

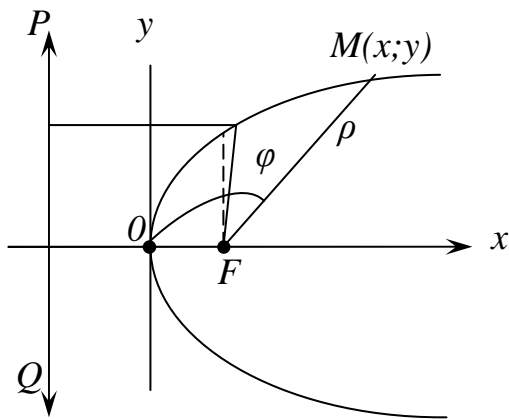


Рис. 1.15

от заданной точки – фокуса – и данной прямой – директрисы (PQ на рис. 1.15). Линия, проходящая через фокус перпендикулярно директрисе, называется осью параболы, точка параболы, лежащая на этой оси, называется вершиной параболы. Фокальный параметр P в этом случае равен расстоянию от фокуса до директрисы параболы. Эксцентриситет параболы $e=1$. Каноническое уравнение при ориентации параболы, показанной на рис. 1.15, имеет вид:

$$y^2 = 2Px. \quad (1.31)$$

Уравнение параболы в полярных координатах имеет вид (см. формулу (1.27)), $e=1$:

$$\rho = \frac{P}{1 + \cos \varphi}. \quad (1.32)$$

До сих пор мы рассматривали только плоские кривые. Как мы уже отмечали, такое движение совершает большинство элементов машин и механизмов в технике. Примеры этой кинематики будут приведены в п. 1.4, а траектории космических объектов рассмотрены в п. 1.5 (заметим, кстати, что

к траектории вида циклоиды приводит знаменитая задача о брахистохроне (кривой скорейшего спуска). Во многих случаях имеет место движение и по пространственным кривым, для задания которых необходим закон движения:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (1.33)$$

(тем самым задано уравнение пространственной кривой в параметрической форме). Кривая может быть задана также уравнениями поверхностей, пересечением которых она служит:

$$F(x, y, z) = 0, \quad \Phi(x, y, z) = 0. \quad (1.34)$$

Пройденный к моменту времени t путь по кривой S определяется длиной дуги, формула для которой имеет вид:

$$S = \int_{t_0}^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt. \quad (1.35)$$

Одним из примеров указанных траекторий является движение по винтовой линии (такое движение совершается, в частности, при ввинчивании винтов или болтов, навивании спиралей, обмоток катушек и т. п.).

Уравнение правой винтовой линии, показанной на рис. 1.16, в параметрической форме имеет вид:

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt. \quad (1.36)$$

За один оборот ($\Delta t = 2\pi$) точка смещается на $\Delta z = 2\pi$; эта величина определяет шаг винта h . Заметим, что винтовая линия является линией (геодезической) для цилиндра (рис. 1.16). Геодезическая линия для данной поверхности обладает следующими свойствами: 1) если материальная точка при своем движении вынуждена оставаться на поверхности, то при

отсутствии других внешних сил она движется по геодезической линии; 2) упругая нить, натянутая на поверхность, располагается по геодезической линии; 3) геодезическая линия определяет кратчайшее расстояние между точками на поверхности (заметим, что для шара геодезической линией является отрезок дуги «большого круга» с центром, совпадающим с центром шара).

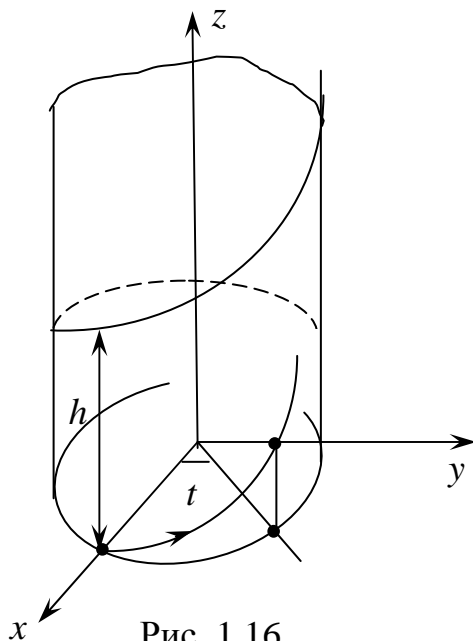


Рис. 1.16

Описанные выше кривые из-за ряда их интересных свойств в литературе иногда называют «замечательными кривыми», а их свойства учитываются в практике инженерно-технических разработок — при проектировании некоторых видов машин и механизмов (например, цевочные, зубчато-

передаточные, зубчато-рычажные механизмы, пружинно-навивочные, обмотко-намоточные, прядильные машины и т. д.).

Так, например, существуют зубчато-передаточные механизмы, в которых профили зубьев очерчены кривой в виде циклоиды (так называемые «циклоидальное зацепление»). При этом достигается наиболее благоприятный характер распределения удельного давления на площадках касания головки зубьев с вогнутой поверхностью ножек. Подобные технические решения могут применяться и в других устройствах с деталями, совершающими длительное время возвратно-вращательные движения (например, высокоточные и долговечные часовые механизмы). В циклоидальных зацеплениях, применяемых в цевочных механизмах, профили зубьев представляют собой эквидистанты циклоидальной кривой траектории при движении центра цевок – круглых цилиндров колеса зубчатого механизма. Подобные устройства применяются и в некоторых типах редукторов с большим передаточным числом и высоким КПД.

С указанными видами кривых, как траекторий движения тел, на практике встречаемся не только при анализе функционирования ряда технических устройств. С ними приходится иметь дело и при изучении многих вопросов, связанных с движением элементарных частиц и в вакууме, и в плазме, и в пространстве над поверхностью Земли. Так необходимость изучения процессов в плазме, как особого высокотемпературного состояния вещества, диктуется разнообразными и весьма эффективными ее техническими приложениями. Сегодня уже имеется множество приборов и устройств, в которых плазма используется как рабочее тело. А в перспективе плазма будет использоваться еще в больших масштабах, включая и создание новых видов источников и преобразователей энергии (см. т. II). Оказывается, что приведенные выше кривые циклоидного класса являются во многом характерными при описании движения электронов и ионов в плазме под воздействием электрических и магнитных полей. Поэтому варьируя ими, можно получать много сведений о параметрах плазмы.

Отметим еще одно проявление рассмотренных выше кривых (траекторий) в природе. Известно существование в природе так называемых космических лучей – потока заряженных частиц из Космоса на поверхность Земли, но недостаточно известны их свойства и их происхождение. Для выяснения этих вопросов используются различные методы, в том числе анализ траекторий этих частиц.

Можно приближенно считать, что эти частицы входят в околоземное пространство перпендикулярно. На эти частицы действуют с одной стороны сила тяжести и с другой – ларморовская сила, обусловленная наличием магнитного поля Земли, силовые линии которого от полюса к полюсу идут параллельно (приближенно) поверхности Земли.

Под действием этих двух видов сил частицы совершают сложные движения, некоторые из них можно отнести к рассмотренному выше классу циклоидных кривых.

1.3 Поступательное и вращательное движение твердого тела

В п. 1.1 уже было установлено, что твердое тело конечных размеров может совершать движения двух основных типов – поступательное и вращательное, причем любое другое его сложное движение может быть представлено как их комбинация. Поступательное движение тела это такое движение, при котором любая прямая, принадлежащая телу, перемещается параллельно самой себе. Для данного момента времени скорости и ускорения всех точек тела одинаковы, и все точки твердого тела описывают одинаковые траектории, которые лишь сдвинуты друг относительно друга на некоторое расстояние. Перемещения точек за один и тот же произвольно выбранный промежуток времени равны. Такое движение совершает, например, педаль велосипеда, поршень двигателя мотоцикла (при их прямолинейном движении и т. п.). При таком движении твердого тела его количественное описание может быть отнесено к любой, произвольно выбранной точке тела: с кинематической точки зрения все материальные точки, из которых состоит тело, совершенно равноправны. Однако, как мы увидим из дальнейшего, с динамической точки зрения (при рассмотрении действия внешних сил на тело) удобнее рассматривать движение совершенно определенной точки – центра масс (или центра инерции) тела (см. п. 2.2).

Итак, идея количественного описания поступательного движения твердого тела заключается в следующем: ввиду одинакового вида траектории движения всех образующих его материальных точек можно выбрать одну определенную точку в теле и условно принять, что в ней сосредоточена вся

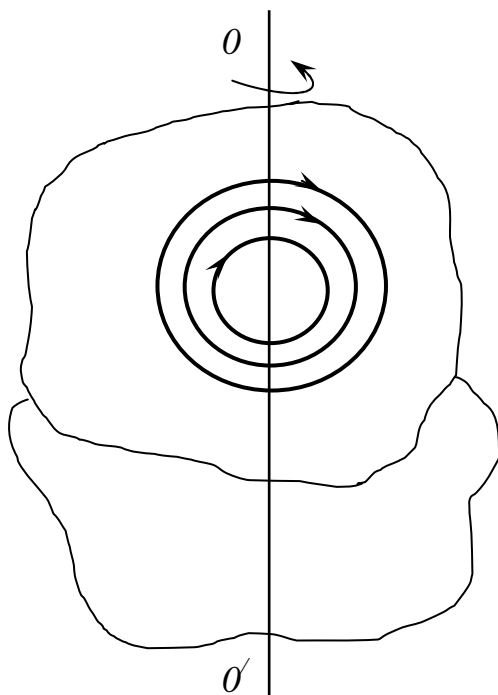


Рис. 1.17

масса тела, а затем применить к ней все изложенные выше законы кинематики движения материальной точки. Таким путем можно описать равномерное и неравномерное прямолинейное движение, криволинейное движение твердого тела т. д. (см. п.п. 1.1, 1.2). Так рассматривается, в частности, кинематика звеньев некоторых механизмов и машин (см. п. 1.4). Как указывалось выше, именно эта идея представления твердого тела как системы жестко связанных между собой материальных точек определяет ценность самого понятия материальной точки и составляет основу построения кинематики и динамики твердого тела.

Вращательное движение твердого тела характеризуется наличием в нем некоторой прямой (оси вращения), точки которой не участвуют в движении тела (рис. 1.17). В этом

состоит коренное отличие от поступательного движения, при котором все

точки тела принимают равное участие в движении. Точки, не лежащие на оси вращения, совершают движение по окружностям, причем радиусы этих окружностей определяются расстояниями рассматриваемых точек от оси вращения. Таким образом, второе отличие вращательного движения от поступательного заключается в том, что траектории материальных точек, образующих вращающееся тело, вообще говоря, различны.

Отличие характера вращательного движения от поступательного определяет и иной способ количественного описания этого вида движения. Наиболее простой вид имеют законы вращения тела, имеющего одну неподвижную точку (рис. 1.18). Пусть ось вращения проходит через точку O этого тела. Рассмотрим некоторую точку M , находящуюся на расстоянии r от центра вращения O , и проведем через нее и точку O линию, занимающую в

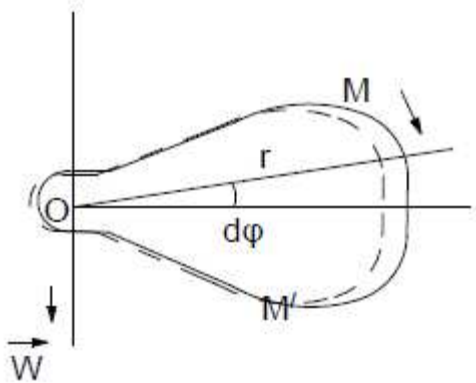


Рис. 1.18

некоторый начальный момент времени t_0 положение OM . За время dt в результате поворота твердого тела точка сместится в новое положение M' и линия OM' будет повернута относительно линии OM на некоторый угол $d\varphi$. Величина

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (1.37)$$

определяет численное значение угловой скорости вращения тела.

Смысл введения этой величины заключается в том, что линии, проходящие через центр O и все остальные точки, за время dt повернутся на один и тот же угол $d\varphi$, т. е. при различии траекторий движения отдельных точек величина ω является количественной характеристикой вращения всего тела в целом.

Однако для полного определения характера вращения тела знание значения только величины ω еще недостаточно: необходимо еще задать положение оси вращения в пространстве и направление вращения. Это достигается введением вектора угловой скорости $\vec{\omega}$, который характеризуется следующими свойствами: его численная величина определяется по (1.37); его направление совпадает с положением оси вращения тела, причем при рассмотрении с «острия» вектора $\vec{\omega}$ вращение происходит против часовой стрелки.

Векторный характер угловой скорости становится наглядным при рассмотрении вращения тела вокруг двух не совпадающих друг с другом осей с угловыми скоростями $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$. При этом оказывается, что результирующая является вращением вокруг третьей оси с угловой скоростью $\vec{\omega}_3 = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$, равной векторной сумме исходных угловых скоростей. Примером такого сложения угловых скоростей является движение бегунка, схематично представленное на рис. 1.19. Сам бегунок совершает вращение вокруг горизонтальной оси OO' , а эта ось, в свою очередь,

вращается вокруг вертикальной оси. Результирующее можно представить как вращение вокруг третьей оси с угловой скоростью $\omega = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$, как показано на рис. 1.19.

Пользуясь представлением вращательного движения, показанным на рис. 1.18, и формулой (1.37), можно дать количественное описание этого движения, формально сходное с описанием кинематики поступательного движения.

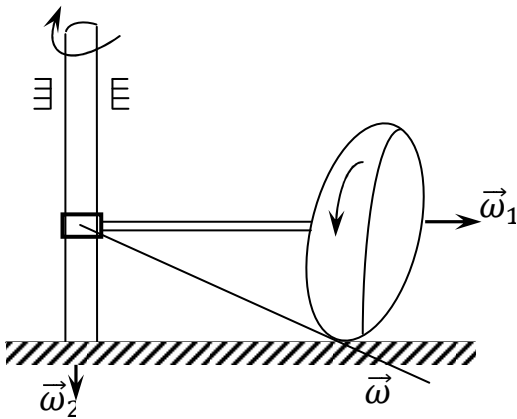


Рис. 1.19

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t \quad (1.38)$$

(сравним с формулой (1.6)). Величина φ имеет здесь смысл «углового перемещения» вращающегося тела. Если же $\omega \neq const$, то можно ввести угловое ускорение по формуле:

$$\beta = \frac{d\omega}{dt}. \quad (1.39)$$

Если $\beta = const$, то мы имеем случай

равнопеременного вращательного движения и тогда:

$$\omega = \omega_0 + \beta t; \quad (1.40)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \beta \frac{t^2}{2} \quad (1.41)$$

(сравним с формулами (1.9) и (1.8), соответственно). Таким образом, формулы для вращательного движения получаются из соответствующих формул для поступательного движения путем формальной замены: x - φ , v - ω , a - β .

Нетрудно установить также связь между «линейными» (x , v , a) и «угловыми» (φ , ω , β) характеристиками движения твердого тела. Обращаясь вновь к рис. 1.18, мы видим, что за время dt выбранная точка тела совершает «линейное» перемещение по дуге MM_1 , длина которой очевидно, равна $r d\varphi$. Следовательно, линейная скорость точки M равна

$$v = \frac{MM_1}{dt} = \frac{r d\varphi}{dt} = r\omega. \quad (1.42)$$

Дифференцируя почленно по t ($\frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt}$), находим, что

$$a_t = r\beta. \quad (1.43)$$

Здесь a_t - касательное (тангенциальное) ускорение материальной точки M ; нормальное (центростремительное) ускорение, как было установлено выше, равно $a_n = v^2/2 = \omega^2 r$ (см. формулу (1.13)).

Если вектор угловой скорости ω изменяет свое положение в пространстве, то движение тела уже не является плоским (так как при этом изменяется ориентация плоскости вращения, к которой перпендикулярен вектор ω). В этом случае формулы (1.39) и (1.42) приобретают векторный

характер. В частности, вектор углового ускорения определяется как

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (1.44)$$

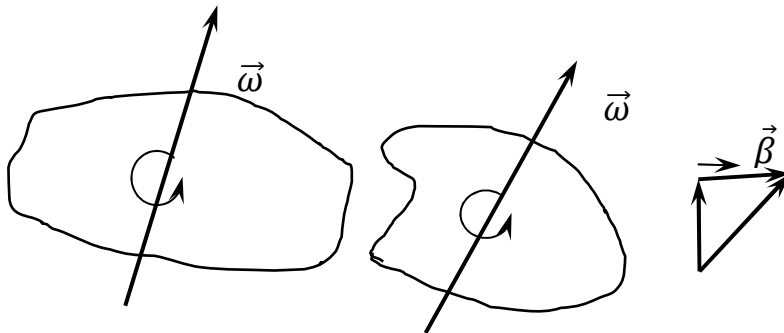


Рис. 1.20

Если за время dt вектор ω изменяется на $d\omega$, как показано на рис. 1.20, то вектор β , очевидно, не совпадает с вектором ω по направлению, а образует с ним некоторый угол, зависящий от вектора приращения угловой

скорости $d\omega$. Формула (1.42) в векторной форме имеет следующий вид:

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \vec{r}]. \quad (1.45)$$

Смысл этой формулы ясен из рис. 1.21 с учетом геометрического определения векторного произведения векторов.

Как уже упоминалось выше, любое сложное движение тела можно представить как комбинацию поступательного и вращательного движения. В качестве примера рассмотрим плоское движение – качение цилиндра по плоскости без скольжения или при его наличии (рис. 1.22).

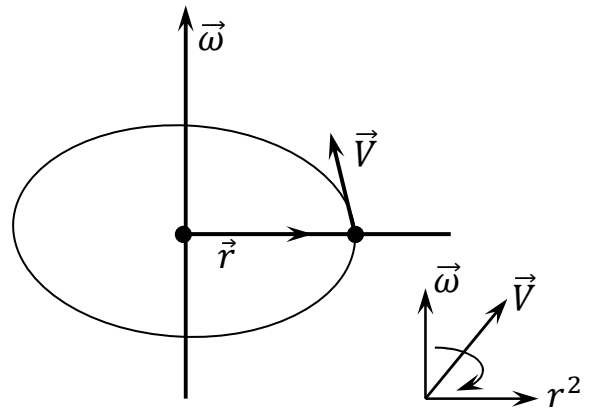


Рис. 1.21

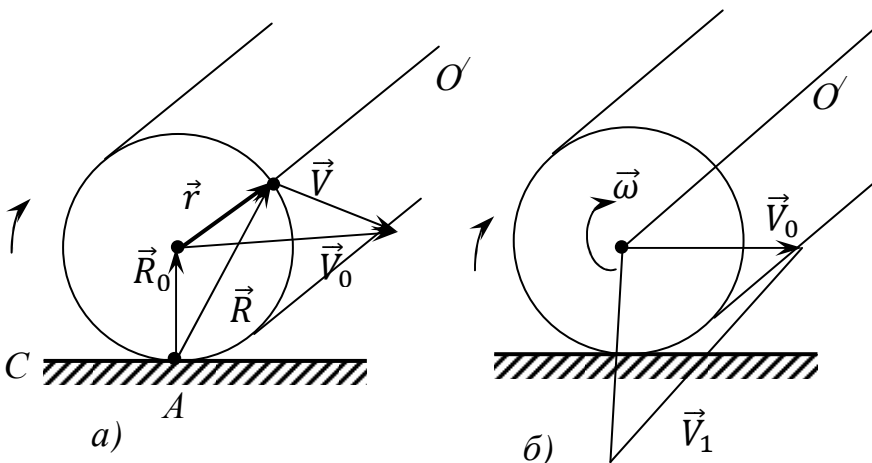


Рис. 1.22

Ось цилиндра движется поступательно с некоторой скоростью V_0 , а сам цилиндр совершает вращение вокруг этой оси с некоторой угловой скоростью ω . При отсутствии проскальзывания цилиндра между этими величинами

существует соотношение (1.42) (R_0 – радиус цилиндра):

$$V_0 = \omega R_0. \quad (1.46)$$

(Это следует из того, что смещение оси \mathcal{V}_{odt} равно длине дуги окружности цилиндра ωR_{odt} , на которую передвинется за время dt точка касания цилиндра с плоскостью). Если $\mathcal{V}_0 \neq \omega R_0$, то цилиндр совершает качение со скольжением. Согласно рис. 1.22 а, скорость $\vec{\mathcal{V}}$ любой точки цилиндра можно представить в виде

$$\vec{\mathcal{V}} = \vec{\mathcal{V}}_0 + [\vec{\omega}\vec{r}], \quad (1.47)$$

что и отражает указанную возможность представления рассматриваемого сложного движения в виде суммы поступательного и вращательного движения.

В данном случае, как и во многих других, целесообразно наряду с «истинной» осью вращения $00'$ ввести мгновенную ось вращения, проходящую через точки твердого тела, находящиеся в данный момент покоя. Если точка соприкосновения цилиндра с плоскостью не проскальзывает, то эта точка (и все остальные вдоль образующей цилиндра) остается в данный момент времени в покое. Таким образом, в данном случае движение цилиндра в каждый момент времени можно представить как «чистый» поворот вокруг мгновенной оси вращения, проходящей вдоль образующей цилиндра через точки соприкосновения цилиндра с плоскостью. Мгновенная ось движется со скоростью \mathcal{V}_0 , проходя все время через различные точки цилиндра; «истинная» ось также движется со скоростью \mathcal{V}_0 , но все время остается связанной с одними и теми же точками цилиндра. Введя вектор $\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{r}$ (см. рис. 1.22 а), можно представить формулу (1.47) следующим образом:

$$\vec{\mathcal{V}} = [\vec{\omega}(\vec{R}_0 + \vec{r})] = [\vec{\omega}\vec{R}]. \quad (1.48)$$

Таким образом, в каждый момент времени цилиндр совершает вращательное движение вокруг мгновенной оси с угловой скоростью ω .

Если цилиндр совершает качение со скольжением, то мгновенная ось вращения уже не проходит через точки контакта цилиндра с плоскостью (рис. 1.22 б). При $\mathcal{V}_0 > \omega R_0$ и скорости скольжения \mathcal{V}_I мгновенная ось проходит через точку А (ниже плоскости качения), построение которое ясно из чертежа. Если $\mathcal{V}_0 < \omega R_0$, то мгновенная ось проходит выше плоскости качения. Применение понятия мгновенной оси вращения будет проиллюстрировано ниже.

1.4 Примеры кинематических схем машин и механизмов

Примерами сложной кинематики могут служить движения различных кинематических пар, то есть соединенных между собой звеньев механизмов и машин. Наиболее простой кинематикой обладают вместе с тем и наиболее распространенные в технике одноподвижные кинематические пары, то есть обладающие одной пространственной степенью свободы – шарниры, ползуны и др. соединения.

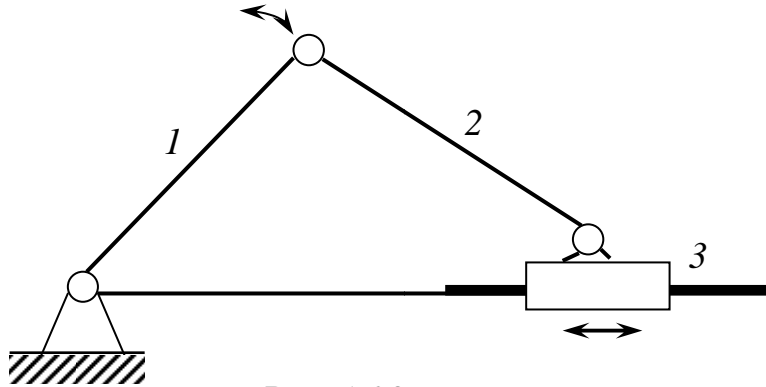


Рис. 1.23

Звенья в механизмах могут совершать все указанные выше (в п. 1.3) виды движения твердого тела. Так, в кривошипно-шатунном механизме (рис. 1.23) ползун 3 совершает поступательное движение, кривошип 1 – вращательное, а шатун 2 –

сложное плоское движение, которое, как

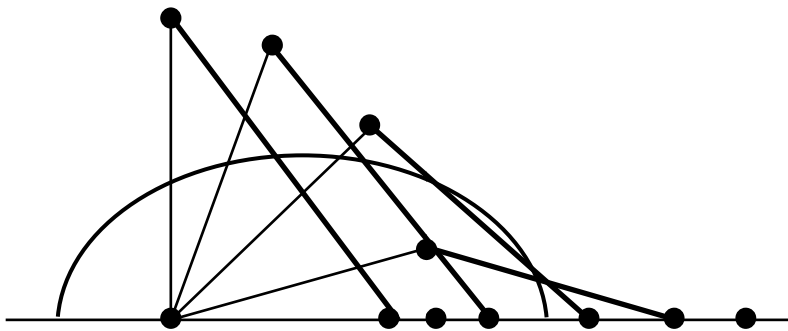


Рис. 1.24

представить как сумму поступательного (криволинейного) движения центра тяжести (пунктирная линия) и вращательного движения вокруг оси, проходящей через центр тяжести перпендикулярно плоскости движения шатуна (рис. 1.24).

Рассмотрим кинематику этого простого механизма, которая определяется законом движения произвольной точки звена механизма. Для вывода уравнения этого движения следует выбрать систему координат, в данном случае – так, как показано на рис. 1.25. Здесь S – центр тяжести шатуна 2, $\vec{v}_A, \vec{v}_S, \vec{v}_B$ – векторы мгновенных скоростей движения точек A, S и B . Точка P характеризует положение мгновенного центра вращения, лежащего на пересечении перпендикуляров к векторам скоростей \vec{v}_A и \vec{v}_B концов звена AB . При этом мгновенная угловая скорость ω_M будет

$$\omega_M = \frac{v_A}{PA} = \frac{v_S}{PS}. \quad (1.49)$$

Отсюда следует соотношение между v_A и v_S :

$$v_S = v_A \frac{PS}{PA}. \quad (1.50)$$

Мгновенные координаты (x_a, y_a) конца кривошипа – точки А – определяются углом φ , который, в свою очередь, при равномерном вращении кривошипа с угловой скоростью ω изменяется со временем по закону $\varphi = \omega t$. Обозначив $OA = r$, имеем:

$$x_A = r \cos \varphi = r \cos \omega t, \quad y_A = r \sin \varphi = r \sin \omega t. \quad (1.51)$$

Угол φ является определяющим параметром для движения всех звеньев данного механизма, поскольку величина ω задана. Поэтому величина φ должна входить в уравнение движения всех других звеньев механизма.

Рассмотрим, в частности, движение центра тяжести ползуна 3 – точки В. Из рис. 1.26 видно, что (l – длина шатуна, координата x_B отсчитывается от проекции точки Р на ось X), отрезки,

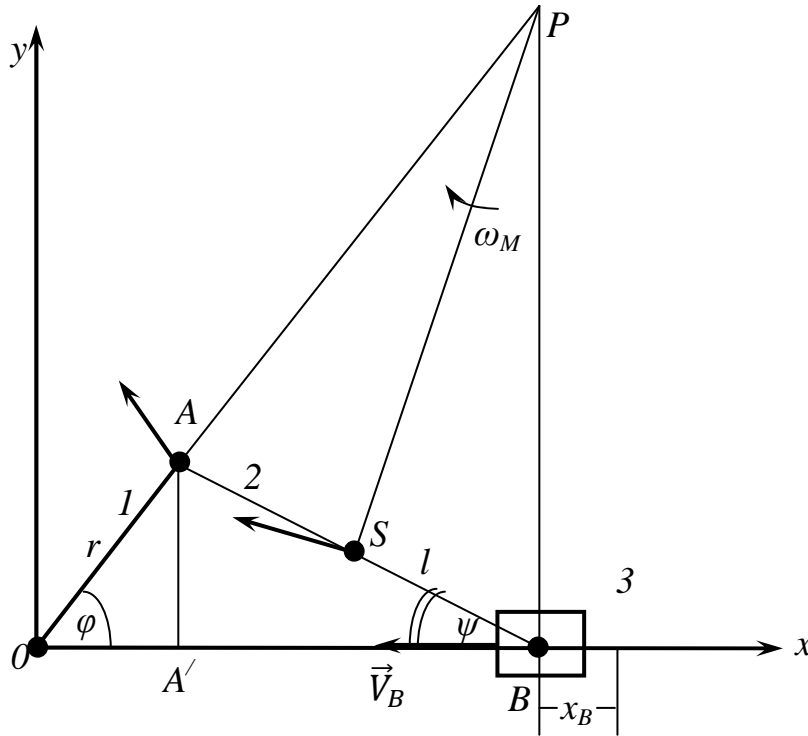


Рис. 1.25

определяющие в каждый момент времени координату x_B :

$$OA' = l \cos \psi, \quad A'B = r \cos \varphi. \quad (1.53)$$

Из рассмотрения треугольников OAA' и $AA'B$ следует:

$$\sin \psi = \frac{r}{l} \sin \varphi. \quad (1.54)$$

Тогда $\cos \psi = \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l} \sin \varphi\right)^2}$, поскольку величина $\sin \varphi < 1$, то при малых r/l , т. е. $r/l < 0,2$, можно использовать приближенную формулу $\sqrt{1 - a} = 1 - \frac{1}{2}a$, так что

$$\cos \psi \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{l} \sin \varphi\right)^2. \quad (1.55)$$

При этом для x_B имеем:

$$x_B = r \left(1 - \cos \varphi + \frac{1}{2} \frac{r}{l} \sin^2 \varphi\right). \quad (1.56)$$

Если, в соответствии с рис. 1.23, сместить линии движения точки В на величину a относительно оси ОХ, то можно показать, что выражение для ψ примет вид:

$$\sin \psi = \frac{a}{l} + \frac{r}{l} \sin \varphi. \quad (1.57)$$

Соответственно вместо (1.55):

$$\cos \psi = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{l} + \frac{r}{l} \sin \varphi \right)^2. \quad (1.58)$$

И уравнение движения $x_B(\varphi)$ принимает вид:

$$x_B = r \cos \varphi + l \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{l} + \frac{r}{l} \sin \varphi \right)^2 \right]. \quad (1.59)$$

Поскольку $y_B = 0$ или $y_B = \pm a$ для двух рассмотренных случаев, а величина r и l фиксированы, то с помощью приведенных выражений можно определить координаты любой другой точки звеньев механизма. Например, для центра тяжести S шатуна 2 имеем:

$$x_S = \frac{1}{2}(x_A + x_B), \quad v_S = \frac{1}{2}(v_A + v_B). \quad (1.60)$$

Зная закон движения точки $x(t)$, $y(t)$, можно определить соответствующие скорости и ускорения их движения:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad \vec{v} = \vec{i}v_x + \vec{j}v_y, \quad |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \quad (1.61)$$

Например, при наличии закона движения (1.56) для скорости точки В имеем:

$$v_B = v_{x_B} = \frac{dx_B}{dt} = \omega t \left(\sin \varphi + \frac{r}{2l} \sin 2\varphi \right), \quad v_{y_B} = 0. \quad (1.62)$$

Соответственно ускорение для этой точки равно

$$a_B = \frac{dv_B}{dt} = \omega^2 r \left(\cos \varphi + \frac{r}{l} \cos^2 \varphi \right). \quad (1.63)$$

Скорость точки S определяется с помощью приведенного выше соотношения (1.50).

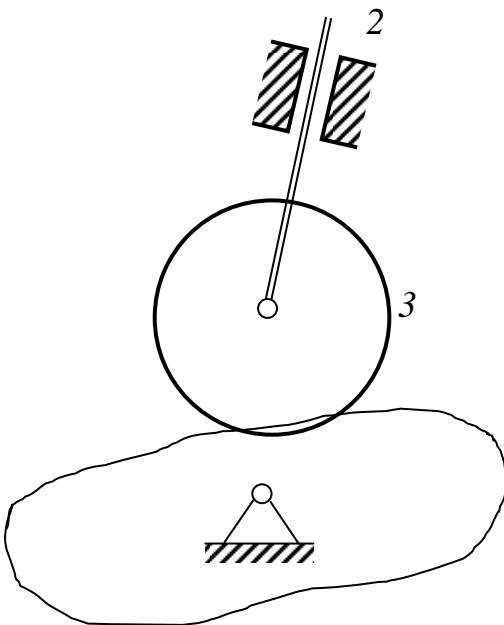


Рис. 1.26

Рассмотрим некоторые другие примеры расчета кинематических схем простейших машин и механизмов.

Кинематическим эквивалентом кривошипно-шатунного механизма является кулачковый механизм, представленный схематически на рис. 1.26.

Он состоит из кулачка 1, ползуна (толкателя) 2 и кинематически пассивного звена – ролика 3, предназначенного для уменьшения трения между звеньями 1 и 2 при работе механизма. Простейшим его вариантом является эксцентриковый механизм – рис. 1.27, в котором вращательное движение эксцентрично посаженной шайбы 1 (кулачка) вызывает возвратно-поступательное движение

толкателя (щупа) 2. Уравнение вращательного движения шайбы имеет вид:

$$\varphi = \omega t + \varphi_0, \quad (1.64)$$

где ω – угловая частота вращения (равна $2\pi n$, n – число оборотов в 1 с.); φ_0 – начальный угол поворота (при $t = 0$). Перемещение толкателя в направлении оси y равно:

$$y = e \sin \varphi = e \sin (\omega t + \varphi_0), \quad (1.65)$$

где e – эксцентриситет шайбы.

Скорость движения толкателя равна

$$y' = e \omega \cos (\omega t + \varphi_0). \quad (1.66)$$

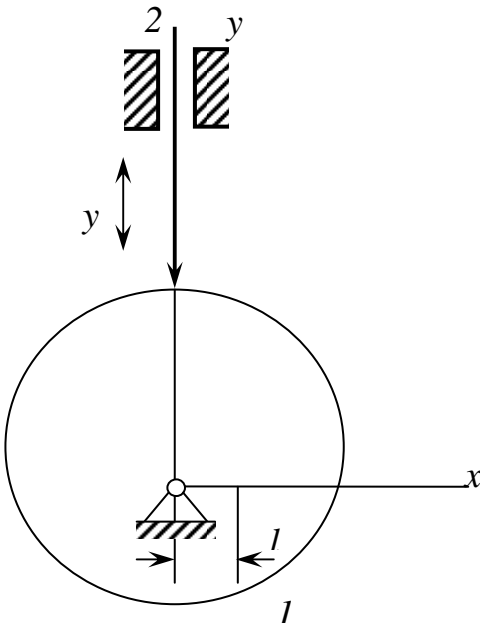


Рис. 1.27

Таким образом, в этом простейшем варианте кулачкового механизма вращательное движение (1.64) преобразуется в гармоническое колебательное движение (1.65), которое, по существу, представляет собой проекцию двухмерного вращения на одну ось (y). Гармоническое колебание всегда может быть представлено как проекция вращения, и в этом смысле оба вида движения являются «кинематически эквивалентными».

Во многих механизмах, в отличие от рассмотренных выше, звенья кинематических пар совершают движения одинакового рода, но с различными кинематическими характеристиками. Так, в зубчатых передачах шестерни совершают вращательное движение, но с различными угловыми скоростями, соотношение между которыми определяется передаточным отношением для данной пары. Это имеет место также в цепных и фрикционных передачах.

Заметим, что на знании кинематических схем и законов движения звеньев, приведенных выше различных механизмов основана возможность моделирования с их помощью относительно простых математических действий. И действительно, с появлением современных электронных вычислительных машин было распространено использование этих механизмов в качестве вычислительных устройств. При этом возможность использования механизма для указанной цели определяется его кинематической формулой.

Если кинематическая формула механизма отображает суммирование перемещений его отдельных звеньев, то он может быть использован для моделирования действия сложения; при этом складываемые величины выражаются через перемещения звеньев и соответствующие масштабные коэффициенты. Этим свойством обладают реечные, стержневые и другие дифференциальные механизмы. Операция умножения выполняется с помощью кулисных механизмов, рычажных дифференциалов и других механизмов. Фрикционные и другие механизмы могут выполнять также

операции дифференцирования и интегрирования. Несмотря на широкое развитие электронной вычислительной техники, механические устройства не потеряли своего значения и в настоящее время находят применения в различных механизмах в машиностроении, станкостроении, приборостроении и др.

1.5 Орбиты небесных тел и искусственных космических объектов

Изучение кинематики различных естественных и искусственных космических объектов в современную эпоху имеет большое научное и практическое значение. С многих точек зрения оно связано с фундаментальными философскими проблемами мироздания и задачами освоения большого космоса, приобретающими все большую актуальность для человечества, и методологией физико-математических исследований различной направленности. Здесь мы коснемся некоторых вопросов, как продолжение темы кинематики движения, так как примером весьма сложной кинематики являются движения небесных тел (Солнца, звезд, планет, комет) и искусственных космических объектов (спутников Земли, космических станций и межпланетных космических кораблей). Эти тела при своем движении испытывают действие различной природы сил со стороны множества других космических объектов.

Обычно эти силы являются силами тяготения, существенное проявление которых в космических масштабах обусловлено большими массами небесных тел. Так, планеты, испытывая главным образом притяжение со стороны Солнца, подвергаются в то же время действию сил со стороны всех остальных планет, которые оказывают, правда, сравнительно небольшое («возмущающее») действие ввиду малости их масс по сравнению с Солнцем. Но кометы, подходят к Солнцу зачастую значительно ближе, чем планеты, и могут испытывать также действие сил светового давления, которые могут стать значительными при большой плотности потока солнечного излучения. В различных областях Вселенной встречаются значительные скопления межзвездного газа и пыли, а также метеоритные рои т. п. Проходя через них, космические тела испытывают сопротивление своему движению вследствие наличия сил трения, и т. д. Таким образом, полное и точное описание характера движения с учетом всех действующих сил практически невозможно даже для естественных космических объектов (собственно «небесных тел»). Движение искусственных космических объектов усложняется еще и наличием «активных участков», траектории, на которых действуют силы тяги со стороны двигателей, которые, вообще говоря, не абсолютно стабильны. Поэтому законы движения этих объектов (законы космонавтики) могут оказаться еще сложнее законов движения небесных тел (законов небесной механики). Таким образом, абсолютно точное количественное описание кинематики космических объектов и их формы орбит на современном этапе не представляется возможным.

Потребности практики уже с древних времен стимулировали изучение кинематики небесных тел. Например, изучение видимого движения Солнца, звезд и Луны по небу сыграло огромную роль в разработке земного календаря, в создании службы времени, навигации и т. д. В настоящее время, в эру освоения Космоса, роль практической астрономии и, в частности, астрометрии, разрабатывающей методы описания движения небесных тел, еще больше возросла. Разработаны и продолжают совершенствоваться приближенные методы описания «небесной кинематики», основанные на широком применении вычислительной техники и учете основных факторов, определяющих траектории небесных тел и кинематические параметры их движения.

Одним из наиболее широко используемых методов является описание движения небесного тела путем решения так называемой «задачи двух тел» (подробнее см. главу 5). Например: можно считать, что движение Луны вокруг Земли в первом приближении управляется силой ее притяжения к Земле и может быть описано с использованием закона всемирного тяготения применительно к данному случаю. Аналогичным образом, движение какой-либо планеты вокруг Солнца может быть приближенно описано также на основе использования закона Всемирного тяготения для системы «Солнце-планета», без учета наличия всех других планет (и иных космических объектов). Последовательное осуществление этой программы (см. п. 5.2.) приводит к выяснению основных законов небесной механики. Здесь мы рассмотрим лишь общие подходы определения кинематических характеристик орбит небесных тел.

Изучение движения небесных тел началось задолго до создания теории тяготения под влиянием потребностей практики, как уже отмечалось выше. Наблюдения показали, что видимое движение светил по небу является весьма сложным, и для его объяснения (на основе представлений о неподвижной Земле – «центре Вселенной») приходилось придумывать довольно сложные кинематические схемы (например, систему Птолемея). Заслуга Коперника состоит в том, что он предложил кинематическое описание Солнечной системы в гелиоцентрической системе отсчета (т. е. с центром в Солнце), которая, как затем было постулировано в классической механике Ньютона, является инерциальной с достаточной степенью точности. В этой системе отсчета законы движения планет принимают наиболее простой вид. При этом также устанавливается, что сама Земля совершает весьма сложное движение в этой системе – она движется вокруг Солнца по орбите, близкой к круговой, но подверженной различным возмущениям со стороны Луны и планет, и одновременно вращается вокруг своей оси. Кроме того, в «галактической» системе Земля принимает участие в перемещении всей Солнечной системы среди звезд (см. ниже). Таким путем естественным образом объясняется сложность видимого движения небесных тел, наблюдаемых с движущейся Земли.

Рассмотрим некоторые кинематические характеристики планетных

элемент времени t , т. е. момент, в который планета находится в определенной точке орбиты. Положение планеты на орбите P характеризуется аргументом широты « u » (изменяется от 0 до 360° в направлении движения планеты).

Аналогичными элементами можно охарактеризовать орбиты других небесных тел – Солнца в Галактике (при этом используются так называемые галактические координаты), Луны вокруг Земли, искусственных спутников Земли и т. д.

При описании движения спутников Земли используется геоцентрическая система отсчета с началом координат в центре Земли (при этом точка ближайшего положения спутника к Земле называется «перигеем»). Угол i в этом случае отсчитывается от плоскости земного экватора; угол Ω называется прямым восхождением, угол ω – аргументом перигея. Орбита ближайшего к нему небесного тела – Луны – представляет собой вытянутый эллипс с эксцентриситетом $e = 0,35$. Кеплеровы орбиты планет Солнечной системы представляют собой довольно слабо вытянутые эллипсы. Так, наибольшее расстояние Земли от Солнца (в афелии) равно 152×10^6 км, а наименьшее, (в перигелии) – 147×10^6 , что соответствует эксцентриситету орбиты 0,017. Наибольшие эксцентриситеты орбиты – у Плутона (0,249) и Меркурия (0,206), у других планет они значительно меньше.

Малые небесные тела – кометы – могут двигаться по очень сильно вытянутым эллипсам, и их периоды обращения составляют от нескольких лет (например – 3,3 года для кометы Энке-Баклунда) до нескольких тысяч лет (например – комета Донаты). Сложность определения орбит комет заключается в том, что ввиду малости их размеров и слабой светимости они могут наблюдаться лишь сравнительно недолгое время – вблизи перигелия на коротком отрезке орбиты, на котором очень трудно отличить параболу или гиперболу от эллипса с большим эксцентриситетом. Ясно, что если комета является короткопериодической, то можно регулярно наблюдать ее возвращение к Солнцу и тем самым установить эллиптический характер ее орбиты. Такая периодичность была впервые установлена для Галлея, обладающей периодом обращения около 76 лет. Если же время ожидаемого возвращения приходится на весьма отдаленное будущее, то вопрос об установлении истинной формы орбиты усложняется. В настоящее время с большой степенью вероятности можно утверждать, что «гиперболических» или «параболических» комет не существует; все их орбиты являются более или менее вытянутыми эллипсами, из чего астрономами был сделан важный вывод о том, что все кометы являются «полноправными членами» солнечной системы. Еще менее ясен вопрос о характере орбит метеоров («падающих звезд»). (Падающие на землю метеоры называют метеоритами, они влетают в атмосферу с очень большими скоростями – несколько десятков километров в секунду). Из прежних наблюдений (преимущественно визуальных) получалось, что большинство метеоров вблизи Земли имеют скорости (по отношению к Солнцу) свыше 50 км в секунду и, следовательно, имеют

гиперболические орбиты, т. е. приходят в Солнечную систему из межзвездного пространства. Дело в том, что, согласно теории тяготения, тело, движущееся на расстоянии Земли от Солнца со скоростью свыше $30\sqrt{2} \approx 42$ км/с (30 км/с – скорость движения Земли по орбите) относительно Солнца, должно иметь гиперболическую орбиту, а при скорости меньше 42 км/с – эллиптическую орбиту (движение со скоростью точно 42 км/с – это движение по неустойчивой гиперболической орбите). Однако более точное измерение скоростей метеоров с помощью оптических приспособлений показали, что большинство их относится к эллиптической области (средняя скорость близка к 40 км/с), и, следовательно, такие метеоры также являются членами Солнечной системы.

После вычисления невозмущенной орбиты небесного тела, осуществляется ее уточнение по результатам более длительного периода наблюдений. В этом случае уточненная орбита уже не соответствует законам Кеплера, однако отклонение от невозмущенной орбиты сравнительно невелико, поэтому можно принять, что реальное движение описывается теми же формулами, но с переменными во времени элементами орбиты, указанными выше. Величина некоторого элемента A возмущенной орбиты представляется степенным рядом

$$A = A_0 + A_1(t - T_0) + A_2(t - T_0)^2 + \dots, \quad (1.67)$$

где A_0 – значение элементов в эпоху (момент времени) T_0 . Реальная орбита рассматривается как огибающая семейства непрерывно изменяющихся невозмущенных (кеплеровых) орбит. Такая орбита, вычисленная для некоторого момента времени (эпохи) t («эпохи оскуляции»), называется оскулирующей; она непрерывно изменяет свою форму и положение в пространстве. После этого определяется окончательная орбита, наилучшим образом согласующаяся со всеми астрономическими наблюдениями.

Эти «классические» методы успешно применяются и для расчета орбит искусственных космических объектов (искусственных спутников земли и планет), которые, как уже указывалось выше, отличаются от орбит «естественных» небесных тел, главным образом, наличием активных участков, на которых работают тяговые двигатели. Наличие этих участков позволяет заранее рассчитать наиболее рациональные элементы орбиты с учетом таких факторов, как возможность экономии горючего и увеличения полезного веса спутника, удобство выполнения специальных задач (например, фотографирование обратной стороны Луны), обеспечение наилучших условий связи с земными наблюдательными пунктами и радиостанциями (что особенно существенно, например, для спутников связи) и т. д.

Рассмотрим простой пример, иллюстрирующий расчет элементов орбиты космического корабля – спутника Земли.

При выключенном двигателе движение спутника происходит по орбитам, обычно близким к круговым, и подчиняется третьему закону Кеплера:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{(\bar{r}_1)^3}{(\bar{r}_2)^3}, \quad (1.68)$$

где T_1 и T_2 – периоды обращения по двум орбитам, r_1 и r_2 их средние радиусы, так что $r = 1/2(r_a + r_p)$, r_a и r_p соответствуют апогею и перигею орбиты. При меньшем радиусе орбиты период обращения меньше, т.е. оборот вокруг Земли происходит за меньшее время. Для расчета какой-либо орбиты можно в качестве второй («эталонной») орбиты принять, например, орбиту естественного спутника – Луны ($T_2 = 27,3$ суток, $r_2 \approx 384400$ км). Если, например, корабль-спутник совершает 10 оборотов вокруг Земли в сутки ($T_1 = 0,1$ суток), то расчет по формуле (1.68) дает $r_1 \approx 9120$ км. Поскольку средний радиус Земли равен 6380 км, то в данном случае высота спутника над Землей будет равна 2740 км. Если же в некоторый момент включить двигатель корабля и притормозить его, то корабль перейдет на эллиптическую орбиту с апогеем в точке торможения и перигеем $r_p < r_a$ и меньшим периодом обращения $T_2 < T_1$. Если T_2 задан, то расчет по закону Кеплера дает значение $r_2 = 1/2(r_{2a} + r_{2p})$, и, следовательно, величину r_{2p} ($r_{2a} = r_1$). Например, при $T_2 = 1/12$ суток расчет дает $r_2 = 8070$ км, $r_{2p} = 7020$ км и высота перигея 640 км.

Существенной особенностью орбит искусственных спутников Земли и планет является то, что ввиду относительной малости их размеров и масс они подвержены действию множества возмущающих факторов, в том числе светового давления со стороны Солнца и сопротивления атмосферы (Земли или планет), а также несферичности (сжатия вдоль оси вращения) Земли. Например, вследствие сопротивления атмосферы кинетическая энергия спутника уменьшается, и большая полуось эксцентриситета постепенно уменьшается, причем высота перигея уменьшается значительно медленнее, чем высота апогея (наибольшего расстояния спутника от Земли). В результате движение спутника по небу ускоряется, а его период обращения вокруг Земли уменьшается. С приближением к поверхности Земли темп этих изменений возрастает, поскольку сила вязкого сопротивления воздуха увеличивается приблизительно пропорционально скорости движения спутника. Когда орбита становится практически круговой, и ее высота уменьшается до 150-160 км, спутник Земли не успевает сделать полный оборот вокруг Земли и прекращает свое существование, входя в плотные слои атмосферы Земли.

Отклонение от сферичности (сжатия) Земли вызывает вращение плоскости орбиты спутника вокруг оси Земли и вращение орбиты в ее собственной плоскости. Если плоскость орбиты перпендикулярна плоскости земного экватора, то скорость первого из этих движений равна нулю. Кроме того, действие других возмущений обуславливает очень сложный характер движения спутника, с заметным отклонением от ее расчетных параметров.

Поэтому ведется непрерывное точное определение координат и истинных элементов орбиты. Осуществляется это главным образом методами радиолокации, методами лазерной дальнометрии, с последующим расчетом корректирующих импульсов и прогнозированием параметром орбиты спутника.

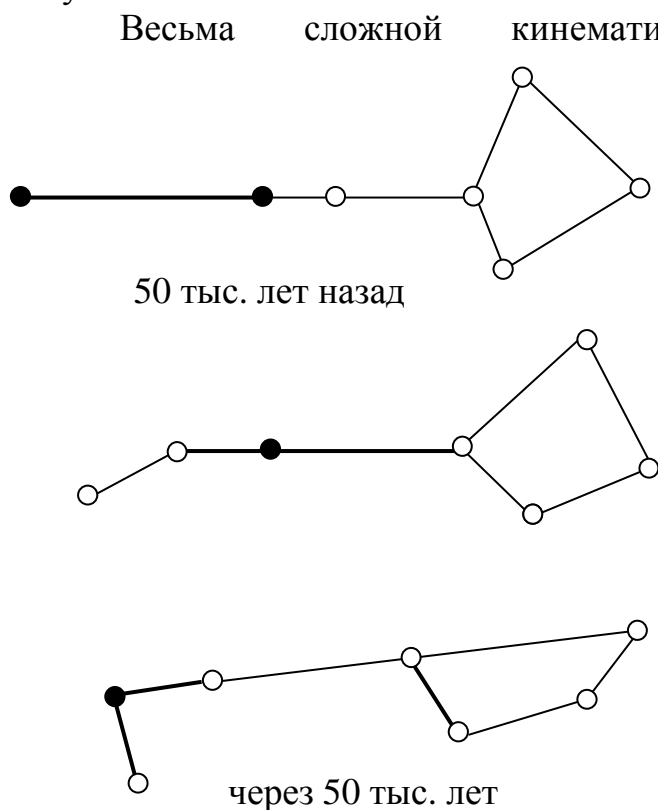


Рис. 1.29

«неподвижных» звезд и огромных звездных скоплений – Галактик. Видимое их перемещение обнаруживается в виде изменений формы созвездий звезд (астрометрии). Это позволяет изучить их угловые перемещения на небе. При этом угловое перемещение обычно складывается на две составляющие – лучевое перемещение в направлении на Солнечную систему и тангенциальное перемещение – в перпендикулярном направлении. Ввиду огромного расстояния до звезд даже незначительным перемещениям их на небе соответствуют огромные скорости.

Например, при перемещении звезды на 1" в год при ее расстоянии до Солнца, в $2,06 \cdot 10^6$ раз большем, чем от Земли до Солнца, скорость звезды составит 47,6 км/с. Само Солнце (вместе со своей планетной системой) движется в пространстве по направлению к созвездию Геркулеса примерно со скоростью 20 км/с. В результате всех этих движений вид нашего звездного неба медленно изменяется; в качестве примера на рис. 1.29 показано изменение очертаний созвездия Большой Медведицы за 100 000 лет. Помимо этих беспорядочных собственных движений, звезды участвуют и в направленных движениях группового характера. Так, если выделить вокруг некоторой звездной системы сферу, содержащую достаточно много (порядка 10^3) звезд (центроид звезд), то скорость этого центроида сравнительно медленно изменяется в пространстве и образует непрерывное поле скоростей. Скорость звезды по отношению к своему центроиду называется остаточной скоростью (для Солнца эта величина равна около 20 км/с, как уже упоминалось выше). Сами же центроиды совершают круговые движения параллельно «галактической плоскости» вокруг оси нашего «местного скопления» звезд – Галактики, что характеризует вращение Галактики в целом. Характер этого вращения оказывается весьма сложным, на различных расстояниях от центра Галактики

угловая скорость центроидов различна. Так, центральные области Галактики вращаются с периодом около 300 млн. лет, а периферийные области, в которых расположено Солнце (на расстоянии около 10 мегапарсек или 3×10^{17} км) – с периодом около 250 млн. лет. Кроме того, астрономические наблюдения показали, что Галактики в наблюдаемой нами области Вселенной «разбегаются» со скоростями, пропорциональными расстояниям до них. Коэффициент пропорциональности называется постоянной Хаббла и составляет от 60 до 140 км/с на Мпс. Для очень удаленных Галактик скорость этого «разбегания» достигает огромных значений, близких к скорости света. Так, для радио Галактик эта скорость составляет примерно 140 тыс. км/с, а расстояние до нее свет проходит за 5 млрд. лет. Этот факт имеет огромное значение для построения картины эволюции Вселенной в целом. Расчеты показывают, что если процесс разбегания галактик происходил теми же темпами и в прошлом, то примерно 12 млрд. лет Вселенная представляла собой «каплю» с плотностью больше ядерной (порядка 10^{15} г/см³). Отсюда следуют далеко идущие выводы о характере эволюции Вселенной.

ГЛАВА 2 ДИНАМИКА

2.1 Законы динамики материальной точки

Большинство видов движений, с которыми приходится встречаться в природе и технике, описывается «классической динамикой», основанной на трех законах Ньютона. Эти законы являются отражением фундаментальных свойств материи, пространства и времени, но в определенном приближении. А именно, законы классической динамики справедливы для больших (по сравнению с атомными масштабами) тел, движущихся медленно (по сравнению со скоростью света).

Законы движения тел атомных масштабов (с размерами порядка 10^{-10} м и менее) устанавливаются квантовой механикой, а законы «быстрых» движений со скоростями, близкими к скорости света – релятивистской механикой. Основные положения этих, более общих по отношению к классической механике теорий, будут рассмотрены в т. III.

В отличие от кинематики, динамика рассматривает не только характер движения тела, но и его причины. Повседневный опыт убеждает нас в том, что первой причиной возникновения движения первоначально покоившегося тела является его взаимодействия с другими телами. В то же время тело, находящееся в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, остается («по инерции») в этом состоянии, если на него не действуют другие тела. Кроме того, воздействие одного тела на другое не проходит бесследно для первого тела. Так, автомобиль, стоящий на стоянке, не придет в движение, если на него не подействует сила тяги двигателя. Если же автомобиль катится по гладкой дороге без сопротивления, то можно выключить двигатель, и автомобиль будет продолжать движение по инерции. Так, если под колесами автомобиля – лед, то он может проехать значительное расстояние, почти без снижения скорости. Однако в любом случае рано и поздно автомобиль с выключенным двигателем остановится в результате действия на него внутренних сил трений в движущихся частях автомобиля и силы трения со стороны поверхности Земли, приложенной, к колесам автомобиля. В наличии этой силы легко убедиться по состоянию поверхности шинных протекторов, которые рано или поздно изнашиваются. В то же время сами колеса оказывают обратное действие на поверхность Земли, в чем также несложно убедиться, сравнивая состояние поверхности в месте проезда автомобилей и вне его. Подобных примеров можно привести множество.

Отмеченные выше три положения, выраженные в четкой количественной форме, представляют собой законы классической динамики Ньютона. Первый закон Ньютона выражает открытый еще Галилеем закон инерции в следующей форме: всякое тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие со стороны других тел не выведет его из этого состояния.

Такая формулировка закона нуждается в ряде уточнений. Прежде всего, следует отметить, что, согласно принципу относительности Галилея, покой и равномерное прямолинейное движение – это одно и то же состояние с точки зрения классической динамики. Дело в том, что как движение, так и покой относительны, т.е. состояние движения тела устанавливается лишь относительно других тел. Если таковых тел поблизости нет, то указанные состояния неразличимы. Если относительно одного тела $\vec{V} = 0$, то всегда можно найти такое тело, относительно которого $\vec{V} = const$. Однако так обстоит дело, лишь с точки зрения теории. На практике, в земных условиях, указанные состояния обычно весьма четко различаются, поскольку при движении в малых масштабах оно обычно устанавливается или относительно Земли, или же относительно тел или системы тел, жестко связанных с Землей. Так, движение автомобиля происходит относительно дороги – поверхности Земли и во многих отношениях отличается от состояния покоя (расходом топлива, истиранием протекторов и т. д.). Это же относится и к любой другой машине или механизму. Поэтому состояния покоя и равномерного прямолинейного движения в «земной» механике считаются существенно различными и для описания процессов в состоянии покоя выделяются специальная область механики – статика, изучающая законы равновесия тел (ее основы будут отдельно рассмотрены ниже, в гл. 3, хотя по существу законы статики являются частным случаем законов динамики).

Далее, первый закон Ньютона относится к материальной точке, а не к телу конечных размеров. Как было установлено выше, в гл. 1, коренное отличие такого тела от материальной точки заключается в возможности его вращательного движения вокруг собственной оси при отсутствии внешних воздействий (помимо равномерного прямолинейного поступательного движения). Такая ситуация постоянно встречается в технике. Так, тяжелый маховик двигателя, разогнанный до большой скорости вращения, после его выключения может продолжать по инерции вращение очень долго, если трение в подшипниках вала достаточно мало. Типичным примером этого рода является также суточное вращение Земли (и др. планет), вокруг собственной оси, продолжающееся по инерции без воздействия внешних причин (ввиду отсутствия в Космосе сопротивления этому движению).

Таким образом, законы динамики Ньютона устанавливаются для материальной точки; для построения динамики тела больших размеров его следует рассматривать как систему материальных точек, «скрепленных» между собой более или менее жесткими силами связи. Записывая уравнение динамики для этих отдельных материальных точек и производя, затем, суммирование по всем этим точкам, можно вывести законы динамики движения «большого» тела. Наиболее просто такая программа осуществляется для «абсолютно твердого» тела, частицы которого скреплены «абсолютно жесткими» связями, и будет рассмотрена ниже, в п. 2.2.

Наконец, необходимо учесть, что первый закон Ньютона выполняется

отнодь не во всех системах отсчета, а только в особых «инерциальных» системах, (см. п. 1.1). Существование таких систем постулируется в механике Ньютона и проверяется опытным путем. Как уже указывалось выше, для практических целей в качестве инерциальной системы отсчета можно принять любое тело или любую систему тел, жестко связанную с Землей или же движущуюся относительно Земли прямолинейно и равномерно. Если же система отсчета движется относительно Земли ускоренно, то 1-й закон Ньютона не выполняется. Для того чтобы формально удовлетворить требования закона инерции, в этих системах приходится вводить фиктивные «силы инерции», не связанные с какими-либо материальными взаимодействиями тел (см. п. 3.2). В космических масштабах Земля уже не может служить инерциальной системой отсчета, и поэтому вводятся другие системы, указанные в п. 1.1.

Как будет показано ниже, закон инерции является частным случаем второго закона Ньютона, который можно сформулировать следующим образом: изменение импульса тела (материальной точки) пропорционально силе, действующей на тело, и времени ее воздействия, т. е. импульсу силы. В этой формулировке вводятся основные понятия динамики, смысл которых отнодь не является очевидным.

Под импульсом (количеством движения) тела \vec{P} подразумевается произведение массы тела m на его скорость \vec{V} :

$$\vec{P} = m\vec{V}. \quad (2.1)$$

Импульс силы представляет собой произведение силы на продолжительность ее действия:

$$\Delta\vec{P} = \vec{F}\Delta t. \quad (2.2)$$

Таким образом, второй закон Ньютона может быть представлен в виде:

$$\Delta\vec{P} \equiv \Delta(m\vec{V}) = \vec{F}\Delta t. \quad (2.3)$$

Если сила \vec{F} – переменная величина, то (2.3) следует представить в виде

$$d(m\vec{V}) = \vec{F}dt \quad (2.4)$$

или

$$\frac{d}{dt}(m\vec{V}) = \vec{F}. \quad (2.5)$$

Под силой в классической динамике подразумевается количественная мера взаимодействия тел.

Второй закон Ньютона устанавливает тот фундаментальный факт, что состояние движения тела должно характеризоваться импульсом, скорость изменения которого определяется мерой воздействия других тел. Импульс тела зависит от его массы, которая является «мерой инертности» тела, т. е. его способности реагировать на внешнее воздействие. В классической механике принимается, что масса тела не зависит от состояния его движения: $m = const$. В этом случае (2.5) принимает вид:

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F} \quad (2.6)$$

или

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (2.7)$$

Это выражается следующей формулировкой: ускорение, приобретаемое телом (материальной точкой) под действиями внешней силы, прямо пропорционально этой силе и обратно пропорционально массе тела. Именно в этой формулировке второй закон Ньютона обычно используется при решении различных задач прикладной динамики. В более общей теории – релятивистской динамике, упомянутой выше, используется более общая формулировка (2.5), данная самим Ньютоном.

Из (2.5) следует, что при $\vec{F} = 0$ $m\mathcal{V} = const$ и $\mathcal{V} = const$, т. е. первый закон Ньютона является практически следствием второго. В свою очередь, как будет показано в гл. 4, можно сказать, что 2-й закон Ньютона по существу выражает более фундаментальный закон природы – закон сохранения и превращения энергии – в применении к механическим явлениям. Далее, следует заметить, что равенство $\vec{F} = 0$ вовсе не означает, что на тело не действуют никакие силы. Это равенство может соответствовать и при равновесии сил, приложенных к телу, т. е. означать равенство нулю равнодействующей всех внешних сил. Такая ситуация рассматривается отдельно в статике, как уже упоминалось выше (см. гл. 3). Существенно, что действие на тело системы сил вызывает его более или менее значительную деформацию (т. е. изменение формы или размеров), что зависит от его упругих свойств (о чем более подробно будет сказано ниже, в п. 3.2). Заметим, наконец, что второй закон Ньютона, как и первый, относится к материальной точке. Тело конечных размеров может совершать вращательное движение вокруг собственной оси.

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}. \quad (2.8)$$

За простотой выражения (2.8) скрыто глубокое его содержание. Левая его часть определяет положение материальной точки (или тела, как системы материальных точек) в пространстве через вектор \vec{r} , который однозначно характеризуется его модулем r и направляющими косинусами в декартовых координатах:

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}, \quad \cos(\widehat{r\vec{x}}) = \frac{r_x}{r}, \quad \cos(\widehat{r\vec{y}}) = \frac{r_y}{r}, \quad \cos(\widehat{r\vec{z}}) = \frac{r_z}{r}. \quad (2.9)$$

Любое движение твердого тела можно рассматривать как суперпозицию поступательного и вращательного его движений. В этом случае поступательное движение тела определяется перемещением в пространстве его центра масс (центра инерции), а вращательное – поворотом тела вокруг центра масс.

Положение центра масс в декартовых координатах определяется:

$$x_{\text{ц}} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i x_i}{m}, \quad y_{\text{ц}} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i y_i}{m}, \quad z_{\text{ц}} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i z_i}{m}, \quad m = \sum_{i=1}^n m_i, \quad (2.10)$$

где m_i – масса материальных точек тела (малых областей тела); x_i, y_i, z_i –

координаты этих точек. Если твердое тело неоднородно по плотности, то его можно условно разделить дискретно на n частей с плотностью $\rho_1, \rho_2 \dots \rho_n$ и рассматривать среднее значение плотности:

$$\langle \rho \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{V_i}. \quad (2.11a)$$

Или при непрерывном распределении плотности по объему тела с известным законом распределения $\rho = f(x, y, z)$ ее среднее значение определяется

$$\langle \rho \rangle = \int_V \rho(x, y, z) dx dy dz, \quad m = \langle \rho \rangle V. \quad (2.11b)$$

Правая часть выражения (2.8) характеризует совокупность всех сил, действующих на материальную точку (тело):

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (2.12)$$

Эти силы могут быть различными по абсолютному значению, направлению действия и точке приложения к телу. Определение равнодействующей этих сил осуществляется по правилам геометрического сложения векторов. Для любого перемещения тела необходимо, чтобы равнодействующая сила F_R отличалась от нулевого значения ($F_R \neq 0$). Это означает, что многоугольник сил F_i , образованный по правилам сложения и переноса сил, был не замкнутым. Определение равнодействующей силы F_R осуществляется, как правило, попарным геометрическим сложением сил (рис. 2.1). Так, две силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , действующие по одной линии в одном направлении образуют равнодействующую $\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, а в

противоположных направлениях $\vec{F}_R = |\vec{F}_1 - \vec{F}_2|$, действующую в сторону большей силы. Если же силы образуют угол α между собой, то равнодействующая F_R определяется по правилу параллелограмма:

$$\vec{F}_R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha} \quad (2.13)$$

При действии параллельных сил их равнодействующая проходит через центр этих сил, декартовы координаты которых определяются:

$$x_{ц.с.} = \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i}, \quad y_{ц.с.} = \frac{\sum F_i y_i}{\sum F_i}, \quad z_{ц.с.} = \frac{\sum F_i z_i}{\sum F_i} \quad (2.14)$$

где x_i, y_i, z_i — координаты точек приложения сил.

Переходим к рассмотрению 3-го закона Ньютона, сформулированного следующим образом: действию всегда есть равное и противоположное противодействие. Иначе говоря, силы взаимодействия двух тел равны по величине и противоположны по направлению. Существенно сразу отметить, что эти силы приложены к разным телам и уравниваться не могут; кроме того, эти силы сообщают

взаимодействующим телам ускорения в противоположных направлениях. Учет двух последних обстоятельств позволяет избежать ошибок и

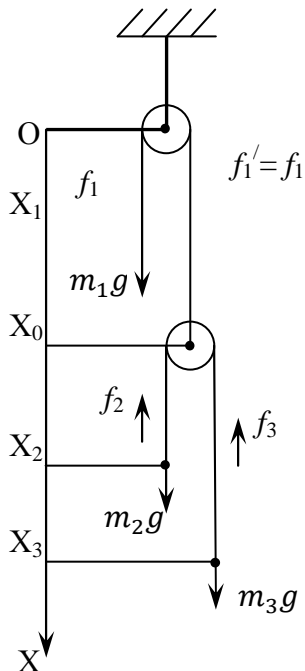


Рис. 2.1

недоразумений при применении законов Ньютона. В некоторых случаях может показаться, что эти следствия 3-го закона Ньютона нарушаются, например, взаимодействующие тела находятся в равновесии или же движутся в одном и том же направлении. Во всех этих случаях следует иметь в виду, что помимо двух указанных сил взаимодействия, на тела могут действовать и другие силы. Наглядным примером такого рода из обыденной жизни является движение телеги по дороге под действием силы тяги лошади. Возникает вопрос, почему именно лошадь тянет телегу, а не наоборот, если силы взаимодействия одинаковы, и почему движение лошади и телеги направлено в одну и ту же сторону? Кроме того, нередко приходится наблюдать случай, когда, несмотря на все усилия со стороны лошади, телега не двигается с места. Не есть ли это признак уравнивания сил взаимодействия «согласно 3-му закону динамики»? Очевидно, что в данном случае имеется система трех тел, т. е. система «лошадь – телега – Земля», в которой действует довольно сложная система из 6 сил. Лошадь упирается копытами в Землю и испытывает равное и противоположное противодействие с ее стороны, создающее силу тяги. Сила тяги передается телеге, которая оказывает равное противодействие, испытываемое лошастью. Наконец, между колесами телеги и Землей всегда существует сила трения (здесь пренебрегаем силой трения на оси колеса), препятствующая движению и приложенная к колесам; соответственно колеса оказывают воздействие на Землю с равной силой, что легко заметить по следу от колес на Земле. Кроме этих основных сил, непосредственно влияющих на состояние движения тел, в данной системе действуют еще силы веса лошади и телеги, вызывающие давление копыт и колес на Землю; если дорога достаточно твердая, то реакция опоры – противодействие со стороны Земли, приложенное к копытам и колесам, уравнивают силы веса, и они оказывают лишь косвенное влияние на состояние движения, определяя величину силы трения в системе. Вся эта довольно сложная система сил должна быть учтена при правильном рассмотрении движения лошади и телеги, что и позволяет ответить на поставленные выше вопросы. Лошадь тянет телегу, а не наоборот, потому, что она может упереться копытами в Землю, создавая силу тяги по нужному направлению движения, в то время как телега такой способностью не обладает. Усилие тяги передается через жесткую систему связей (упряжь) к телеге, создавая движение в нужном направлении. Если сила тяги лошади окажется меньше максимальной силы трения покоя между колесами и Землей (это может иметь место при чрезмерном весе телеги с грузом, поскольку $-F_{тр} = KR_n$, где K – коэффициент трения, R_n – сила нормального давления, равная в данном случае весу телеги с грузом), то телега не сдвинется с места, поскольку усилие тяги, приложенное к лошади, будет уравниваться противодействием со стороны телеги, также приложенным к лошади.

В некоторых «простых» случаях удастся, однако, наблюдать

проявление 3-го закона Ньютона в «чистом» виде. Представим себе мысленно рассмотренную выше систему «лошадь – телега», действующую в Космосе, вдали от небесных тел, в состоянии невесомости. Теперь ситуация существенно изменилась – третьего тела (Земли) нет, и третий закон динамики выступает в «чистом» виде: усилие со стороны лошади, приложенное к телеге (например, отталкивание), вызовет ее движение, но и лошадь придет в движение под действием обратной силы со стороны телеги, причем в противоположном направлении. Ни кажущееся «уравновешивание» этих сил (т. е. состояние покоя), ни движение в одном и том же направлении (именно, это, собственно, и подразумевается, когда говорят, что лошадь «тянет» телегу) в этих условиях наблюдаться не будет. Отсюда, кстати, видно особенность проявления третьего закона Ньютона в Космосе, в частности, при работе космонавтов внутри и вне космического корабля. Даже небольшое усилие со стороны космонавта (например, легкий удар в стенку корабля) может вызывать противодействие, достаточное для перемещения невесомого космонавта на значительное расстояние.

Третий закон Ньютона является по существу следствием одного из важнейших, всеобщих законов материального мира – закона сохранения импульса.

Три основных закона сохранения – импульса, энергии (см. п. 4.3) и момента импульса (см. п. 2.2) – отражают коренные свойства пространства и времени – однородность времени и однородность и изотропность пространства. А именно, закон сохранения импульса отражает однородность пространства, т. е. «одинаковость» его свойств в различных точках, и формируется следующим образом: в замкнутой системе тел (не взаимодействующих с окружающими телами) суммарный импульс этих тел не изменяется при любых процессах, происходящих в системе. То есть

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{V}_i = const, \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{V}_i = 0. \quad (2.15)$$

В частности, для системы из двух взаимодействующих тел имеем:

$$\frac{d}{dt} (m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2) = 0. \quad (2.16)$$

Отсюда следует, что

$$m_1 \frac{d\vec{V}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{V}_2}{dt} = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 \quad (2.17)$$

или

$$\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}, \quad (2.18)$$

где

$$\vec{f}_{12} = m_1 \vec{a}_1, \quad \vec{f}_{21} = m_2 \vec{a}_2. \quad (2.19)$$

Равенство (2.18) и является математической формулировкой третьего закона динамики.

Закон сохранения импульса имеет важнейшее значение не только как фундаментальный закон природы, но и как средство решения многочисленных задач теории и практики; он применяется, в частности, при

выводе законов упругого и неупругого столкновения тел (см. п. 4.5), законов отражения и т. д.

Очень важную роль играет закон сохранения импульса и при выводе основных законов реактивного движения (см. п. 2.4). Здесь мы отметим еще одно важное следствие этого закона: из (2.15) следует, что при $m_i = \text{const}$ (твердое тело или тела)

$$\frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{V}_i = \sum_i m_i \frac{d\vec{V}_i}{dt} = \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_{ik} \vec{f}_{ik} = 0, \quad (2.20)$$

где \vec{f}_{ik} – внутренние силы взаимодействия между телами в системе (в частности, между материальными точками, образующими твердое тело – см. ниже, п. 2.2). Отсюда видно, что только за счет внутренних сил полный импульс системы не может измениться. Это означает, что если система в начальный момент покоится, то без внешних воздействий она и дальше будет покоиться при любых происходящих в ней внутренних процессах. Если, например, в результате взрыва тела ее частицы разлетаются в разные стороны с самыми различными скоростями, то центр масс всех частиц (см. ниже п. 2.2) сохраняет состояние движения тела перед ее разрывом. Аналогичным образом объясняется, например, откат орудия (и вообще отдача оружия) при стрельбе и многие другие подобные явления.

Значение законов классической динамики очень велико, поскольку им подчиняется огромное большинство механических процессов, с которыми приходится встречаться в земных условиях (примеры еще будут рассмотрены ниже). Однако, как уже упоминалось выше, в определенных условиях они могут «не сработать». Принципиально неверно без корректировки применять их, например, для объяснения процессов атомных масштабов ($\leq 10^{-10}$ м) и быстрых временных процессов (т.е. протекающих со скоростями, близкими к скорости света). Обобщение законов динамики на эти случаи будут рассмотрены в дальнейшем.

2.2 Динамика твердого тела

В п. 1.3 была рассмотрена кинематика твердого тела и показано, что сложное движение тела может быть представлено в виде «суммы» поступательного и вращательного движений. Выясним теперь результат действия сил, приложенных к твердому телу, т.е. динамику его движения. Рассмотрим, например, маховик, насаженный на вал, который может совершать движение, поскольку цапфа вала находится в опорах подшипников (рис. 2.2). Пусть на маховик действуют различные силы ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$), как показано на рис. 2.2. Силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 в отдельности способны вызывать вращение маховика (причем во взаимнопротивоположных направлениях), а сила \vec{F}_3 может вызвать лишь деформацию вала, удерживающего маховик. Причина такого различия заключается в том, что линии действия сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 не проходят через ось вращения – они проходят на некоторых расстояниях h_1 и h_2 от нее, в то время как линия действия силы

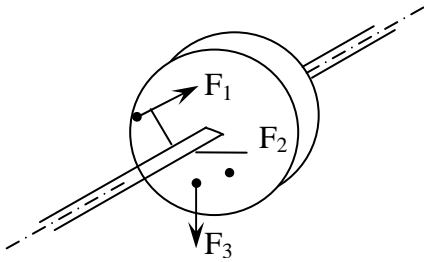


Рис. 2.2

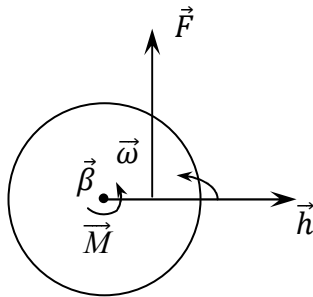


Рис. 2.3

\vec{F}_3 проходит через ось вращения ($h_3 = 0$).

Произведение Fh образует численную величину момента силы M ; в векторной форме момент силы определяется как

$$\vec{M} = [\vec{h}\vec{F}]. \quad (2.21)$$

Смысл этого определения ясен из рис. 2.3: вектор \vec{M} направлен по оси вызываемого им вращения тела, т.е. совпадает по направлению с векторами углового ускорения $\vec{\beta}$ (см. ниже), который в данном случае совпадает с вектором угловой скорости $\vec{\omega}$. Если же на тело действует система сил таким образом, что векторная сумма моментов сил равна нулю ($\sum \vec{M}_i = 0$), то вращение тела не возникает.

Если сила действует на маховик в произвольном направлении, то ее можно разложить на составляющие; параллельную и перпендикулярную плоскости вращения. Если параллельная составляющая F_{\parallel} имеет плечо, т. е. создает момент, как показано на рис. 2.4, то возникает вращение маховика; перпендикулярная составляющая F_{\perp} может создать лишь деформацию вала и самого маховика.

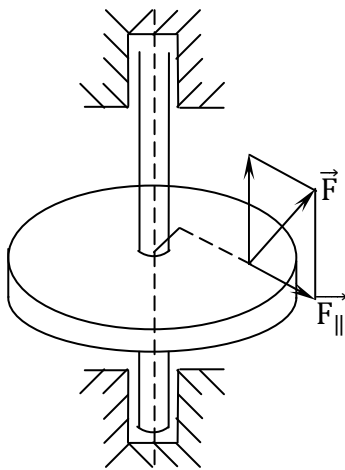


Рис. 2.4

Таким образом, под действием момента силы первоначально неподвижное тело ($\omega_0 = 0$) приобретает некоторую угловую скорость $\omega \neq 0$, некоторое угловое ускорение (β). Соотношение между величинами M и β называется основным уравнением динамики вращательного движения твердого тела и находится следующим образом.

Твердое тело разбивается на материальные точки с массой Δm_i , так что $\sum_i \Delta m_i = M$ (масса тела), находящиеся на расстояниях r_i от оси вращения. Каждая материальная точка находится под воздействием внешних сил f_i и внутренних сил f_i' со стороны других материальных точек тела.

Однако суммарное действие внутренних сил f_i' в любой замкнутой системе на состояние ее движения равно нулю, поскольку, согласно третьему закону Ньютона, каждой силе \vec{f}_{ik}' со стороны i -ой частицы на k -ю частицу соответствует равная и противоположно направленная сила со стороны k -ой частицы на i -ю: $\vec{f}_{ki}' = -\vec{f}_{ik}'$; $\vec{f}_{ki}' + \vec{f}_{ik}' = 0$. При действии только внешних сил, уравнение второго закона Ньютона для i -й материальной точки можно

записать в виде:

$$\Delta m_i a_{ti} = f_{it}. \quad (2.22)$$

При этом учитывается только тангенциальная составляющая внешней силы f_{it} (рис. 2.5), поскольку плечо нормальной составляющей силы f_{in} равно 0, и она не вызывает вращение тела.

Учитывая формулу (1.43), перепишем (2.22) в виде:

$$\Delta m_i r_i \beta = f_{it} \quad (2.23)$$

или

$$\Delta m_i r_i^2 \beta = f_{it} r_i = M_i, \quad (2.24)$$

поскольку r_i является плечом для касательной силы f_{it} .

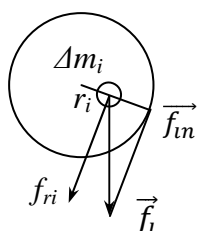


Рис. 2.5

Учитывая, что угловое ускорение $\beta = \frac{d\omega}{dt}$ одинаково для всех точек твердого тела, суммируя по всем N материальным точкам тела и вводя обозначения

$$\sum_{i=1}^N \Delta m_i r_i^2 = I, \quad \sum_{i=1}^N M_i = M \quad (2.25)$$

окончательно получим:

$$I\beta = M. \quad (2.26)$$

Отсюда следует в векторной форме для углового ускорения:

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{M}}{I}. \quad (2.27)$$

Вектор \vec{M} представляет собой результирующий момент всех внешних сил, действующих на тело; скалярная величина I называется моментом инерции тела и может быть вычислена для ряда тел простой геометрической формы (см. ниже).

В каждом твердом теле можно выделить единственную точку – центр инерции или центр тяжести тела, обладающую следующим свойством: равнодействующая параллельных сил тяготения, действующих на все материальные точки тела (или любых иных сил, пропорциональных массе частиц, на которые они действуют – «массовых сил») проходит через центр тяжести тела независимо от его положения в пространстве. Отсюда следует, что если укрепить тело в его центре тяжести, то оно будет находиться в

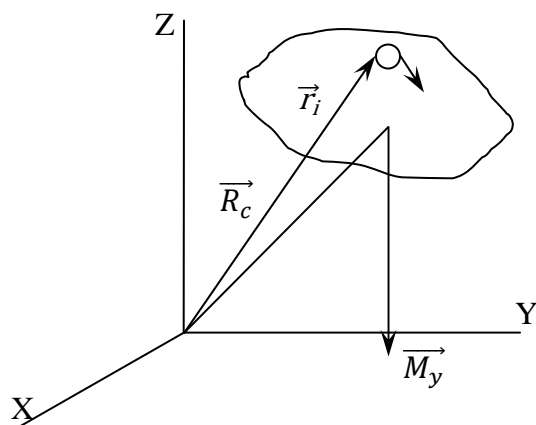


Рис. 2.6

безразличном равновесии, т. е. при любых положениях тела (поворотах относительно оси, проходящей через центр тяжести). С другой стороны, если подвесить тело за любую из его точек, то линия отвеса (вертикальная линия) будет проходить через эту точку и центр тяжести (инерции) тела. Координаты центра тяжести (X_c, Y_c, Z_c), или компоненты его радиус-вектора \vec{R}_c (рис. 2.6) определяются по формулам:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^N \Delta m_i x_i}{M}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^N \Delta m_i y_i}{M}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^N \Delta m_i z_i}{M}. \quad (2.28)$$

Если твердое тело покоится относительно некоторой ускоренно движущейся системы отсчета (с ускорением \vec{a} относительно инерциальной системы), то в ней действуют силы инерции $\vec{f}_i = -m_i \vec{a}$, равнодействующая которых будет приложена в центре тяжести тела; этим объясняется второе название этой точки – центр инерции «центр масс»). Если тело закрепить в центре инерции относительно этой (употребляется и третье название этой же точки) системы отсчета, то оно будет находиться в безразличном равновесии относительно любого поворота и, следовательно, будет двигаться относительно инерциальной системы «чисто-поступательно» (тенденция к повороту отсутствует). При этом ускорения всех материальных точек и их траектории одинаковы.

Этот вывод обобщается на случай свободно движущегося твердого тела следующим образом: под действием внешней силы, приложенной в центре инерции (или если линия действия силы проходит через центр инерции), тело движется поступательно. Если же сила \vec{F} , приложена не в центре тяжести, то тело будет совершать сложное движение с вращением. Однако и в этом случае центр инерции будет двигаться с ускорением $\vec{a} = \vec{F}/M$, как при поступательном движении. Таким образом, мы приходим к

фундаментальному закону динамики твердого тела: центр инерции тела движется по тому же закону, что и материальная точка, в которой сосредоточена вся масса тела, к которой приложена равнодействующая всех внешних сил, действующих на тело. В количественной форме этот закон записывается аналогично второму закону Ньютона для материальной точки:

$$m \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{F}, \quad (2.29)$$

где \vec{v}_c – скорость движения центра инерции тела.

Закон движения центра масс можно применять не только к монолитному твердому телу, но и к любой системе материальных точек (например, к разорвавшемуся телу, см. выше п. 2.1). Заметим далее, что при равенстве нулю равнодействующей внешних сил тело может совершать лишь вращательное движение. Простейшим случаем такого рода является пара сил, т. е. совокупность двух равных параллельных и противоположно направленных сил, не проходящих через центр инерции тела. Она создает момент, равный произведению величины силы на расстояние между ними (если же эти силы проходят через центр инерции, то их действие взаимно компенсируется, и тело остается в покое). Ясно, что под действием пары сил возникает вращение относительно оси, проходящей через центр инерции (который при этом остается неподвижным), независимо от того, в каком месте тела приложена пара сил. Исходя из этого, можно показать, что под действием одной силы \vec{F} , приложенной к некоторой произвольной точке тела, тело приобретает поступательное движение, с ускорением одинаковым

для всех точек и равным $\bar{a} = F/M$, и вращательное движение с угловым ускорением $\vec{\beta} = \frac{\vec{M}}{I}$ относительно оси, проходящей через центр масс (I-момент инерции тела относительно этой оси).

Введем теперь суммарный момент количества движения (момент импульса) вращающегося твердого тела, равный (см. формулу (1.42)):

$$L = \sum_{i=1}^N \Delta m_i v_i r_i = \sum_{i=1}^N \Delta m_i r_i^2 \omega = I\omega. \quad (2.30)$$

При $I = \text{const}$ $dL/dt = I \frac{d\omega}{dt} = I\beta$, и закон динамики вращательного движения (2.26) можно записать в виде:

$$\frac{dL}{dt} = M. \quad (2.31)$$

Если же $M = 0$, то $\frac{dL}{dt}$ и $L = \text{const}$. В векторной форме этот закон сохранения момента количества движения (момента импульса) вращающегося тела записывается в виде:

$$I\vec{\omega} = \text{const}. \quad (2.32)$$

Отсюда следует, что при отсутствии внешних сил (свободное вращение тела) $\omega = \text{const}$, т.е. угловая скорость остается неизменной по величине и по направлению (ориентация оси вращения не изменяется). В этом заключается природа гироскопических эффектов (см. ниже, п. 2.3). Отметим, что именно в существовании этого закона заключается уже отмечавшееся выше коренное различие между материальной точкой и твердым телом конечных размеров: в отсутствие внешних сил материальная точка движется прямолинейно и равномерно, в то время как твердое тело может совершать и вращательное движение с постоянной угловой скоростью относительно оси, проходящей через его центр инерции. Эти закономерности лежат в основе огромного количества практических приложений, некоторые из которых будут рассмотрены ниже в этой главе.

Закон сохранения момента импульса является одним из трех фундаментальных законов природы («законов сохранения», упомянутых выше) и отражает изотропность пространства, т. е. одинаковость его физических свойств по разным направлениям.

Кинетическая энергия вращательного движения тела E_e складывается из кинематической энергии материальных точек, образующих тело.

Используя формулу (1.42), получим выражение для E_e следующим образом:

$$E_e = \sum_{i=1}^N \frac{\Delta m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^N \frac{\Delta m_i (\omega r_i)^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^N \Delta m_i r_i^2 = \frac{I\omega^2}{2}. \quad (2.33)$$

Работа внешних сил при повороте (например, маховик радиуса R) тела на угол $d\varphi$ равна:

$$dA = F_t dS = F_t R d\varphi = M d\varphi. \quad (2.34)$$

Эта работа при вращательном движении затрачивается на увеличение кинетической энергии тела (2.33), поэтому можно записать:

$$Md\varphi = d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right). \quad (2.35)$$

При повороте на конечный угол за время t имеем:

$$\int_0^t Md\varphi = \left(\frac{I\omega^2}{2}\right)_t - \left(\frac{I\omega^2}{2}\right)_0. \quad (2.36)$$

Это выражение используется при решении различных задач технической механики, связанных с вращением элементов машин и механизмов.

Во всех перечисленных выше случаях для проведения расчетов необходимо знать момент инерции тела 1. Для тел сравнительно простой геометрической формы эта величина может быть найдена расчетным путем. В частности, для полого цилиндра с внутренним радиусом R_1 и внешним радиусом R_0 $I = I/2M(R_0^2 + R_1^2)$ (M – здесь и ниже – масса тела). Частными

случаями этого общего выражения являются сплошной цилиндр-диск ($R_1 = 0, I = I/2 MR_0^2$) и обруч-кольцо ($R_0 \approx R_1, I = MR^2$). Заметим, что во втором случае момент инерции в 2 раза больше, и, соответственно, будет во сколько же раз больше и кинетическая энергия вращающегося тела. Это означает, что на разгон или остановку маховика с массой, распределенной по ободу, требуется затратить большую работу, чем в случае маховика с массой, распределенной равномерно по радиусу (при заданной угловой скорости вращения). Для конуса с радиусом основания R_0 $I = 3/10 MR_0^2$; для шара $I = 2/5 MR_0^2$.

Все эти формулы относятся к случаю, когда ось вращения проходит через центр инерции тела. Однако на практике возможны случаи, когда ось вращения проходит на некотором расстоянии a от этого центра (например, эксцентриковые механизмы). В этих случаях для вычисления момента инерции используется теорема Штейлера (или теорема Гюйгенса): момент инерции тела I относительно оси, проходящей на расстоянии a от центра инерции, равен:

$$I = I_0 + Ma^2, \quad (2.37)$$

где M – масса тела, I_0 – момент инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр инерции. Например, для момента инерции цилиндра относительно оси, проходящей по его образующей, находим:

$$I = \frac{1}{2}MR_0^2 + MR_0^2 = \frac{3}{2}MR_0^2. \quad (2.38)$$

Отметим еще одно важное соотношение, определяющее кинетическую энергию тела, совершающего одновременно поступательное и вращательное движение. Для плоского движения, введя скорость движения центра инерции тела V_0 и угловую скорость вращения ω_0 относительно оси, проходящей через центр инерции, можно получить формулу

$$E = E_n + E_b = \frac{MV_0^2}{2} + \frac{I\omega_0^2}{2}. \quad (2.39)$$

Так, для цилиндра, показанного на рис. 1.22а, $V_0 = \omega_0 R$, $I = I/2 MR^2$, и формула (2.39) принимает вид:

$$E = \frac{3}{4} M \mathcal{V}_0^2. \quad (2.40)$$

Возьмем теперь полый цилиндр с $R_I \approx R_0$ той же массы; для него формула (2.39) примет вид:

$$E = M \mathcal{V}_0^2. \quad (2.41)$$

Если же цилиндр поместить на наклонную плоскость высотой H , то оба они будут иметь одинаковую потенциальную энергию MgH , которая после скатывания перейдет в кинетическую энергию. Ясно, что величина \mathcal{V}_0 для сплошного цилиндра будет больше (в $\sqrt{\frac{4}{3}}$ раза), чем для полого цилиндра, и он скатится раньше.

Аналогичный «энергетический» подход может использоваться и при решении ряда других задач.

В заключение заметим, что между параметрами и формулами поступательного и вращательного движений существуют формальные аналогии. Так, массе m , силе F , перемещению S , линейной скорости \mathcal{V} , ускорению a , количеству движения $m\mathcal{V}$, импульсу силы Ft в поступательном движении их аналогами при вращательном движении являются соответственно: момент инерции I , момент силы M , угловой поворот φ , угловая скорость ω , угловое ускорение β , момент количества движения $M\omega$, момент импульса силы Mt . Аналогии соответствующих формул поступательного и вращательного движений показаны в таблице.

№	Формулы поступательного движения	Формулы вращательного движения
1.	$S = \mathcal{V}t$	$\varphi = \omega t$
2.	$S = \mathcal{V}_0 t \pm \frac{at^2}{2}$	$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\beta t^2}{2}$
3.	$\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 \pm at$	$\omega = \omega_0 \pm \beta t$
4.	$F = ma$	$M = I\beta$
5.	$A = FS$	$A = M\varphi$
6.	$N = F\mathcal{V}$	$N = M\omega$
7.	$E = \frac{m\mathcal{V}^2}{2}$	$E = \frac{I\omega^2}{2}$

2.3 Динамика механических систем

Задача исследования динамического поведения механических систем обычно сводится к задаче статики путем использования принципа Даламбера: активная (движущаяся) сила \vec{P}_a , сила реакции связи \vec{P}_r , приложенные к движущейся материальной точке в твердом теле, в любой момент времени «уравновешиваются» силой инерции \vec{P}_i , равной $-m\vec{a}$, где m – масса, \vec{a} – ускорение материальной точки:

$$\vec{P}_o + \vec{P}_r + \vec{P}_i = 0. \quad (2.42)$$

Соответственно вводится момент сил инерции, равный моменту сил, действующих на тело с обратным знаком:

$$M_o + M_i = 0 \quad M_i = -I\beta, \quad (2.43)$$

где I – момент инерции, β – угловое ускорение тела (при его вращении). При использовании этого принципа кинематическое исследование механизмов отличается от статического исследования только учетом сил и моментов сил инерции, а движение геометрически изменяемой системы (механизма) может быть описано уравнением типа (2.42), если условие сосредоточить (привести) к тому или иному выделенному звену механизма массы, силы или моменты сил прочих звеньев. Чаще всего таким звеном является ведущее звено механизма. Такая замена сил и моментов, рассредоточенных по звеньям механизма, приведенной силой или моментом на ведущем звене допустима лишь в предположении равенства мощности N_{π} , развиваемой приведенной силой или моментом, сумме мощностей приведенных сил или моментов N_i :

$$N_{\pi} = \sum_{i=1}^n N_i. \quad (2.44)$$

Поскольку мощность, развиваемая силой P при перемещении тела со скоростью V , равна $N = PV$ (если направления силы и перемещения совпадают), а мощность момента силы M при вращении тела со скоростью ω равна $N = M\omega$, то для приведенной силы и приведенного момента имеем, соответственно:

$$P_n = \frac{\sum_{i=1}^n N_i}{V_n}, \quad M_n = \frac{\sum_{i=1}^n N_i}{\omega_n}, \quad (2.45)$$

где V_n и ω_n – линейная и угловая скорости точки n -звена приведения соответственно. Если в составе механизма имеются звенья, совершающие сложное движение, то согласно сформулированному выше принципу сложения движений и скоростей ($\vec{V}_{\text{абс}} = \vec{V}_{\text{пер}} + \vec{V}_{\text{отн}}$) выражение для P_n и M_n принимает вид:

$$P_n = \sum_{i=1}^n P_i \frac{V_i \cos \alpha_i}{V_n} + \sum_i M_i \frac{\omega_i}{\omega_n}, \quad M_n = \sum_{i=1}^n P_i \frac{\omega_i \cos \alpha_i}{\omega_n} + \sum_i M_i \frac{\omega_i}{\omega_n}. \quad (2.46)$$

При этом отношение скоростей определяется передаточным отношением от i -го звена к звену приведения для данного конкретного механизма. Приведенный момент или приведенная сила соответственно равна уравновешивающему моменту или уравновешивающей силе.

При исследовании кинестатики механизмов удобно использовать графическую интерпретацию принципа возможных перемещений, который утверждает, что если на какую-либо механическую систему действует несколько сил, то сумма элементарных работ $dA = P \cos \alpha dS$ при возможных для данной системы перемещениях под действием заданных сил и сил инерции должна равняться нулю:

$$\sum_{i=1}^n P_i dS \cos \alpha = 0. \quad (2.47)$$

Рассмотрим интерпретацию этого принципа на примере кривошипно-шатунного механизма (рис. 2.7). Кинематика и статика кривошипно-

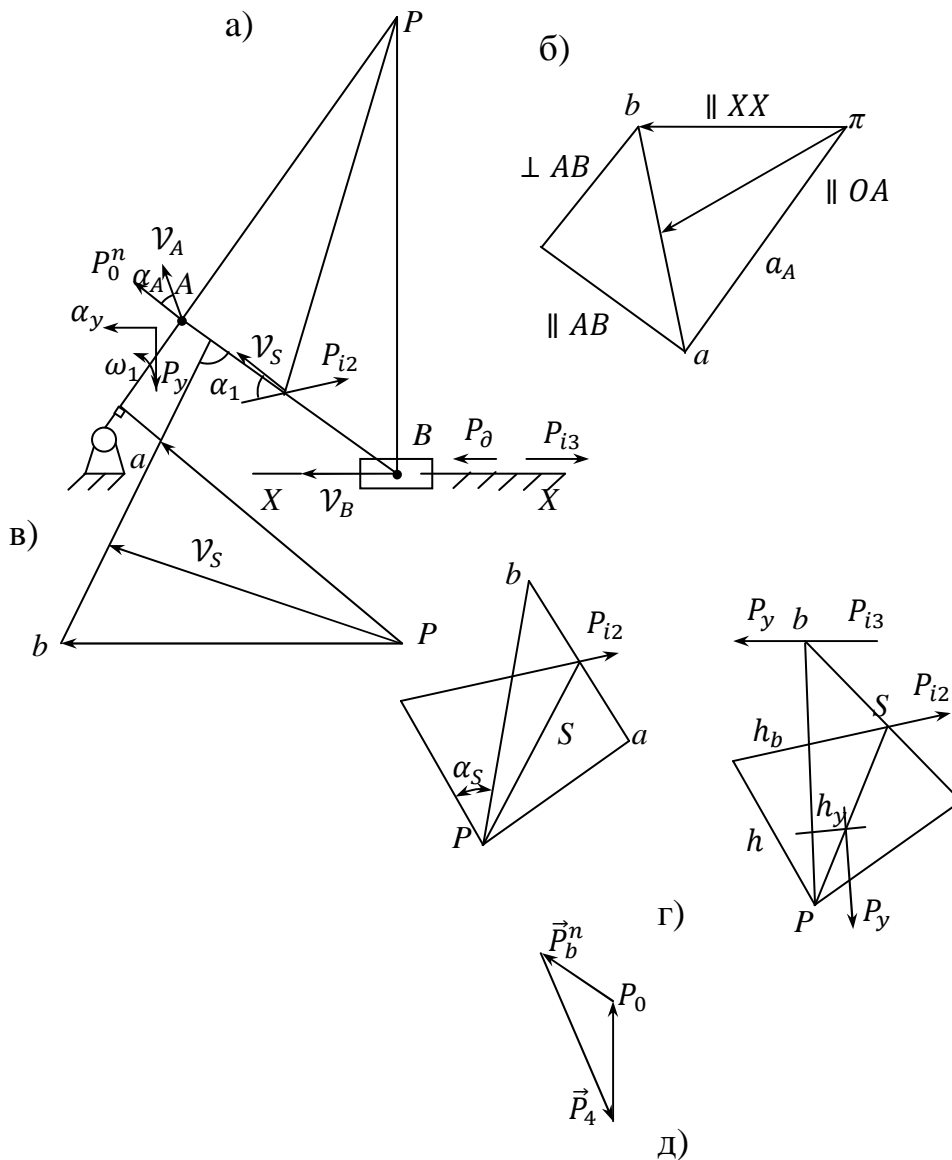


Рис. 2.7

шатунного механизма исследовалась выше. На звено I (кривошип) действует уравновешивающая сила P_y . В центре тяжести S звена 2 (шатунa) действует сила инерции:

$$P_{i2} = -ma_S, \quad (2.48)$$

где m – масса звена, a_S – ускорение центра тяжести, определяемое с помощью плана ускорений (рис. 2.7 б). Сила P_{i2} и линейная скорость центра тяжести v_S звена 2 образуют угол α_S . Из плана скоростей (рис. 2.7 в) и сил (рис. 2.7 б) видно, что скорость v_B точки В и действующая сила P_∂ , действующая на ползун, совпадают по линии действия, как и сила P_{i3} инерции ползуна 3. Таким образом, уравнение (2.47) принимает вид:

$$-P_y dS_y \cos \alpha_y - P_{i2} dS_2 \cos \alpha_S + P_\partial S_B - P_{i3} dS_B = 0. \quad (2.49)$$

Рассмотрим теперь этот принцип применительно к точке S звена 2. Элементарная работа силы P_i равна:

$$dA_{i2} = -P_{i2}dS_2\cos\alpha_S. \quad (2.50)$$

Поскольку $dS_2 = \mathcal{V}_S dt$, то

$$dA_{i2} = -P_{i2}\mathcal{V}_S\cos\alpha_S dt. \quad (2.51)$$

При повороте плана скоростей на 90° (рис. 2.7 г) получается фигура подобная фигуре $P_a S_b$, показанной на рис. 2.7 а. Поэтому в точке S (рис. 2.7 г) можно приложить силу P_{iS} . Теперь опустим перпендикуляр h из полюса P повернутого плана скоростей на линию действия силы P_{i2} . Скорость точки S равна

$$\mathcal{V}_S = \overrightarrow{PS}\mu_\nu, \quad (2.52)$$

где \overrightarrow{PS} – отрезок с плана скоростей, $\mu_\nu = \frac{\omega^{(OA)}}{P_a}$ – масштаб плана скоростей.

Следовательно,

$$dA_{i2} = -P_{i2}\overrightarrow{PS}\cos\alpha_S\mu_\nu dt. \quad (2.53)$$

Поскольку $\overrightarrow{PS} = \frac{h}{\cos\alpha_S}$, то

$$-dA_{i2} = -P_{i2}h\mu_\nu dt. \quad (2.54)$$

Произведение $P_{i2}h$ представляет собой момент силы P_{i2} относительно полюса плана скоростей $M_P(P_{i2})$, поэтому:

$$dA_{i2} = M_P(P_{i2})\mu_\nu dt. \quad (2.55)$$

Таким образом, элементарная работа силы, действующей на звено механизма, пропорциональна моменту этой же силы, перенесенной в соответственную точку плана, относительно полюса скоростей; уравнение (2.47) принимает вид:

$$\mu_\nu dt \sum_{i=1}^n M_P = 0 \text{ или т.к. } \mu_\nu dt \neq 0, \text{ то } \sum_{i=1}^n M_P = 0. \quad (2.56)$$

Это – интерпретация принципа возможных перемещений по методу жесткого рычага Н.Е. Жуковского.

Применительно к кривошипно-шатунному механизму (рис. 2.7 д) уравнение (2.56) раскрывается следующим образом:

$$M_P(P_\partial) - M_P(P_{i3}) + M_P(P_{i2}) + M_P(P_4) \quad (2.57)$$

или

$$-P_\partial h_b + P_{i3}h_b + P_{i2}h + P_y h_y = 0. \quad (2.58)$$

Отсюда определяется уравновешивающая (приведенная) сила:

$$P_y = \frac{1}{h_y} (P_\partial h_b - P_{i3}h_b - P_{i2}h). \quad (2.59)$$

Согласно формуле (2.45), приведенный момент трения механизма равен

$$M_{\text{тп}} = \frac{\sum_{i=1}^n N_{\text{т}i}}{\omega_{\text{п}}}, \quad (2.60)$$

где $N_{\text{т}i}$ – мощность трения в i -й кинематической паре. Например, момент трения, приведенный к звену I (рис. 2.7а), равен:

$$M_{\text{тп}} = \frac{P_B f_b y_b + P_b f_b r_b \omega_b + P_A f_A \omega_A r_A + P_0 f_0 \omega_1}{\omega_t}, \quad (2.61)$$

где P_B, P_b, P_A, P_0 – давление ползуна 3 на направляющую и давление в шарнирах В, А, О, соответственно; f_b, f_A, f_0 – коэффициенты трения в кинематических парах; $V_B = \overline{V_B \mu_V}$ (см. рис. 2.7 в) – скорость ползуна; $\omega_b, \omega_A, \omega_1$ – относительные угловые скорости в кинематических парах.

Для определения приведенного момента инерции I_n этого механизма (рис. 2.7 а) воспользуемся выражением для кинетической энергии сложного поступательно-вращательного движения:

$$E = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{mV_{ц}^2}{2}, \quad (2.62)$$

где $V_{ц}$ – линейная скорость центра тяжести тела, I – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр тяжести. Применительно к данному механизму (2.62) принимает вид:

$$E = \frac{I_1\omega_1^2}{2} + \frac{I_2\omega_2^2}{2} + \frac{m_2V_{ц2}^2}{2} + \frac{m_3V_3^2}{2}, \quad (2.63)$$

где I_1, I_2 – собственные моменты инерции звеньев, ω_1, ω_2 – угловые скорости звеньев 1 и 2, $V_{ц2}$ и V_3 – линейная скорость центра тяжести звена 2 и звена 3, соответственно, m_2, m_3 – массы звеньев 2 и 3.

Звенья механизма в данном примере совершают вращательное (1), сложное плоское (2) и поступательное (3) движения, энергии которых входят слагаемыми в (2.63). Пусть звеном приведения будет звено 1 с кинетической энергией $E = I\omega^2/2$. Тогда для приведенного момента инерции механизма, согласно (2.63), имеем:

$$I_n = I_1 + I_2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 + m_2 \left(\frac{V_{ц2}}{\omega_1} \right)^2 + m_3 \left(\frac{V_3}{\omega_1} \right)^2. \quad (2.64)$$

С учетом плана скоростей, показанного на рис. 2.7 в и введя в уравнение (2.63) квадрат линейной скорости V_A точки приведения А ведущего звена механизма 1 (рис. 2.7 а), получим выражение для приведенной к этой точке массы механизма ($m_n = E: \left(\frac{V_A^2}{2} \right)$)

$$m_n = I_1 \left(\frac{\omega_1}{V_A} \right)^2 + I_2 \left(\frac{\omega_2}{V_A} \right)^2 + m_2 \left(\frac{V_{ц2}}{V_A} \right)^2 + m_3 \left(\frac{V_3}{V_A} \right)^2. \quad (2.65)$$

Задача динамического исследования механизмов сводится, в конечном счете, к исследованию динамики его звена приведения. При этом уравнение движения может быть записано в форме уравнений работ или в форме уравнений моментов. В самом общем виде уравнение баланса работ для механизма имеет вид:

$$A_d - A_{nc} - A_{bc} = 0, \quad (2.66)$$

где A слагаемые в левой части характеризуют работы движущих сил A_d , сил полезных A_{nc} и вредных сопротивлений A_{bc} , соответственно. Это уравнение позволяет рассматривать кинематику различных механизмов при конкретном учете действующих сил. При этом следует учитывать, что работы движущих сил и сил сопротивления совпадают лишь за полный период работы механизма. В пределах цикла моменты движущих сил и сил сопротивления, вообще говоря, неодинаковы, поскольку для передачи движения от ведущего

звена к звеньям, воспринимающим силы сопротивления, требуется определенное время.

Рассмотрим применение уравнения (2.66) для определения скоростей и ускорений в системе, в которой действуют движущие силы с моментом M_∂ и силы сопротивления с моментом M_c , причем звено приведения совершает вращение с углом поворота $\varphi(t)$, принимая в некоторый момент времени максимальное значение φ_{max} , а момент сил трения достигает при этом максимального значения M_{cmax} . В этом случае уравнение баланса работ (2.66) движущих сил A_∂ и сил сопротивления A_c за один цикл принимает вид:

$$M_\partial \varphi_{max} = \frac{M_{cmax} \varphi_{max}}{2}, \quad (2.67)$$

откуда $M_{cmax} = 2M_\partial$. В пределах цикла

$$M_\partial \varphi - M_{cср} \varphi = \frac{I \omega^2}{2} - \frac{I \omega_0^2}{2}, \quad (2.68)$$

где $M_{cср}$ – среднее значение момента сил сопротивления при изменении угла поворота от начального значения φ_0 до φ_1 (φ – значение текущее угла), I – приведенный момент инерции механизма, определяемый формулой (2.64), ω и ω_0 – значения угловой скорости вращения звена приведения при углах φ и φ_0 . Среднее значение момента сопротивления равно $M_{cср} = 1/2(M_{c0} + M_{c\varphi})$, где M_{c0} и $M_{c\varphi}$ – соответствуют углам φ_0 и φ . При $\omega_0 = 0$, $M_{c0} = 0$, $M_{cср} = 1/2 M_{c\varphi}$. При пропорциональном изменении M_c с углом φ имеет место $M_{c\varphi} = \varphi M_{cmax} / \varphi_{max}$. Тогда $M_{cср} = 1/2 \varphi M_{cmax} / \varphi_{max} = M_\partial \varphi / \varphi_{max}$.

Подставляя это в уравнение (2.68) с учетом $\omega_0 = 0$. Находим:

$$2M_\partial \varphi - \frac{2M_\partial}{\varphi_{max}} \varphi^2 = I \omega^2. \quad (2.69)$$

Отсюда угловая скорость вращения звена приведения равна:

$$\omega = \sqrt{\frac{2M_\partial \varphi}{I} \left(1 - \frac{\varphi}{\varphi_{max}}\right)}. \quad (2.70)$$

Дифференцируя почленно уравнение (2.69) по t после некоторых преобразований находим угловое ускорение звена приведения:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{M_\partial}{I} \left(1 - \frac{2\varphi}{\varphi_{max}}\right). \quad (2.71)$$

Тем самым поставленная задача исследования кинематики механизма решена на основе уравнения динамики (2.66).

При наличии внешней движущей силы $P_\partial(t)$, зависящей от времени по некоторому закону $f(t)$, уравнение динамики можно записать с использованием кинетической (E) и потенциальной (Π) энергий в форме уравнения Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{S}} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial S} = f(t), \quad (2.72)$$

где S – перемещение точки (звена) приведения.

Выражение для E и Π принимают тот или иной конкретный вид для заданного механизма. Так, для толкателя ведущего звена кулачкового механизма (рис. 2.7):

$$E = \frac{m v^2}{2}. \quad (2.73)$$

где m и \dot{y} – масса и скорость толкателя, соответственно.

Для потенциальной энергии можно написать (используя выражения для силы упругости $P=cx$ и потенциальной энергии тела на высоте h , $\Pi=Ph$):

$$\Pi = \int_{(y)} [-mg + C(y_0 + y)] dy, \quad (2.74)$$

где C – жесткость пружины толкателя (силового замыкателя механизма), y_0 и y – начальное натяжение пружины и ее осадка при перемещении толкателя. Тогда, учитывая, что в данном случае $dS=dy$, из уравнения (2.72) получим:

$$m\ddot{y} - mg + C(y_0 + y) = f(t). \quad (2.75)$$

Это уравнение динамики механизма является формальным аналогом уравнения динамики материальной точки (см. ниже п. 3.2), написанного на основании принципа Даламбера. Величина $m\ddot{y}$ представляет собой здесь силу инерции механизма, приведенную к толкателю, mg есть сила реакции (веса), как и сила жесткости пружины $C(y_0 + y)$, которые определяют ограничения, наложенные на систему, а $f(t)$ есть движущая (обобщенная) сила.

В этом приведении уравнения механизма к соответствующему уравнению для материальной точки и заключается смысл процедуры приведения сил и моментов к одному звену механизма, описанной выше.

В качестве примера рассмотрим динамику одного из распространенных механизмов – гироскопа, устройство которого схематически представлено на рис. 2.8. Массивный диск 1 устанавливается в кардановом подвесе, состоящем из кольца 2, несущего опоры диска 1, и кольца (или полукольца) 3, несущего опоры полуосей кольца 2. Оси диска 1 и кольца 2 находятся в одной плоскости и образуют между собой угол 90° . Обе эти оси вместе с осью вращения кольца 3 пересекаются в центре тяжести диска 1. Кардановый подвес позволяет оси диска (гироскопа) свободно поворачиваться вокруг трех пространственных осей, занимая произвольное положение в пространстве (свободный гироскоп). При изменении положения подставки гироскопа 4 в пространстве диск 1, вращающийся с угловой скоростью ω_2 , остается в неизменном положении. Это обусловлено малостью сил трения в опорах, которые могли бы повлиять на положение оси гироскопа (сила веса не может оказать такого влияния, поскольку она приложена в неподвижном центре тяжести диска). Если задать определенную ориентацию оси диска, то при пренебрежимой малости сил трения это положение будет оставаться неизменным, что обусловлено законом сохранения момента количества движения диска

$$\overrightarrow{M_1} = I_1 \overrightarrow{\omega_2} = const \quad (2.76)$$

(I_1 – момент инерции диска), направление которого совпадает с осью вращения гироскопа. Эта закономерность используется в авиационных приборах – гироскопах, используемых, например, в самолетовождении.

Если приложить внешний момент \vec{M}_2 к кольцу 2, то возникает дополнительный поворот – прецессия – оси диска 1 с угловой скоростью $\vec{\omega}$ (см. рис. 2.8):

$$\vec{M}_2 = I_2 \vec{\omega}_k \quad (2.77)$$

(I_2 – момент инерции системы относительно направления вектора \vec{M}_2). Приращение момента – количества движения диска 1 за счет поворота кольца 2 будет равно $d\vec{M}_1 = \vec{M}_2 dt$ и направлено перпендикулярно вектору \vec{M}_1 , как показано отдельно на рис. 2.8. Результирующий вектор момента количества движения

$$\vec{M}_1' = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 dt \quad (2.78)$$

будет повернут за время dt на угол

$$d\alpha = \frac{M_2 dt}{M_1}, \quad (2.79)$$

откуда

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{M_2}{M_1}. \quad (2.80)$$

Это соответствует прецессии оси гироскопа с угловой скоростью Ω ,

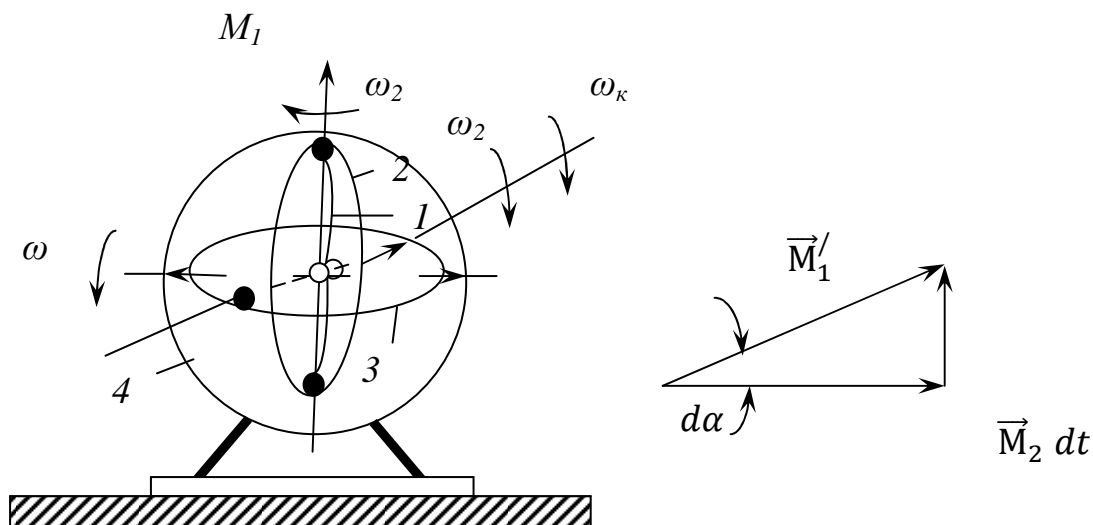


Рис.2.8

которая, согласно (2.80) и (2.76), определяется соотношением:

$$\Omega = \frac{M_2}{I_1 \omega_2}. \quad (2.81)$$

Это выражение определяет динамический закон прецессии гироскопа.

Одним из многочисленных примеров применения гироскопа в кардановом подвесе является используемый в самолетовождении авиационный гиригоризонт (гировертикаль). Этот прибор позволяет определить истинную вертикаль или плоскость горизонта и, следовательно, установить негоризонтальность полета самолета в условиях плохой видимости. В этом приборе ось кольца 3 расположена параллельно продольной оси самолета, ось внутреннего кольца 2 – параллельно

поперечной оси самолета, а ось гироскопа 1 вертикально. Угол тангажа (образуемый продольной осью самолета и ее проекцией на горизонтальную плоскость) измеряется относительно внутренней оси кардана, а угол крена (угол поворота самолета вокруг его продольной оси) – относительно внешней оси кардана. Прибор снабжен сферической шкалой, которая связана с узлом гироскопа так, что при продольных и поперечных кренах самолета она не изменяет своего положения относительно Земли; на ней нанесена линия горизонта, остающаяся все время в горизонтальном положении.

На корпусе прибора нанесен силуэт самолета, по положению которого относительно сферической шкалы и линии горизонта можно судить об истинном положении самолета в полете. Прецессия оси гироскопа, которая может внести погрешность в показания прибора, устраняется с помощью специального автоматического устройства, удерживающего ось гироскопа в вертикальном положении.

Рассмотрим еще некоторые примеры применения гироскопов в технике. В судовождении и авиации применяются навигационные приборы – гирокомпасы, которые являются ценным дополнением к обычным магнитным компасам, показания которых не всегда являются вполне надежными (например, в местах магнитных аномалий).

В некоторых гироскопических приборах используется явление возникновения прецессии оси гироскопа с угловой скоростью $\omega = M/I\Omega = M/H$ под действием приложенного к оси гироскопа момента M (I – момент инерции гироскопа относительно его оси вращения, Ω – угловая скорость собственного вращения гироскопа относительно той же оси, H – собственный кинетический момент гироскопа). На практике величина ω бывает в миллионы раз меньше. Векторы $\vec{\omega}$, \vec{M} , \vec{H} взаимно перпендикулярны. Если с помощью некоторого груза создать прецессию гироскопа $\omega = V \sin \varphi$, где V – угловая скорость вращения Земли, φ – географическая широта данной местности, то ось гироскопа будет с определенной точностью сохранять неизменное направление относительно сторон света. Такой гироскоп – гироазимут или гироскоп направления – может в течение нескольких часов (пока не накопится значительная ошибка в 1° - 2°) заменять компас, например, на самолетах полярной авиации в высоких широтах, где показания магнитного компаса становятся ненадежными.

Гирокомпас приводит в действие курсограф, служащий для автоматической записи курса судна во времени; записи осуществляются на бумажной ленте, образуя так называемую курсограмму, являющуюся одним из важнейших судовых документов.

Весьма широко распространены в технике гироскопические стабилизаторы, предназначенные для поддержания устойчивого равновесия или устойчивого характера движения судов, самолетов, ракет и т. д. При этом стабилизация может осуществляться относительно одной, двух или трех

взаимноперпендикулярных осей, поэтому различают одноосные, двухосные и трехосные (или пространственные) стабилизаторы.

Для стабилизации вагона монорельсовой железной дороги используют вертикальный гироскоп, установленный в раме, ось вращения которой расположена горизонтально, а опоры оси смонтированы в боковых станках вагона. Дополнительная стабилизация обеспечивается с помощью электромагнита, создающего момент относительно оси рамы гироскопа, а ток в цепи якоря поддерживается пропорциональным угловой скорости поворота рамы гироскопа.

Разновидностью гиростабилизаторов являются гироскопические успокоители качки кораблей. Такие успокоители используются как на небольших кораблях, так и на трансокеанских лайнерах. Они ослабляют бортовую качку в 10-15 раз, снижая амплитуду качки при сильном волнении до 1-2°.

Наиболее широкое распространение получили силовые гироскопические стабилизаторы, содержащие «разгрузочные» электродвигатели, создающие силы, которые компенсируют внешние воздействия на объект, подлежащий стабилизации. При возникновении прецессии оси гироскопа возникает противодействующий гироскопический момент, способствующий стабилизации системы в начальный период, в течение которого возрастает до достаточной величины ток в цепи разгрузочного двигателя. В схеме управления этим двигателем действует входной сигнал в виде напряжения, пропорционального углу прецессии гироскопа, который снимается с электроизмерительного прибора. Примером одноосного силового гиростабилизатора является силовая гироскопическая рама, содержащая два гироскопа, роторы которых вращаются в противоположные стороны. При повороте рамы вокруг оси, лежащей в ее плоскости, возникают прецессии осей гироскопов в противоположные стороны, в результате чего возникают моменты, препятствующие такому повороту. Сочетания трех таких рам с взаимно перпендикулярными осями использовались, например, для пространственной стабилизации искусственных спутников Земли.

Гироскопы, используемые в технике, обычно выполняются в виде маховиков с утолщенным ободом шаров с массой от нескольких граммов до десятков кг. Гироскопы приводятся в быстрое вращение (до 30000 об/мин), например, струей воздуха, когда ротор гироскопа является одновременно ротором воздушной турбины. Часто ротор гироскопа является ротором быстроходного электродвигателя постоянного или переменного тока. Ротор заключается в кожух, который часто делают герметичным и заполняют водородом с целью уменьшения сопротивления движению и снижения темпа коррозии металлических частей. Для уменьшения момента сил трения в подвесе кожух с ротором гироскопа погружают в жидкость или же применяют специальные подшипники. Из-за больших скоростей вращения весьма важной является хорошая балансировка гироскопа.

2.4 Динамика реактивного движения

Согласно изложенному в п. 2.1, внутренние силы в изолированной системе тел не могут привести в движение покоящуюся систему; центр масс изолированной системы тел всегда находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения. Так, при разлете осколков гранаты, откате орудия и т.д. происходит взаимное перемещение частей системы тел, при неизменном положении центра масс. Именно в этом, по существу, и заключается принцип реактивного движения, лежащий в основе современной ракетной техники и космонавтики.

Динамика движения ракеты, выбрасывающей в окружающее пространство некоторую часть своей общей массы в виде раскаленных газов, образующихся при сгорании топлива (за счет чего и образуется реактивная тяга) представляет собой, в отличие от рассмотренных выше примеров, случай динамики тел с переменной массой. В этом случае, очевидно, из (2.5) не следует уравнение (2.6). Оно, следовательно, не может использоваться для описания динамики движения в этом случае и должно быть заменено уравнением иного вида. Такое уравнение было получено И. В. Мещерским. Рассмотрим элементарный вывод этого уравнения.

Пусть некоторая система тел или тело с массой M выбрасывает ежесекундно часть своей массы μ с произвольно направленной скоростью \vec{V}_1 (рис. 2.9). Рассмотрим движение тела и выброшенных частиц в системе координат, связанной с Землей. В начальный момент времени t тело имеет некоторую скорость \vec{V} и импульс $M\vec{V}$ (а). На тело может действовать внешняя сила \vec{F} – (см. ниже). За время dt – отделяется масса μdt и оставшаяся часть тела имеет скорость $\vec{V} + \Delta\vec{V}$ и импульс $(M - \mu dt)(\vec{V} + \Delta\vec{V})$ (б), а отделившаяся часть – импульс $\mu dt \vec{V}_1$.

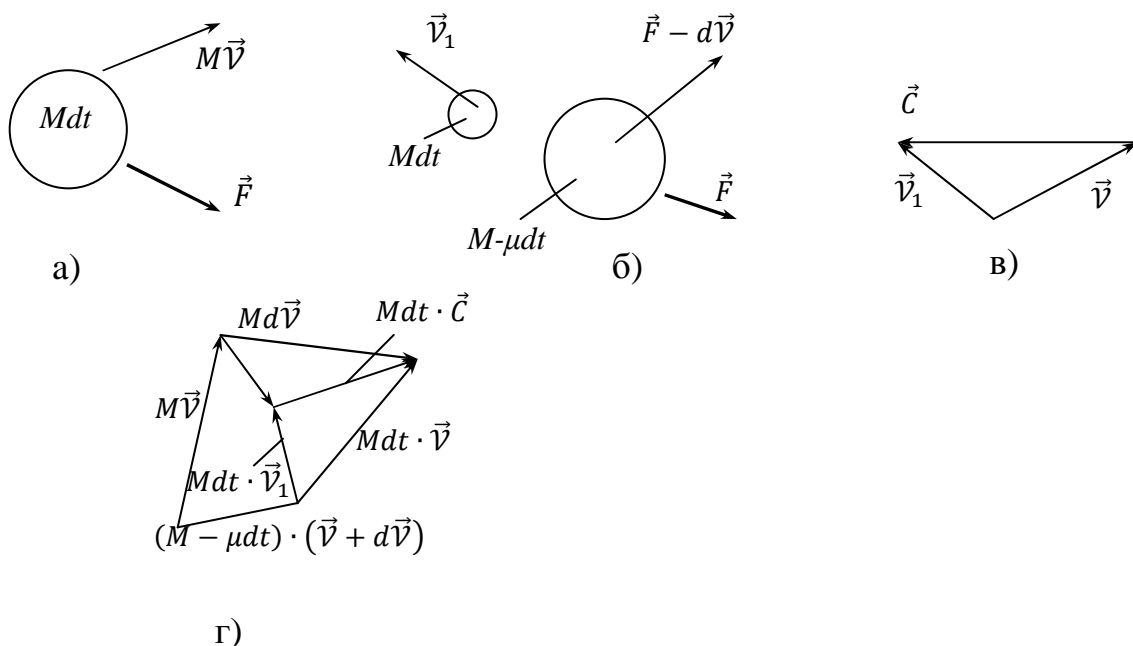


Рис.2.9

Относительная скорость отделившихся частиц $\vec{c} = \vec{V}_1 - \vec{V}$ может, очевидно, быть больше или меньше скорости тела относительно Земли. Из диаграммы импульсов (г) видно, что изменение импульса всей системы равно $(M - \mu dt)(\vec{V} + d\vec{V})$, причем членом второго порядка малости $\mu dt d\vec{V}$ можно пренебречь. Это изменение импульса обусловлено действием внешней силы \vec{F} , импульс которой, согласно (2.4), равен $\vec{F} dt = M d\vec{V} + \mu dt(\vec{V}_1 - \vec{V})$.

Отсюда находим, что $\vec{F} + \mu(\vec{V} - \vec{V}_1) = M \frac{d\vec{V}}{dt}$, или окончательно:

$$M \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} - \mu \vec{c} = \vec{F} + \vec{F}_p. \quad (2.82)$$

Это и есть уравнение Мещерского в частном виде, описывающее движение тела, ежесекундно выбрасывающего часть своей массы μ с относительной скоростью \vec{c} .

Величина $\vec{F}_p = -\mu \vec{c}$ определяют силу реактивной тяги, направленную противоположно истечению газов.

Внешняя сила для ракеты у поверхности Земли складывается из силы веса \vec{G} и лобового сопротивления воздуха \vec{R} (см. п. 6.5), как показано на рис. 2.10. При полете в Космосе практически сила сопротивления \vec{R} отпадает, а сила \vec{G} уменьшается.

Формула Циолковского, связывающая скорость движения ракеты с ее массой, изменяющейся во время полета, может быть получена на основе уравнения Мещерского следующим образом. В открытом Космосе внешняя сила, действующая на ракету (космический корабль), равна нулю ($F=0$), и вместо (2.82) можно написать:

$$M \frac{d\vec{V}}{dt} = -\mu \vec{c}. \quad (2.83)$$

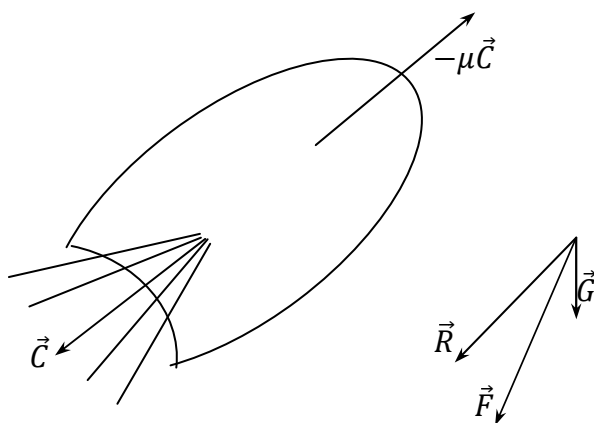


Рис. 2.10

Выразим теперь μ согласно смыслу этой величины, как $\frac{dM}{dt}$, и перепишем (2.83) в виде:

$$\frac{d\vec{V}}{dM} = -\frac{\vec{c}}{M}, \quad d\vec{V} = -\vec{c} \frac{dM}{M}. \quad (2.84)$$

Если принять гипотезу о постоянстве величины c во время полета (что не является принципиальным, а лишь упрощает решение уравнения (2.84), то интегрирование этого уравнения при начальном условии $M_{t=0} = M_0$, $U(t_0) = 0$ дает формулу

Циолковского:

$$\frac{M_0}{M} = e^{\frac{v}{c}} \quad (2.85)$$

или с учетом $M = M_0$ при $t = 0$

$$\mathcal{V} = c \ln \frac{M_0}{M}. \quad (2.86)$$

Ясно, что эта формула применима лишь для медленных движений, поскольку, согласно теории относительности, скорость материального объекта не может превысить скорость света в вакууме ($3 \cdot 10^8$ м/с), а формула Циолковского, очевидно, допускает такую ситуацию. Однако это обстоятельство совершенно несущественно, поскольку скорости современных ракет еще весьма далеки от скорости света (порядков десятков км/с).

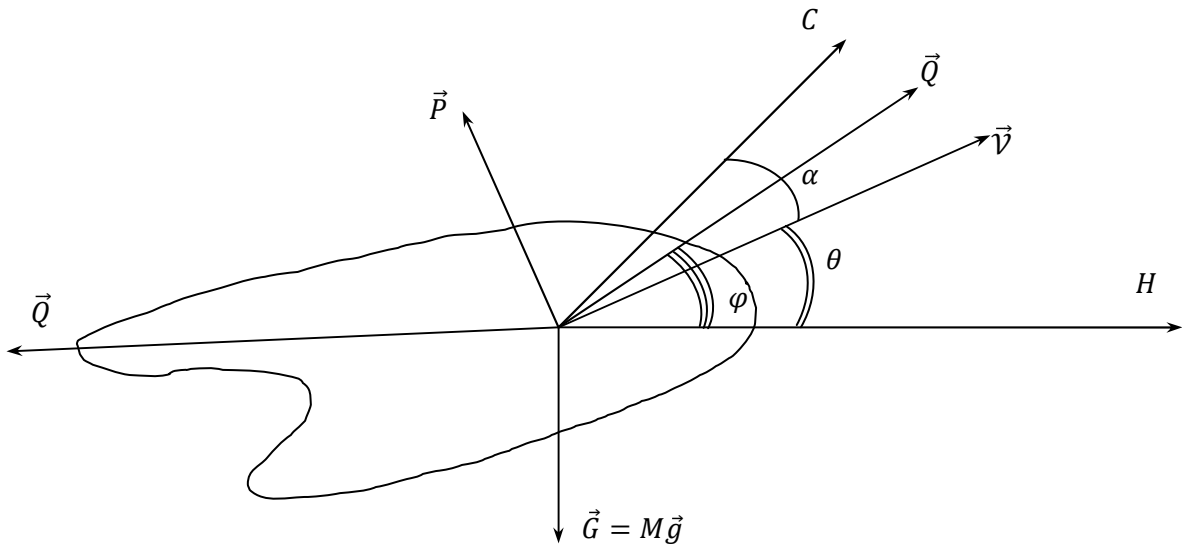


Рис. 2.11

С помощью формулы (2.86) можно производить различные практические расчеты, связанные с космическими полетами, вычислить запас топлива, необходимый для сообщения ракете определенной скорости. Пусть, например, эта скорость равна первой космической скорости, при которой ракета выходит на замкнутую орбиту вокруг Земли (о космических скоростях см. п. 5.2) $\mathcal{V}_1 = 7,9$ км/с. Расчет показывает, что, например, при $c = 2$ км/с $\frac{m_0}{m} \approx 55$, при $c = 4$ км/с $\frac{m_0}{m} = 7,4$, и т. д. Т. е. отношение $\frac{m_0}{m}$ быстро уменьшается с возрастанием c . В то же время ясно, что это отношение определяет долю полезного веса ракеты, т. к. в полете уменьшается лишь «бесполезная» масса (топлива), и эта доля тем выше, чем меньше отношение $\frac{m_0}{m}$. Очевидно, что выгодно увеличивать относительную скорость газовой струи \bar{c} .

В то же время известно, что скорость истечения газовой струи приближенно пропорциональна $\sqrt{\frac{T}{\mu}}$, где T – температура, μ – молекулярная масса газа. Таким образом, для увеличения c следует брать как можно более «легкие» газы и повышать температуру сгорания.

Современные виды химического ракетного топлива обеспечивают максимальную скорость истечения газов c около 5 км/с. Оценки с помощью формулы (2.85) показывают, что, например, для достижения второй космической скорости $V_2 = 11,2$ км/с (необходимой, например, для полета на Луну) $\frac{m_0}{m} \approx 10$, а для достижения третьей космической скорости ($V_3 = 16,5$ км/с) $\frac{m_0}{m} \approx 40$. Если еще учесть необходимость иметь запас топлива для возвращения ракетного космического корабля на Землю (а также для возможных маневров вблизи другой планеты), то получается, что для осуществления межпланетных полетов необходимо брать на борт запас топлива, превышающий по массе полезную часть ракеты в несколько тысяч раз. Это связано с весьма значительными техническими трудностями. Если же рассматривать перспективы межзвездных перелетов, то необходимо обеспечить скорости полета, близкие к скорости света, чтобы время полета было реальным (в пределах человеческой жизни). Даже при скорости, составляющей 0,1 от скорости света, и скорости истечения $c=10$ км/с (уже завышенная величина) формула Циолковского дает оценку $\frac{m_0}{m} \sim 10^{1300}$, т. е. $m_0 \sim 10^{1300}$ при полезной массе ≈ 1 т. Для сравнения следует напомнить, что масса всей доступной нашим наблюдениям части Вселенной – Метагалактики – не превышает 10^{50} т, что неизмеримо меньше полученной выше величины. Таким образом, для осуществления межзвездных перелетов ракеты на химическом топливе совершенно непригодны, и необходимо рассматривать другие принципы реактивного движения, например, фотонные ракеты, в которых было бы реализовано «истечение» светового пучка (вместо газовой струи) со скоростью света $c=3 \cdot 10^8$ м/с. Создание таких космических кораблей является делом будущего.

С помощью формулы Циолковского можно производить и другие расчеты в области космонавтики (примеры будут приведены в п. 5.2).

Более сложный характер принимают законы динамики для ракет, предназначенных для полетов в околоземном пространстве. Как уже упоминалось выше, в этом случае в уравнение Мещерского (2.82) входит сила, представляющая собой равнодействующую всех внешних сил, действующих на ракету. При этом конкретный учет всех этих сил может обусловить значительные затруднения при проведении динамических расчетов. Рассмотрим, например, активный участок полета самолета – снаряда с крыльями, создающими подъемную силу P при угле атаки α , испытывающего сопротивление воздуха Q (рис. 2.11). Здесь \vec{V} – вектор скорости центра масс ракет s , $\vec{\phi}$ – реактивная сила тяги двигателя, G – вес ракеты, C – направление хорды крыла, H – линия горизонта, θ – так называемый угол тангажа.

Составляя проекции всех векторов, входящих в уравнение Мещерского, на направления касательной и нормали к траекториям полета, получим, соответственно, уравнения:

$$\begin{cases} M \frac{dv}{dt} = \phi \cos(\psi - \theta) - Q - G \sin \theta \\ M \frac{d\theta}{dt} = \phi \sin(\psi - \theta) + P - G \cos \theta \end{cases} \quad (2.87)$$

При программировании полета законы изменения θ и ϕ со временем считаются известными. Тогда уравнения (2.87) связывают функции \mathcal{V} и ψ ; от угла α , в свою очередь зависят подъемная сила P и лобовое сопротивление Q (см. п. 6.5). Если полагать $M/M_0 = f$ (M_0 – начальная масса ракеты). $\phi = M_0 C \frac{df}{dt}$ и $\psi = \theta$, то в уравнения (2.87) будут входить четыре функции времени: $f(t)$, $\mathcal{V}(t)$, $\theta(t)$ и $d(t)$.

Обычно для составления оптимальной программы полета решаются вариационные задачи по выбору законов изменения $\theta(t)$ и $f(t)$, обеспечивающих, например, экстремум дальности полета, времени накрытия цели, продолжительности полета и другие его характеристики. Если траектория полета известна (например, горизонтальная линия полета), то решение соответствующих, более простых, вариационных задач дает закон программирования тяги двигателя, определяющий режим его работы. Если же закон изменения тяги известен, то вариационными методами определяют оптимальные траектории, задаваемые зависимостью $\theta(t)$ и т. д.

Большое практическое значение имеет динамический расчет полета многоступенчатых ракет. В качестве иллюстрированного примера рассмотрим расчет оптимального соотношения между массой 1-й и 2-й ступеней, обеспечивающего максимальную скорость части ракеты, стартующей с небесного тела, лишённого атмосферы (например, с Луны). При этом отношение массы топлива к массе ступени равны, соответственно, α_1 и α_2 для этих ступеней, а скорость истечения газов \vec{c} в обоих двигателях можно принять одинаковой. Если обозначить относительные массы (отнесенные к полной начальной массе ракеты) ступеней через m_1 и m_2 , а полезной части ракеты (груза) – через m условие, то будет условие: $m_1 + m_2 + m = 1$. Скорость \mathcal{V}_1 , достигнутая после выгорания топлива с массой $\alpha_1 m_1$, в 1-й ступени согласно формуле Циолковского, равна:

$$\mathcal{V}_1 = -c \ln[(1 - \alpha_1)m_1 + m_2 + m]. \quad (2.88)$$

Затем 1-я ступень с массой $(1 - \alpha_1)m_1$ отделяется, включается двигатель 2-й ступени, и после выгорания в нем топлива скорость ракеты увеличится еще на величину \mathcal{V}_2 :

$$\mathcal{V}_2 = -c \ln \left[\frac{(1 - \alpha_1)m_2 + m}{m_2 + m} \right]. \quad (2.89)$$

Выражая m_2 как $1 - m - m_1$ (из (2.88) и (2.89)) получается полная достигнутая скорость ракеты \mathcal{V} , равная:

$$\mathcal{V} = C \{ \ln(1 - m_1) - \ln(1 - \alpha_1 m_1) - \ln[(1 - \alpha_2)(1 - m_1) + \alpha_2 m] \}. \quad (2.90)$$

Скорость \mathcal{V} зависит здесь только от параметра m_1 . Поэтому оптимальную величину m_1 можно найти из условия экстремума функции $\frac{d\mathcal{V}}{dm_1} = 0$ или

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{\beta - m_1} + \frac{1}{\gamma - m_1} = 0, \quad (2.91)$$

где $\beta = 1/\alpha_2$, $\gamma = 1 + \frac{\alpha_2}{1-\alpha_2}m$. Решение этого уравнения дает ($0 < m_1 < 1$):

$$m_1 = 1 - \sqrt{1 + \beta\gamma - \beta - \gamma}. \quad (2.92)$$

Далее можно найти для искомого соотношения $\frac{m_2}{m_1}$ выражение в виде:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \times \frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_2}} - \sqrt{m}}{1 - \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \times \frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_2}}} \sqrt{m}. \quad (2.93)$$

Качественно анализируя соотношение (2.93) заметим, что обычно α_1 и α_2 не очень сильно отличаются друг от друга, а $m \ll 1$, поэтому знаменатель дроби не обращается в нуль.

При $\alpha_1 = \alpha_2$ из (2.93) получается простой результат в виде

$$\frac{m_2}{m_1} = \sqrt{m}. \quad (2.94)$$

В некоторых случаях решение уравнения Мещерского типа (2.82) принимает особенно простой вид. С увеличением веса ракеты реактивная сила и вес растут пропорционально кубу размеров ракеты, а сила сопротивления воздуха – пропорциональна квадрату размера (см. п. 6). Поэтому для больших ракет можно пренебречь силой сопротивления и учитывать только вес, тогда для прямолинейных траекторий уравнение Мещерского решается просто. Так, при экспоненциальной зависимости массы ракеты от времени $M = M_0 e^{-kt}$, где $k - const$, и при небольшой высоте полета, когда $g - const$, решение имеет вид (\mathcal{V}_0 – начальная скорость ракеты):

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 + (kc - g)t^2. \quad (2.95)$$

При $kc = g$ движение ракеты на активном участке будет равномерным, а при $kc > g$ – равноускоренным.

$$S = \mathcal{V}_0 t + \frac{1}{2}(kc - g)t^2. \quad (2.96)$$

При $\mathcal{V}_0 = 0$ оптимальная величина k_{opt} , при которой длина активного участка полета максимальна, равна

$$k_{opt} \approx \frac{2g}{c}, \quad (2.97)$$

а сама эта длина:

$$S_{max} = \frac{\mathcal{V}_z^2}{8g}, \quad (2.98)$$

где \mathcal{V}_z определяется формулой Циолковского: $\mathcal{V}_z = c \ln \frac{M_0}{M_S}$ (M_S – масса ракеты без топлива).

Все эти соотношения определяют характер движения центра масс ракеты. Однако ракета совершает также движение и вокруг своего центра масс в процессе маневрирования, а также в результате различного рода неустойчивостей полета. Расчет этого движения усложняется тем обстоятельством, что управляемые ракеты обычно снабжаются автопилотом, для трех каналов которого (по тангажу, курсу и крену, см. п. 6.5) также необходимо составить соответствующие динамические уравнения.

Результирующая система уравнений динамики полета, с учетом всех влияющих на него факторов, оказывается чрезвычайно сложной. В общем случае такая система содержит 18 и более уравнений (как дифференциальных, так и алгебраических) и не поддается аналитическому решению. Были разработаны различные приближенные, численные методы решения, основанные обычно на разделении полной системы на группы (подсистемы) уравнений, решаемые независимо друг от друга. Так, при прямолинейном и равномерном движении центра масс ракеты исследование ее движения вокруг центра масс можно проводить в предположении о неподвижности этой точки. Если продольное движение ракеты (по тангажу) не зависит от бокового движения, а угол атаки мал, то решение системы уравнений динамики допускает дальнейшее упрощение.

Сложность решения уравнений динамики в этих случаях обуславливает широкое применение в практике проектирования систем управления ракетами различных методов моделирования, причем реальные приборы управления и стабилизации используются в качестве звеньев моделирующих устройств. При этом используются результаты аэродинамических экспериментов и натурных испытаний опытных образцов ракет. Бортовая система управления любой ракеты является системой автоматического регулирования (следящей системой), которая автоматически корректирует положение ракеты, вырабатывая команды на рули управления при возникновении «сигналов рассогласования» в результате отклонения ракеты от расчетной траектории. Ракеты специального назначения управляются командами с Земли с помощью систем телеуправления; команды передаются по радиолиниям в контур управления (бортовую систему) ракеты и изменяют положение рулей управления, включают и выключают ракетные двигатели и т. д., обеспечивая наведение ракеты на заданную цель. При этом автопилот ракеты обеспечивает ее устойчивость в полете (стабилизацию) и правильное выполнение команд радиоуправления. Приборы и устройства телеконтроля дают информацию о текущих параметрах полета и функционировании всех узлов и агрегатов на борту ракеты. При разработке этих сложнейших систем управления полетом ракет используются новейшие достижения теории информации, теории автоматического регулирования, теории колебаний и устойчивости.

Наряду с управляемыми ракетами, в современной технике и военном деле применяются и неуправляемые ракеты (например, метеорологические ракеты для исследования верхних слоев атмосферы, сигнальные ракеты и т. п.). Динамика таких ракет во многом аналогична динамике полета артиллерийских снарядов и изучается внешней баллистикой, включающей теорию движения центра масс ракеты и теорию движения вокруг этого центра масс; на пассивных участках траектории (при выключенном двигателе) движение любой ракеты описывается законами динамики твердого тела (см. п. 2.2).

Основной задачей внешней баллистики является описание движения центра масс ракеты при нормальных метеорологических условиях. Для этого используется уравнение Мещерского типа (2.82), с учетом веса ракеты и силы сопротивления воздуха. Учет сопротивления воздуха сильно усложняет задачу и обуславливает необходимость использования приближенных расчетных методов, в частности, численного интегрирования соответствующих дифференциальных уравнений (см. выше). Второй задачей внешней баллистики является описание вращательного движения ракеты (или снаряда) относительно центра масс и внешнее его влияние на характер движения центра масс (явление деривации). На начальном участке полета вращения снаряда аналогично вращению тяжелого гироскопа: ось снаряда прецессирует относительно вектора скорости. На искривленном участке траектории полета (вблизи ее вершины) характер вращения изменяется; в результате вращения в определенном направлении ось снаряда и, соответственно, центр масс, отклоняются в соответствующую сторону (вправо при правовинтовом вращении). Это явление деривации существенно влияет на точность наведения снарядов и неуправляемых ракет при стрельбе. Существенное влияние на характер движения ракеты оказывают колебания ее оси, вызывающие появление значительных боковых составляющих реактивной силы. Дальнейшее усложнение динамики полета возникает из-за всевозможных отклонений реальных метеорологических условий от некоторых «стандартных», принимаемых при расчете полета. Для учета этих отклонений приходится вводить различные поправки – изменение давления и температуры воздуха, направление и скорость ветра и т. п., а также на суточное вращение Земли.

Ввиду исключительной сложности аналитического описания динамики полета ракет широко используются, как указывалось, экспериментальные методы ее изучения (экспериментальная ракетодинамика). Основной задачей при этом является определение параметров полета ракет в условиях испытаний на полигонах; при этом определяются координаты центра тяжести ракеты и углы, определяющие ее положение относительно центра тяжести. Для этих целей используются кинетеодолиты, расположенные в трех фиксированных на местности точках и синхронизованные во времени. При больших дальностях полета и в неблагоприятных метеорологических условиях для определения координат центра тяжести ракеты используются радиолокаторы; при этом на ракете обычно устанавливается «радиоответчик» с целью повышения точности и дальности локации ракеты. Указанные выше углы, характеризующие движение ракеты относительно ее центра масс, определяют с помощью датчиков, установленных на самой ракете; в качестве чувствительных элементов обычно используются прецизионные гироскопы. Передача информации от этих датчиков осуществляется с помощью телеметрических систем. Используются также аэродинамические эксперименты, упомянутые выше, и проводятся специальные стрельбы, в

ходе которых исследуют силы, действующие на ракеты, в частности, лобовое сопротивление, боковое давление ветра на ракету и др. параметры.

Современная ракетная техника достигла высокого уровня развития. Использование ракет в космонавтике будет рассмотрено отдельно в п. 5.2. Здесь следует упомянуть о ракетах, предназначенных для использования в земных условиях, как в мирных, так и в военных целях. В частности, особое значение для службы погоды приобрели метеорологические ракеты.

Метеорологические ракеты предназначены для подъема приборов для исследования состояния атмосферы в ее верхние слои – до 100-150 км, при массе до 400 кг; наиболее распространены ракеты этого типа с массой до 80 кг и высотой подъема до 70 км. Запуски метеорологических ракет производят в различных районах земного шара, включая Арктику и Антарктику, как с земных пунктов, так и с кораблей. На ракетах устанавливают приборы для измерения температуры (термометры сопротивления, микротермосопротивления и др.), давления и плотности атмосферы (манометры различных типов), а также масс-спектрометры для определения состава атмосферы. Сигналы от измерительных приборов передаются на Землю с помощью телеметрической системы. Для измерения параметров траектории ракеты служат кинотеодолиты, радиолокаторы и радиодоплеровские системы, причем при обработке данных широко используются электронно-вычислительные машины.

Исключительно важное значение приобрела ракетная техника в военном деле, где они используются для доставки средств поражения (в частности, ядерных боеголовок) до цели. Основными преимуществами ракетного оружия являются большая дальность и высокая скорость полета ракет (расстояние в несколько тысяч км за несколько десятков минут), большая грузоподъемность ракет, высокая точность их наведения на цель и малая уязвимость для средств перехвата, высокая степень боеготовности. По своему назначению ракетное оружие подразделяется на стратегическое (предназначенное для поражения важных стратегических объектов – крупных военно-промышленных центров, группировок войск и т. п.), оперативно-тактическое (предназначенное для поражения аэродромов, железнодорожных узлов и т. п.) и тактическое (для нанесения ударов по боевым объектам противника и его поражения в тактической зоне). Специальные противоатаковые управляемые ракеты служат для борьбы с танками и др. бронированными машинами, а осколочные неуправляемые ракеты предназначены для поражения живой силы и боевой техники противника. В зависимости от места старта и нахождения цели различают 4 класса ракет: «земля-земля» (станция запуска и цель могут находиться на поверхности Земли или моря), «земля-воздух» (используются для борьбы с воздушными силами противника), «воздух-земля» (запускаются с самолетов для поражения объектов на Земле или на море) и «воздух-воздух» (запускаются с самолетов для поражения воздушных целей). По конструктивным признакам боевые ракеты подразделяются на крылатые и

баллистические; в то время как крылатые ракеты имеют крылья, развивающие определенную подъемную силу, баллистические ракеты не имеют несущих поверхностей, создающих подъемную силу. Полет баллистических ракет происходит по баллистической траектории, захватывающей большие высоты, поэтому они обладают малой уязвимостью. К баллистическим ракетам относятся также ракеты-носители космических летательных аппаратов.

2.5 Элементы биомеханики

Виды движений, совершаемых в живой природе, чрезвычайно разнообразны и изучаются особым разделом биофизики – биомеханикой, которая, в свою очередь, подразделяется на динамическую анатомию, теорию движений, биомеханику дыхания, теорию кровообращения и т. д. Исследования в области биомеханики находят практическое приложение в физиологии труда и спорта, в ортопедии, травматологии и протезировании, военной и клинической медицине и др. областях. Данные этих исследований применяют, в частности, для целей рационализации трудовых процессов, повышения профессионального и спортивного мастерства, рационального конструирования протезно-ортопедических изделий, выявления механизмов повреждения костей, мышц и суставов с целью предупреждения травм. На основе изучения «живой» динамики возможно решать сложные инженерные задачи. Эта возможность подробно изучается сравнительно молодой наукой – бионикой.

Одним из основных разделов биомеханики является динамическая анатомия, изучающая структуру и подвижность (число степеней свободы) кинематических цепей тела и их шарнирных элементов – сочленений, распределение масс и динамические параметры организма (например, положение центра масс или центра тяжести, моменты инерции двигательных звеньев и систем), а также мышечный аппарат организма – структуру, расположение и функцию мышц. Особенностью кинематических цепей человеческого тела по сравнению с механизмами, с которыми мы встречаемся в технике, является чрезвычайное обилие степеней свободы (т. е. большая подвижность звеньев). Так, рука, начиная от ключично-лопаточного сочленения имеет 33 степени свободы; при этом среди сочленений имеются одно-, двух- и трехстепенные, зачастую с весьма широкими пределами подвижности, как, например, двухстепенное плечелучевое и трехстепенное лопаточно-плечевое сочленения. Биомеханические данные о структуре и механизмах управления этими кинематическими цепями со стороны центральной нервной системы широко используются при конструировании автоматов-манипуляторов и роботов для применения в разнообразных областях техники, а также при конструировании «искусственных двигательных органов», в частности, моторизованных и «очувственных»

протезов, управляемых биоэлектрическими процессами организма инвалида («активных протезов»).

Центр тяжести прямо стоящего человека нормальной конструкции с присущим ему распределением массы находится на расстоянии 0,56 от всей длины тела, считая от площади опоры, т. е. сравнительно высоко. Поэтому при значительных смещениях этого центра в различных позах отвесная линия, проходящая через центр тяжести, может выйти за пределы площади опоры, и равновесие тела становится неустойчивым (в ряде поз центр тяжести может находиться вне тела). Это необходимо учитывать при профессиональной тренировке артистов цирка, балета и др., спортсменов, в особенности фигуристов, тяжелоатлетов и др., при отработке движений, требующих «математической» точности. В общем центре тяжести прикладываются вырабатываемые организмом усилия и соответствующие опорные реакции. При активных перемещениях – локомоциях (к ним относятся ходьба и бег человека, а также плавание, прыжки, лазание и т. д.) импульсы сил (интегралы опорных реакций по времени) на протяжении одного цикла движения равны произведению веса тела на длительность цикла (для вертикальных составляющих). Поэтому при малых длительностях цикла опорные усилия на движущие органы (например, на ноги при прыжках и беге) могут превышать статическую нагрузку в 4-5 (при беге) и даже 6-8 раз (при прыжке), то есть сочленения испытывают значительные перегрузки. Мышцы, осуществляющие перемещение частей скелета (например, двуглавая и трехглавая мышцы руки), обладают чрезвычайной прочностью и подвижностью, что обеспечивается их сложным волокнистым строением, при исключительной сложности структуры отдельных пучков волокон-мионов. Мион одновременно выполняет функции активного двигателя, преобразующего по командам, поступающим от мозга, электрохимическую энергию внутри тканей в упругую механическую энергию, и движителя костно-суставного агрегата, через шарнир которого он перекинут, передавая динамическое усилие тяги костям через ряд промежуточных (пассивных) элементов. В каждом волокне на микроскопическом уровне чередуются активно сократительные и буфероэластичные элементы; последние преобразуют прерывистые сокращения первых с частотой в пределах $\approx(50-100)$ Гц в плавно развиваемые динамические усилия.

Высота поднятия груза мышцей с параллельными волокнами зависит от длины волокна, а вес поднимаемого груза определяется числом волокон. Поэтому мышца, обладающая большим геометрическим объемом, может произвести большую работу (при равенстве длин большую работу производит более толстая мышца). Поскольку вес тела пропорционален третьей степени его размеров, то работа, необходимая для управления им (например, для поднятия конечности на некоторую высоту) пропорциональна четвертой степени размеров. Поэтому для того, чтобы не оказаться беспомощным в борьбе за свое существование, животное должно обладать более толстыми мышцами, чем по закону прямой пропорциональности (т. е.

крупное животное, превышающее более мелкое по размерам в 10 раз, должно иметь объем мышц в 10^4 , а не в 10^3 раз больше. Их поперечник должен быть в $\sqrt{10}$ раз больше, чем по закону прямой пропорциональности, а потому и его скелет должен быть соответственно более массивным. В животном мире действительно наблюдается закон, согласно которому скелет более крупных животных составляет больший процент его веса (например, у мыши – 8 %, у собаки – 14%). По этой же причине конечности более крупных животных относительно короче, чем мелких; в процессе развития животного рост туловища всегда обгоняет рост конечностей, так что, в конечном счете, устанавливается рациональное соотношение между мускулатурой и работой перемещения конечностей. Указанный закон механики ставит предел существованию чрезмерно крупных наземных животных, которые, обладая меньшей подвижностью или же относительно более массивным скелетом, оказываются в невыгодных условиях в борьбе за существование. (Заметим, что это не относится к китам, живущим в воде, которые уравнивают свой вес по закону Архимеда).

Законы механики ставят также предел существованию чрезмерно высоких деревьев: вес ствола возрастает пропорционально 3-й степени его линейных размеров, а прочность ствола определяется его площадью поперечного сечения, т. е. возрастает лишь пропорционально 2-й степени размеров. Поэтому при превышении некоторой предельной высоты дерево неминуемо должно разрушиться под действием собственного веса.

Путем активизации мионов со стороны спинного мозга осуществляется дозировка силы сокращения всей мышцы. Состояние миона в активном и пассивном (покоящемся) состоянии характеризуется нелинейными упругими характеристиками, которые обуславливают эластичность мышцы (движителя) в целом. Наличие таких свойств означает, что сокращение мышцы на любом стабильном уровне возбуждения (в том числе и на нулевом) приблизительно описывается уравнением вида:

$$\frac{d^2l}{dt^2} + k \frac{dl}{dt} + Ll + M = 0, \quad (2.99)$$

где $l=l(t)$ – текущая длина мышцы, M – ее масса, k и L – параметры, характеризующие зависимость напряжения мышцы от l . Методы решения подобных дифференциальных уравнений 2-го порядка хорошо известны. Анализ полученных решений приводит к ряду важных выводов. В частности, сокращение может носить характер затухающего (в частности, апериодического при очень большом затухании) или незатухающего колебания. При наличии резонанса дозированных ритмических добавок на собственной частоте движимой системы двигательный акт, например, при ходьбе или беге, может сопровождаться сравнительно малым энергетическими затратами со стороны организма. То есть, такие ритмические движения являются выгодными и экономичными для организма; (при этом собственная частота системы определяется ее деформациями, изменением мышечных параметров и т. д.). Коэффициенты k

и L в уравнении (2.99) зависят от начальных условий движения, поэтому связь между напряжением мышцы и результирующим движением является неоднозначной. Кроме того, звенья кинематических цепей организма всегда испытывают действие внешних сил и реакций со стороны других звеньев. Поэтому возможность целенаправленного управления движением обеспечивается наличием обратной связи движущихся цепей с центральной нервной системой, осуществляемой посредством сигналов от многочисленных нервных датчиков в мышцах, сухожилиях и суставах. В связи с этим количественное описание общего характера взаимосвязи между мозговыми командами и соответствующими им движениями должно осуществляться на основе сложного дифференциального уравнения порядка не ниже 2-го, которое пока еще не сформулировано достаточно строго.

Динамика в животном мире обладает некоторыми характерными особенностями. Например, увеличение размера птицы приводит к снижению ее способности летать. Это обусловлено тем, что подъемная сила пропорциональна площади крыла и, следовательно, квадрату линейных размеров птицы, а вес тела пропорционален кубу линейных размеров. Поэтому с увеличением размера птицы возрастает нагрузка на единицу площади круга, и чрезмерно крупные птицы, (например, страус), вообще лишены способности летать. Напротив, абсолютная высота прыжка h оказывается примерно одинаковой для животных существенно различных размеров, поскольку $h \sim A/P$, где работа прыжка, пропорциональная кубу линейных размеров животного, а P – вес, причем также $P \sim l^3$; отсюда получается, что $h \sim const$.

Сложные двигательные акты наблюдаются и в мире растений. Однако их динамика может иметь совершенно иную природу. Так, пассивные, или гигроскопические, движения растений (например, разворачивание веточек в сырую погоду и свертывание в сухую у иерихонской розы, а также движения при распространении семян и плодов, как, например, у акации и др. растений) обусловлены изменением влагосодержания коллоидов, образующих оболочку растительной клетки. Напротив, природа активных движений растений имеет некоторое сходство с рассмотренным выше явлением сокращения мышц и заключается в раздражимости и сократимости белков цитоплазмы растений. Растения реагируют на внешние раздражители (изменения в окружающей среде), например, усилением интенсивности обмена, ускорением движения цитоплазмы, а также ростовыми движениями (например, раскрытие почек в теплую погоду). При этом воспринимаемое раздражение передается по цитоплазмическим телям, и затем вырабатывается отклик всего растения на раздражение, причем чересчур сильное раздражение вызывает угнетение физиологических процессов, протекающих в растении. Наибольшим сходством с сокращением мышц человека обладает механизм тумора – сократительных движений, обусловленных взаимодействием адезинтрифосфорной кислоты (АТФ) с сократительными белками. К таким движениям относятся таксисы, т. е.

перемещения в пространстве некоторых низших организмов – жгутиковых бактерий, некоторых водорослей и папоротников.

Другим важным с практической точки зрения разделом биомеханики является динамика дыхательных движений, которая изучает, прежде всего, кинематику и динамику дыхательного аппарата, его сопротивление (эластическое и неэластическое) и другие характеристики. Эти данные чрезвычайно важны, в частности, для разработки систем обеспечения жизнедеятельности человека под водой для проведения специальных работ.

Тканевое или клеточное давление, т. е. использование кислорода клетками, тканями организма для окисления органических веществ с освобождением содержащейся в них энергии, необходимой для жизнедеятельности, изучается биохимией и физиологией человека. Биохимия исследует всю совокупность процессов, обеспечивающих поступление кислорода в организм и выделение из него углекислого газа в окружающую среду. При этом органы дыхания у живых организмов чрезвычайно разнообразны; у человека дыхание осуществляется легкими и обеспечивается ритмической работой дыхательных мышц (главным образом, диафрагмы и межреберных мышц), координация которой осуществляется нервной системой. Сокращение этих мышц вызывает растяжение легких в связи с увеличением объема грудной клетки; в результате возникновения разности между атмосферным и внутрилегочным давлениями осуществляется вдох – поступление воздуха в легкие. Количество поступающего при этом воздуха называется дыхательным объемом. Выдох, т.е. уменьшение объема грудной клетки и сжатие легких, может быть пассивным и осуществляться за счет спадания грудной клетки и легких, или же активным – за счет сокращения некоторых групп мышц. При вдохе дыхательные мышцы должны преодолевать эластическое сопротивление, связанное, прежде всего, с упругостью грудной клетки, и неэластическое сопротивление, обусловленное, главным образом, силами трения, возникающими при прохождении воздуха по дыхательным путям, которые зависят от скорости потока воздуха и режима (типа) дыхания. При «спокойном» дыхании течение воздуха можно считать ламинарным в прямых участках дыхательных путей и турбулентным – в местах их разветвления или сужения. При «форсированном» дыхании скорость течения и степень его турбулентности возрастают, и перепад давления при дыхании увеличивается, что приводит и к увеличению работы дыхательных мышц. Количество воздуха, вентилирующее легкие в I мин., называется минутным объемом дыхания (МОД); он определяется произведением дыхательного объема на частоту дыхания, т.е. число дыхательных движений в I мин. (у человека – примерно 15-18). При спокойном дыхании у взрослого человека МОД составляет 5-8 л/мин. При этом около 70% МОД является «полезной» частью и используется в газообмене в легких; остальные 30% уходят на «промывание» мертвого пространства, содержащего наружный воздух, оставшийся от предыдущего вдоха, и имевшего объем около 160 мл.

Вентиляция легочных альвеол обеспечивает постоянство состава альвеолярного воздуха, в котором парциальное давление кислорода составляет около 13 кПа (100 мм Нг); а углекислого газа – 5,4 кПа (40 мм Нг). Это постоянство поддерживается тонкой регуляцией дыхания, т.е. управлением частотой и глубиной дыхания со стороны дыхательного центра, расположенного в центральной нервной системе. Исследования этих парциальных давлений и газового состава выдыхаемого воздуха, а также измерения легочных объемов и других параметров имеют важное значение для физиологии труда и спорта. В частности, важным показателем состояния человека является так называемый «дыхательный коэффициент» – ДК отношение объема выделяемого из организма углекислого газа, к объему поглощаемого за то же время кислорода. У здорового человека в состоянии покоя этот коэффициент составляет $\approx 0,85 (\pm 0,1)$ и при умеренной работе приближается к 1. При усиленной работе и гипервентиляции ДК приближается к 2. Напротив, при очень длительной и тяжелой физической работе, голодании, различных заболеваниях ДК уменьшается до 0,7 и ниже.

Важным разделом биомеханики является гемодинамика, изучающая динамику кровообращения в организме человека. В различных участках системы кровеносных сосудов создается разность гидростатических давлений, обуславливающая движение крови по сосудам. Эта разность давлений создается в результате нагнетательной функции сердца, выбрасывающего при каждом сокращении (у человека) 60-70 мл крови, или 4,3-5 л/мин (в состоянии покоя). Эта величина – «минутный» объем сердца или – сердечный выброс – является важнейшим показателем функционирования сердечнососудистой системы в целом; во время напряженной работы мышц она может достигать до 25 л/мин.

Сердечнососудистая система оказывает сопротивление движению крови из-за вязкости крови и ее трения о стенки сосудов, которое в первом приближении зависит от диаметра и длины сосуда. Математическое моделирование движения крови осуществляется на основе представления сосудистой системы как серии трубок различной длины и диаметра, соединенных последовательно на одних участках и параллельно на других. При последовательном соединении складываются сопротивления отдельных сосудов (т. е. общее сопротивление возрастает), а при параллельном – складываются обратные величины их сопротивлений (т. е. общее сопротивление уменьшается). Уровень кровяного давления P пропорционален сопротивлению сосудов R и сердечному выбросу Q

$$P=QR \text{ или } Q = \frac{P}{R}. \quad (2.100)$$

Если давление в начале сердечнососудистой системы (в артериях) равно P , а в конце системы (в конце полых вен) равно нулю, то эта формула может применяться для всей кровеносной системы в целом. Если же давление в конце системы не равно нулю, то формула принимает вид

$$Q = \frac{P_1 - P_2}{R}, \quad (2.101)$$

где P_1 и P_2 – давления в начале и в конце сосудистой системы, соответственно. Если величины P_1 , P_2 и Q известны, то можно с помощью основного уравнения гемодинамики (2.101) вычислить сосудистое или периферическое сопротивление R . Количество крови, протекающее через все участки системы в единицу времени, одинаково. Скорость движения крови обратно пропорциональна суммарному просвету данного отдела сосудистого русла. Средняя скорость кровотока в аорте составляет до 50 см/с, в полых венах – 20 см/с, а в капиллярах – значительно меньше – порядка 0,5 мм/с. Она существенно изменяется в периоды сокращения (сistolы) и расслабления (диастолы) сердца.

При биомеханических исследованиях с целью составления биомеханической характеристики движения проводится структурный, кинематический и динамический анализ. При структурном анализе определяется число степеней свободы кинематических цепей тела, устанавливается открытый или закрытый характер цепей; при кинематическом анализе определяются траектории, скорости и ускорения звеньев цепей; наконец при динамическом анализе определяются внутренние и внешние силы. Эти данные позволяют выяснить механизмы координации и регуляции движений, степень устойчивости и положения равновесия тела в пространстве и т. д. При этом используются современные, весьма разнообразные методы регистрации перемещений, скоростей и ускорений. Наибольшее распространение получили оптические методы – ускоренная киносъемка, циклография и кимоциклография (циклография заключается в последовательном фотографировании (сотни раз в секунду) меток или лампочек, укрепленных на движущихся частях тела, а кимоциклография – в съемке на передвигающуюся пленку. Однако часто используются также электрические методы регистрации механических величин с помощью датчиков углов перемещений, а также механотронов – электронных ламп, в которых управление электронным током осуществляется механическим перемещением одного или нескольких ее электродов. Механотроны дают возможность измерять малые перемещения (от 10^{-2} до 10^2 мкм), малые усилия (10^{-3} - 10^2 Гс) и ускорения (10^{-1} - 10 см/с²).

Как уже упоминалось выше, развитие биомеханики и особенно появление кибернетики, рассматривающей общие принципы управления и связи применительно к машинам и живым механизмам, стимулировало создание новой науки – бионики, решающей инженерные задачи на основе анализа структуры и жизнедеятельности живых организмов – главным образом в последние 2-3 десятилетия, хотя идеи бионики развивал еще Леонардо да Винчи (например, он пытался построить орнитоптер – летательный аппарат с машущими, как у птицы, крыльями). Основными направлениями бионики являются исследования нервной системы с целого моделирования нервных клеток – нейтронов и нейтронных сетей, исследования принципов ориентации, локации и навигации у различных животных с целью технического использования этих принципов, и т. п.

исследования. Здесь мы отметим лишь разработку на основе этих исследований принципов биоуправления приборами, механизмами и техническими устройствами – систем, в которых управляющими сигналами служат различные проявления жизнедеятельности организма (за исключением большинства произвольных движений). Наибольшее распространение получили системы биоэлектрического управления, в которых командными (управляющими) сигналами служат преобразованные и усиленные биоэлектрические потенциалы, генерируемые скелетными мышцами, сердцем, головным мозгом и др. органами. Большое практическое значение имеют разнообразные устройства с биоэлектрическими управлениями, называемые активными протезами; они управляются биопотенциалами частично ампутированных, парализованных или полностью сохранных мышц. Совершая привычные движения, человек управляет электромеханическим или пневматическим приводом, который осуществляет движения в суставах парализованной конечности или шарнирах протеза. Такие протезы уже выпускаются промышленным способом в нашей стране и в др. странах.

В технике принцип биоэлектрического управления используется в биоманипуляторах, управляемых дистанционным способом, которые служат для проведения работ в подводных или вредных для здоровья человека условиях (например, на атомных электростанциях).

Биомеханические показатели состояния сердечнососудистой системы (определяемые, например, методами кардиографии) и дыхания учитываются при диагностике и предоперационном исследовании (например, при операции на сердце и легких). Результаты исследования биомеханики дыхания и кровообращения были использованы при создании аппарата «сердце-легкие».

ГЛАВА 3 СТАТИКА

3.1 Законы равновесия тел

Как уже указывалось выше, условия равновесия тел, находящихся под действием внешних сил, исследуются в особом разделе механики – статике. Такая ситуация сложилась в силу исторических причин и на первый взгляд представляется неоправданной. По существу, статика является частным случаем динамики: из первого закона Ньютона следует, что тело находится в состоянии покоя, т. е. равновесия, при отсутствии или взаимном уравнивании действующих на него сил. Тем самым уже устанавливается основа для рассмотрения условий равновесия реальных тел. Кроме того, из 3-го закона Ньютона следует существование опорных реакций, т. е. сил противодействия, создаваемых телами при воздействии на них других тел. Это позволяет рассматривать сложные статические системы, состоящие из многих взаимодействующих звеньев (примеры см. в п. 3.2). Таким образом, из законов динамики Ньютона можно вывести закономерности статики. Тем не менее, выделение статики в особый раздел механики вполне обосновано. Прежде всего, следует отметить огромное практическое значение законов статики: по существу, первым физическим законом было установленное еще в древности правило рычага, использовавшееся еще при сооружении египетских пирамид. В настоящее время подобные простые механизмы отнюдь не потеряли своего значения, не говоря уже о более сложных статических механизмах и устройствах. Поэтому обособление статики в отдельную инженерную науку, со своей терминологией, аксиоматикой (см. ниже) и методами расчетов удобно с практической точки зрения.

Однако причины такого обособления в действительности имеют и чисто научное «происхождение». Дело в том, что законы динамики Ньютона, как уже указывалось выше, применимы к материальным точкам, а не к телам конечных размеров. Как мы увидим ниже, условия равновесия, написанные для материальных точек, недостаточны для равновесия «больших тел»: даже при наличии равных и противоположно направленных сил тело может не оставаться в покое, а совершать вращение вокруг некоторой оси (проходящей через центр тяжести тела, см. выше). Поэтому условия равновесия таких тел требуют особого рассмотрения, с привлечением дополнительных соображений – аксиом статики, которые будут перечислены ниже.

Рассмотрим вначале условия равновесия материальной точки под действием системы внешних сил. Как известно, опыт показывает, что сила есть векторная величина, потому при наличии нескольких сил их результирующая равнодействующая - определяется как векторная сумма составляющих сил:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots \quad (3.1)$$

Полное ускорение тела \vec{a} , будет определяться, согласно 2-му закону Ньютона, следующим образом:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{1}{m} (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots). \quad (3.2)$$

Ясно, что если $\sum \vec{F}_i = 0$, то $a=0$ и $\mathbf{V}=\text{const}$, то есть первоначально покоившаяся ($\mathbf{V}=0$) материальная точка остается в покое, если векторная сумма всех действующих на нее сил равна нулю. Для этого, согласно известным положениям векторной алгебры, вектора составляющих сил

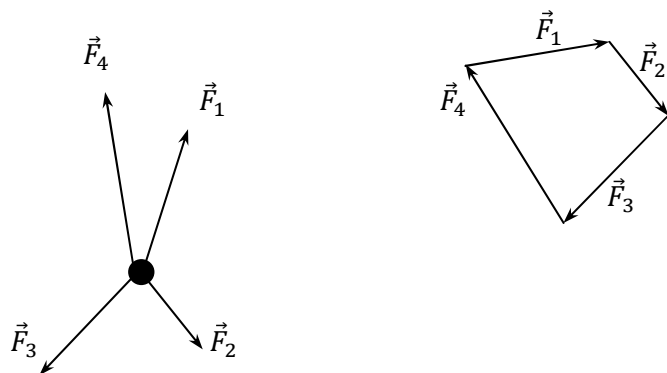


Рис. 3.1

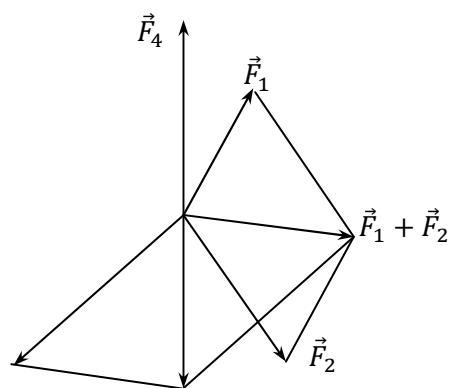
должны образовывать замкнутый многоугольник – рис. 3.1. Такое построение часто оказывается более простым, чем последовательное сложение по правилу параллелограмма (это построение показано на рис. 3.2 на примере сил, изображенных на рис. 3.1). Силы могут и не находиться в одной плоскости; в этом случае многоугольник будет пространственным.

Спроектировав силы, входящие в (3.1), на координатные оси X , Y , Z и обозначив соответствующие проекции \vec{F} через X , Y , Z , соответственно, находим, что векторное условие равновесия материальной точки

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0 \quad (3.3)$$

эквивалентно системе трех скалярных равенств:

$$\begin{aligned} X &= \sum_i X_i = X_1 + X_2 + \dots = 0 \\ Y &= \sum_i Y_i = Y_1 + Y_2 + \dots = 0 \\ Z &= \sum_i Z_i = Z_1 + Z_2 + \dots = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$



$$\begin{aligned} \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 &= -\vec{F}_4 \\ \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 &= 0 \end{aligned}$$

Рис. 3.2

При практических расчетах обычно удобно использовать скалярную систему (3.4).

Аналогично правилу сложения сил (3.1), можно ввести и правило разложения сил на отдельные составляющие. При этом обычно достаточно разложить силу на две или

три составляющие, в зависимости от поставленной задачи. Практически это разложение производится с помощью правила параллелограмма, как показано на рис. 3.3.

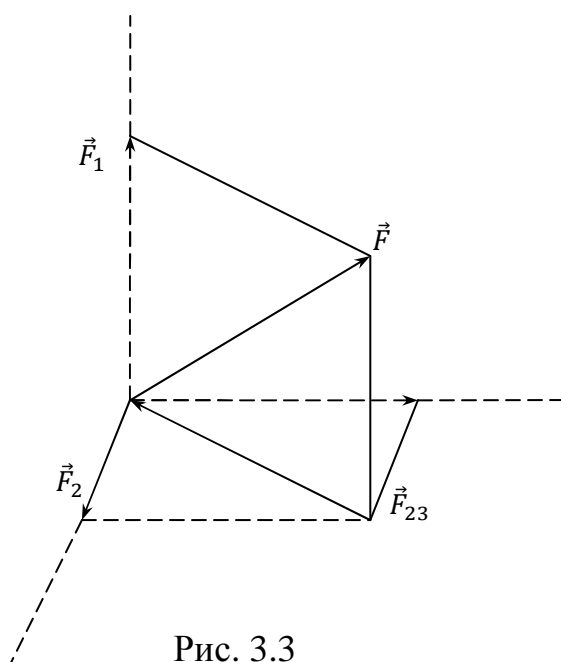


Рис. 3.3

Итак, для того, чтобы материальная точка находилась в равновесии, условие (3.3) или (3.4) являются необходимыми и достаточными. Из них, в частности, следует, что при наличии всего лишь двух сил равновесия возможно только при условии, что эти силы равны по величине и противоположны по направлению. Такой случай равновесия часто реализуется в природе и технике, поскольку из-за наличия сил упругости (см. ниже, п. 3.2) приложенные к телам усилия вызывают уравнивающие их реакции опоры $\vec{F}_p = -\vec{F}$; примеров такого

типа, показанного на рис. 3.4, можно привести бесчисленное множество.

Возможность векторного разложения сил имеет большое практическое значение. Рассмотрим, например, провис провода под действием подвешенного на нем груза (например, уличного фонаря или дорожного знака) – рис. 3.5. Если угол α мал, то, как видно из чертежа, силы натяжения провода F_H , на которое раскладывается вес груза P , приближенно равны $F_H = \frac{P}{2\alpha}$. Ясно, что для полной ликвидации провиса необходима бесконечная сила натяжения ($\alpha \rightarrow 0$, $F_\alpha \rightarrow \infty$).

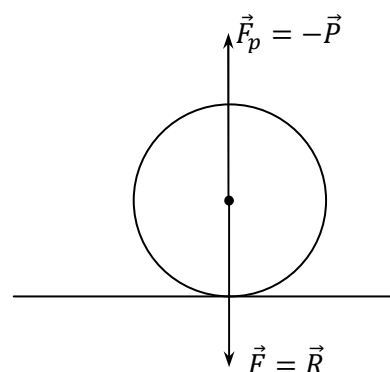


Рис. 3.4

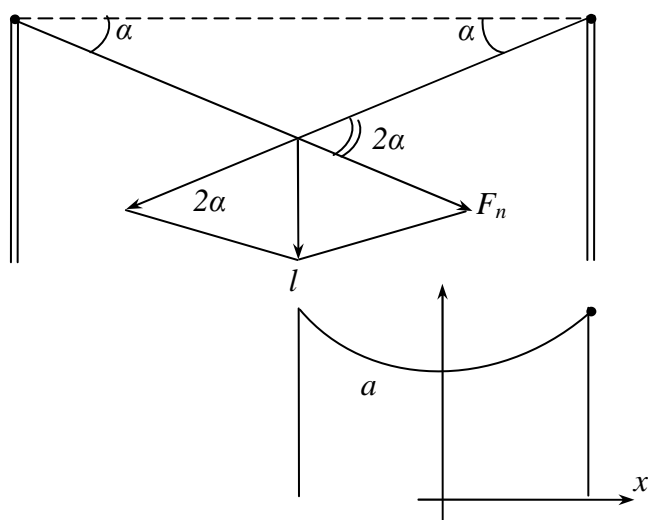


Рис. 3.5

Однако при значительных углах α , когда сила F_H значительно превышает P , провод просто оборвется. Следовательно, никакой провод с грузом нельзя натянуть строго горизонтально. Но это же относится и к проводу без груза, поскольку любой провод имеет соответственный вес.

Исследование показывает, что в этом случае прогиб происходит по цепной линии $y = achx/a = a \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}$. Однако суть дела от этого не изменяется – провес всегда существует при любом, сколь угодно малом весе провода. Это явление проявляется весьма вредно в практике сооружения линий электропередач. Сооружение таких линий связано с осуществлением очень большого объема работ – по расчистке просек, подготовке фундаментов для опор, установке металлических вышек (мачт), подвешиванию изоляторов, а затем проводов и т. д. Поэтому желательно ставить как можно меньше опор. Однако при уменьшении числа опор возрастает расстояние между ними и тем самым вес провода между ними, а, следовательно, и провес проводов. При этом возрастает опасность «схлестывания» проводов при сильном ветре, что может вызвать аварию. Поэтому приходится тщательно искать компромиссное инженерное решение. В то же время данное явление можно и практически использовать в определенных случаях. Например, при буксировке барж при наличии волнения на воде на буксирный трос вешают различные грузы (тяжелые металлические предметы типа якорей, цепей и т. д.) с целью создать провис троса. Тем самым его натяжение уменьшается, и снижается вероятность того, что трос оборвется при случайном натяжении троса, когда баржу отбросит волной. Разложение небольшой силы на большие составляющие может использоваться также для перемещения

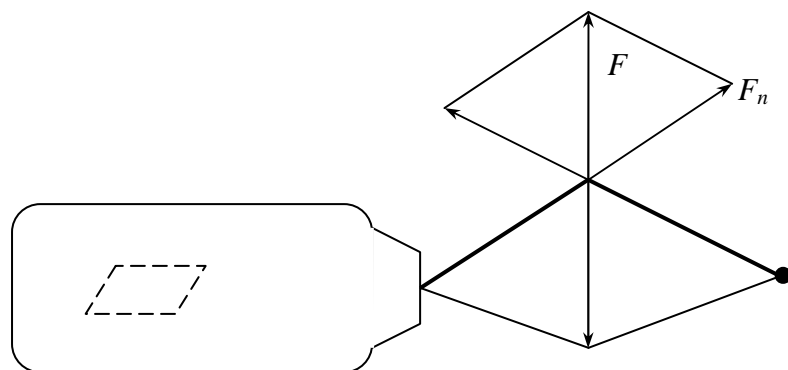


Рис. 3.6

застрявших в грязи транспортных средств (как показано на рис. 3.6). Привязав трос к автомобилю и к ближайшему дереву, и прикладывая сравнительно небольшую поперечную силу F , можно создать силу натяжения $F_H \gg F$, достаточную для перемещения автомобиля. При этом, разумеется,

следует соблюдать осторожность, ибо резкое увеличение натяжения троса при быстром приложении силы F может привести к обрыву троса.

Теоретически разложение данной силы на составляющие можно осуществить по любым направлениям. Однако на практике такое разложение целесообразно проводить лишь по таким направлениям, в которых могут действовать другие силы или развиваться реакции опор, иначе можно прийти к абсурдным выводам. Рассмотрим следующий пример, взятый из книги В.П. Лишевского: шар находится в углу, образованном наклонной и горизонтальной плоскостями – рис. 3.7. Разложим вес шара P на составляющие F_1 и F_2 , направленные, соответственно, перпендикулярно

наклонной и параллельно горизонтальной плоскости. Сила F_1 будет

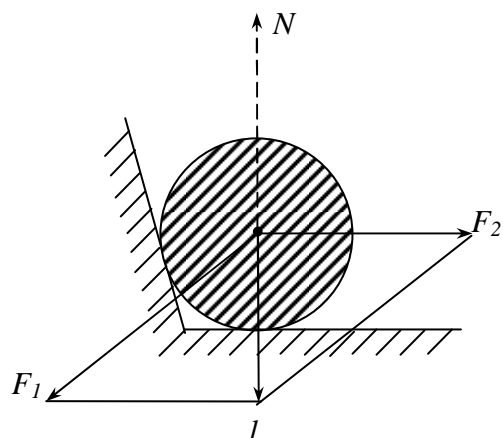


Рис. 3.7

уравновешена реакцией наклонной плоскости, а сила F_2 должна вызвать движение шара вдоль горизонтальной плоскости. В действительности, разумеется, ничего подобного наблюдаться не будет. В этом направлении никаких сил и реакций нет, и разложение на рис. 3.7 нерационально. В действительности на шар действуют лишь сила веса P и реакция горизонтальной опоры N , которые взаимно уравниваются, и шар, естественно, находится в покое. Однако не следует полагать, что разложение, показанное на

рис. 3.7, ошибочно и обязательно должно привести к абсурдному выводу, как утверждается в упомянутой книге. Дело в том, что, разлагая силу веса P по указанным направлениям, необходимо разложить по этим же направлениям и вторую силу, действующую на шар – реакцию опоры N (рис. 3.8). Произведя такое разложение (рис. 3.8), мы увидим, что возникающие при этом

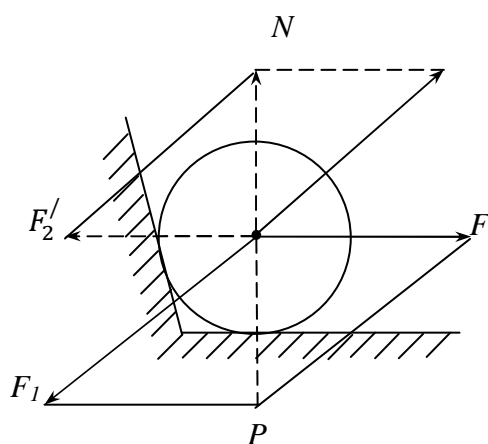


Рис. 3.8

составляющие F_1^l и F_2^l в точности уравнивают силы F_1 и F_2 , так что шар остается в равновесии. Таким образом, разложение на рис. 3.8 является просто излишним, хотя теоретически вполне законным при условии его правильного осуществления.

Примеры разложения сил встречаются в инженерной практике очень часто – при расчете движения тел по наклонной плоскости, движения тел по искривленной траектории, при

рассмотрении колебаний маятников и т. д.

Не менее важны для практики случаи сложения сил, поскольку в реальных условиях на тело всегда действует одновременно несколько сил. Так, например, на ракету, движущуюся около Земли, действуют сила веса, сила реактивной тяги, лобовое сопротивление воздуха (а также подъемная сила – при наличии несущих поверхностей). Во многих из этих случаев тело конечных размеров можно рассматривать как материальную точку и применять к нему условия равновесия (3.4). Однако при рассмотрении ракетодинамики в п. 2.4 мы убедились, что эти условия применяются лишь для исследования движения центра масс тела. При отсутствии (или

уравновешивании) внешних сил центр масс тела остается в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения. Коренное отличие «большого» тела от материальной точки, как указывалось выше, заключается в возможности его вращения вокруг некоторой оси, проходящей через центр масс, даже при выполнении условий (3.4). Поэтому рассмотрим условия равновесия тел более подробно.

Предварительно заметим, что в указанном выше случае, когда вращением тела не интересуются и считают его материальной точкой, основными уравнениями статики по существу являются законы динамики Ньютона, как уже отмечалось выше. Поэтому на практике рассмотрение конкретных условий равновесия тел удобно проводить с использованием введенных Ньютоном пяти аксиом статики.

1) Свободное абсолютно твердое тело находится в состоянии равновесия (то есть покоя или равномерного прямолинейного движения), если действующие на него силы взаимно уравновешиваются (в частном случае двух сил – они равны по величине и противоположны по направлению). Это положение является одновременно и 1-м законом динамики Ньютона и представляет собой частный случай 2-го закона динамики (см. п. 2.2).

2) Равновесие твердого тела не нарушается при переносе действующей на него силы вдоль линии ее действия. Пусть сила F_1 действует

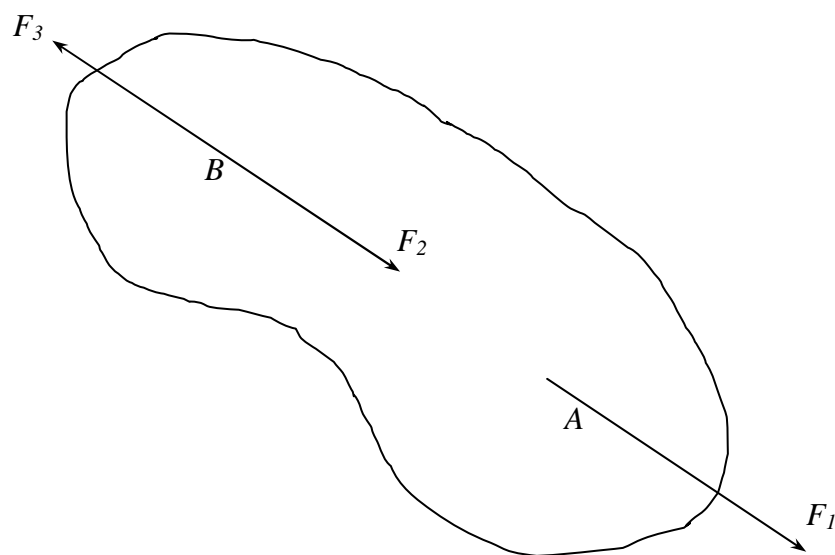


Рис. 3.9

на тело в точке А (рис. 3.9). Приложим в точке В на линии действия этой силы две равные по величине и противоположные по направлениям силы F_2 , F_3 причем $|F_2| = |F_1|$, что, согласно 1-й аксиоме, не нарушает состояние равновесия тела. Но, согласно этой же аксиоме, уравновешиваются и силы F_1 и F_3 , так что

остается лишь одна сила F_2 , действующая на тело так же, как и равная ей сила F_1 .

3) Равнодействующая двух сил, приложенных в одной точке под углом друг к другу, является диагональю параллелограмма, построенного на векторах этих сил (рис. 3.10). Эта аксиома отражает векторный характер силы; построение параллелограмма на векторах сил эквивалентно

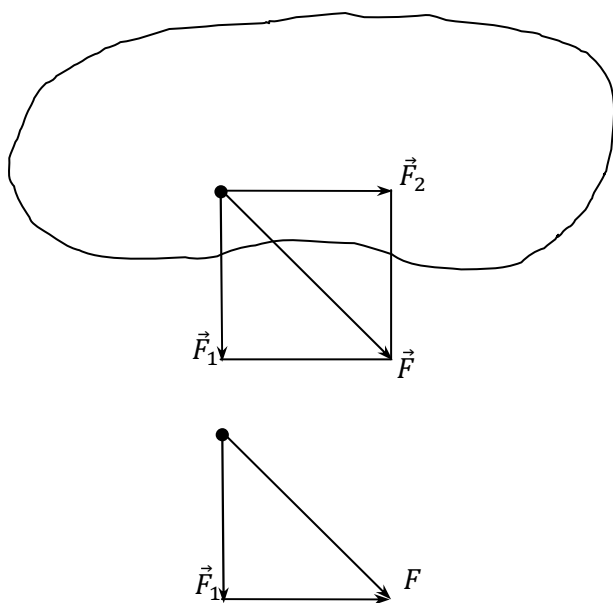


Рис. 3.10

построению плана сил, как показано отдельно на рис. 3.10.

4) Действие одного тела на другое вызывает равное и противоположно направленное противодействие со стороны второго тела («действие равно противодействию»). Это положение одновременно является 3-м законом динамики Ньютона (п. 2.1).

5) Принцип отвердевания: равновесие деформируемого тела не нарушится, если это тело станет абсолютно твердым. Отсюда, в частности, следует, что условия равновесия, необходимые и достаточные для абсолютно твердого

тела, являются лишь необходимыми, но не достаточными для деформируемого тела. Заметим, что принцип отвердевания используется и в гидростатике (см. п. 6.1).

Эти аксиомы удобно использовать при качественном анализе статического состояния тел, без проведения расчетов действующих усилий. Подчеркнем также, что во всех этих случаях тело считается абсолютно твердым, т. е. не подверженным деформации; реальные свойства твердых тел будут рассмотрены ниже (см. п. 3.2).

Представим себе твердое тело простейшей геометрической формы

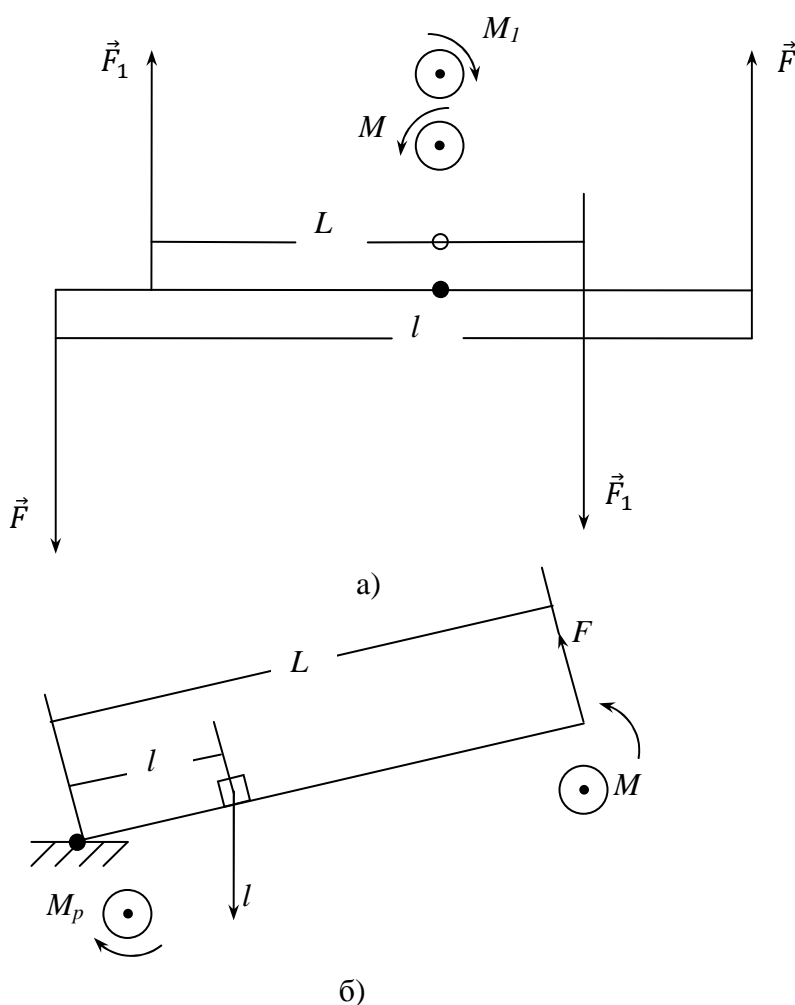


Рис. 3.11

(стержень), к которому на концах приложены направленные силы – пара сил (рис. 3.11а). В этом случае, как было установлено в п. 2.2, на тело действует вращательный момент $M=Fl$, который создает вращение тела вокруг оси, проходящей через его центр тяжести O .

Согласно основному закону динамики вращательного движения (2.27), этот момент обуславливает угловое ускорение тела $\vec{\beta} = \frac{\vec{M}}{I}$, где I – момент инерции тела. Если теперь создать вторую пару сил F_1 с моментом $M_1=F_1L$, то результирующее угловое ускорение будет равно:

$$\vec{\beta}_p = \vec{\beta} + \vec{\beta}_1 = \frac{\vec{M} + \vec{M}_1}{I}. \quad (3.5)$$

Если тело первоначально покоилось ($\omega_0=0$), то это состояние сохранится при условии $\vec{\beta}_p = 0$, или $\vec{M} = -\vec{M}_1$, то есть моменты \vec{M} и $-\vec{M}_1$ должны иметь противоположные направления, как показано на рис. 3.11а, а их величины равны, откуда следует, что

$$Fl = F_1L. \quad (3.6)$$

Это и будет условием равновесия тела в данном случае.

В качестве другого примера рассмотрим использование простейшего рычага для подъема груза P , как показано на рис. 3.11б. Груз P создает момент $M_p=Pl$, направленный от нас (перпендикулярно плоскости чертежа), а сила поднятия груза P – создает момент $M=F_l$, направленный к нам. Условие равновесия в этом случае имеет вид:

$$FL = Pl, \quad F = P \frac{l}{L}. \quad (3.7)$$

Таким образом, для равномерного поднятия груза ($\beta=0$, $\omega=const$) необходимо приложить силу F , которая меньше веса груза в $\frac{L}{l}$ раз (это отношение характеризует «выигрыш в силе», обеспечиваемый рычагом).

Действие пары сил часто встречается в технике. В частности, на создании вращения под действием пары сил основано использование различных инструментов для ввинчивания и вывинчивания винтов, гаек и шурупов – гаечных ключей, отверток и т. д.

Анализ этих и других многочисленных аналогичных примеров показывает, что твердое тело, которое может совершать вращательное движение вокруг какой-либо оси, остается в равновесии лишь при равенстве нулю суммы моментов всех действующих на него сил относительно этой оси:

$$\vec{M} = \sum_i M_i = M_1 + M_2 + \dots = 0. \quad (3.8)$$

Если тело не закреплено в какой-либо точке, т. е. не имеет фиксированной оси вращения, то указанные моменты необходимо определять относительно оси, проходящей через центр масс тела.

Помимо вращательного движения, тело может совершать также и поступательные движения, причем это движение может быть описано как движение материальной точки, совпадающей с центром массы тела, под действием сил, равнодействующая которых приложена в этой же точке (в которой, к тому же, сосредоточена вся масса тела). Для того, что бы тело не

совершало это движение, необходимо выполнить условия равновесия (3.3). Таким образом, полная система уравнений равновесия твердого тела, в отличие от материальной точки, имеет вид:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0, \sum_i \vec{M}_i = 0, \quad (3.9)$$

т. е. должны быть учтены все действующие силы вместе с моментами, которые они создают относительно возможной оси вращения. Ясно, что расчеты статических состояний твердого тела могут быть существенно сложнее, чем в случае материальной точки, ввиду возможного сложного характера приложения сил. Примеры таких расчетов будут приведены в п. 3.3.

3.2 Упругие инерционные силы

Как указывалось выше, при использовании аксиом статики Ньютона твердое тело считается абсолютно твердым, т. е. не подверженным деформации. Реальные тела в той или иной степени всегда обнаруживают изменения формы и объема под действием внешних сил. Учет этого обстоятельства чрезвычайно важен при решении инженерных задач, в частности, при конструировании машин, механизмов и строительных сооружений. Во многих других случаях даже небольшая деформация одного из звеньев механизма может вызвать нарушение его функционирования, а иногда и полный отказ.

Опыт показывает, что при небольших деформациях они являются «упругими», т.е. после прекращения внешнего воздействия первоначальная форма и размеры тела восстанавливаются. Это означает, что при деформировании тела в нем возникают «упругие силы», возрастающие с увеличением деформации; при снятии внешней нагрузки эти силы возвращают тело в исходное состояние. Кроме того, еще Гуком в 1678 г. опытным путем было установлено, что увеличение длины при растяжении приблизительно пропорционально внешней нагрузке. Поскольку при медленном («квазистатическом» или «квазиравновесном») деформировании тело в любой момент находится в состоянии равновесия, то отсюда следует, что упругие силы, возникающие в деформированном материале, в первом приближении пропорциональны величине деформации (закон Гука). Наконец, опыт показывает, что при определенной величине внешнего деформирующего усилия («предел упругости»), которая существенно различна для разных материалов, свойства материалов становятся «неупругими»: после снятия внешней нагрузки первоначальная форма и размеры тела не восстанавливаются, и, в конечном счете, наступает разрушение материала.

Простейшим видом деформации является «растяжение-сжатие», т. е. удлинения или укорочения тела под действием растягивающего или сжимающего внешнего усилия. Таким деформациям подвергаются, в частности, различные опоры, кронштейны и т. п. Может оказаться, что

детали одной и той же конструкции находятся в различных условиях растяжения-сжатия. Пример приведен на рис. 3.12: построив разложения силы веса груза P , нетрудно убедиться, что опору 1 следует рассчитывать на растяжение, а опору 2 на сжатие. Такие расчеты являются предметом отдельной технической науки – сопротивление материалов (см. п. 3.5). Другим важнейшим типом деформации является сдвиг. В то время как деформация растяжения-сжатия возникает под действием нормальной (к поверхности деформируемого тела) нагрузки, деформация сдвига появляется при наличии касательного (тангенциального) внешнего усилия.

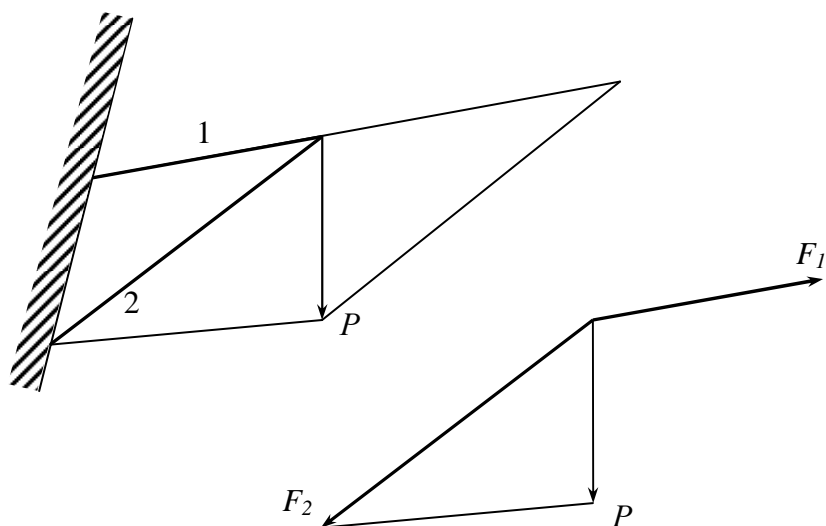


Рис. 3.12

Простейший пример представлен на рис. 3.12: под действием касательной силы P происходит сдвиг (относительное смещение) слоев тела друг относительно друга, первоначально прямые углы кубика уменьшаются на некоторый угол γ .

Другие виды деформации по существу приводятся к этим двум основным типам. Ниже в п. 3.2,

будет подробно рассмотрена деформация кручения стержня и показано, что

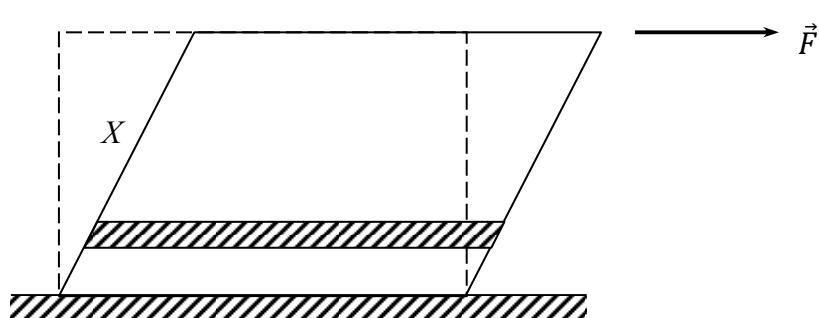


Рис. 3.13

при этом происходит сдвиг слоев материала в направлении окружности стержня. Другим важным типом деформации является изгиб, которому подвергаются многочисленные детали конструкций (консоли, балки) и машин (оси

маховиков, т. п.). Изгиб представляет собой по существу растяжение волокон материала выше некоторой «средней» линии OO' и их сжатие ниже этой линии. Слой, заключающий в себе среднюю линию, является «нейтральным» и не подвергается деформации. Таким образом, изгиб представляет собой сложную деформацию типа «растяжение-сжатие».

Характер нагружения тела, вызывающий деформацию того или иного типа, будет подробно рассмотрен в п. 3.5. Основными количественными

характеристиками сопротивления тела растяжению или сдвигу являются соответствующие модули упругости: модуль Юнга (модуль растяжения) E модуль сдвига G , которые определяются из выражений для закона Гука в этих случаях:

$$\sigma = E \frac{\Delta l}{l_0} = \varepsilon E, \tau = G \gamma = \frac{F_c}{S}, \quad (3.10)$$

где $\sigma = \frac{F_n}{S}$ – растягивающее напряжение (F_n – растягивающее усилие, S – площадь поверхности, по которой оно действует), τ – сдвигающее напряжение (F_c – сдвигающее усилие, S – площадь поверхности, по которой оно действует), $\frac{\Delta l_0}{l_0} = \varepsilon$ – относительное удлинение (l_0 – первоначальная длина), γ – угол сдвига (см. рис. 3.14). Еще одной важной характеристикой упругих свойств материала является коэффициент Пуассона или модуль поперечного сжатия ϑ , характеризующий относительное сокращение ребра поперечной грани (относительно напряжения растяжения) ε_n :

$$\varepsilon_n = \vartheta \varepsilon = \vartheta \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (3.11)$$

Из того условия видно, что при растяжении объем тела не может уменьшаться, можно показать, что величина ϑ не может быть больше $1/2$ (обычно она остается примерно $1/3$). Элементарная теория изотропных твердых тел (свойства которых одинаковы по всем направлениям) приводит к выводу о взаимосвязи между указанными тремя характеристиками в виде:

$$G = \frac{E}{2(1+\vartheta)}. \quad (3.12)$$

Заметим, что модуль сдвига G можно ввести лишь для твердых тел; жидкости и газы не сопротивляются сдвигу (это свойство называется текучестью). Как мы увидим ниже, это обстоятельство является весьма важным. В частности, им обусловлена возможность поперечных упругих волн в твердых телах и их невозможность в жидкостях и газах. Основным типом деформации жидкостей и газов является деформация всестороннего

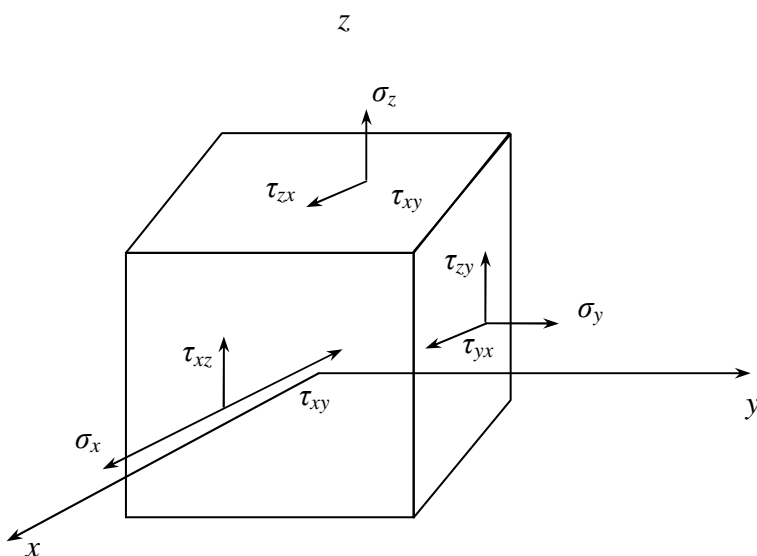


Рис. 3.14

«гидростатического» сжатия под действием приложенного равномерного со всех сторон внешнего усилия: она характеризуется относительным изменением объема (объемной деформацией) $\chi = \frac{\Delta V}{V}$, которая, согласно закону Гука равна:

$$\chi = \frac{P}{K}, \quad (3.13)$$

где P – гидростатическое давление, K – модуль

объемной деформации. Разумеется, такой деформации могут подвергаться и твердые тела. В этом случае для изотропного тела модуль K определяется выражением:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}. \quad (3.14)$$

Упругие напряжения в любой точке деформируемого тела можно охарактеризовать, выделив элементарный (малый) кубик в окрестности этой точки и определив касательные и нормальные напряжения, как показано на рис. 3.14. Детальный анализ различных типов напряженного состояния, заданного этими значениями напряжений, можно найти в специальной литературе, указанной в конце книги. Деформации растяжения этого кубика вдоль осей X, Y, Z ($\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$) определяются нормальными напряжениями ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$). С учетом эффекта поперечного сжатия при растяжении использование закона Гука приводит к следующим выражениям для деформации:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{aligned} \quad (3.15)$$

Для деформаций сдвига можно записать:

$$\gamma_x = \frac{\tau_x}{G}, \gamma_y = \frac{\tau_y}{G}, \gamma_z = \frac{\tau_z}{G} \quad (3.16)$$

Тем самым задается напряжение – деформированное состояние тела в каждой точке.

Все изложенное выше относилось к изотропным материалам (определение которых было дано выше). Однако многие реальные твердые тела (например, монокристаллы) являются анизотропными, и их модули упругости существенно различны по разным направлениям (причина этого будет выяснена ниже, в п. 3.4). При этом напряжения, деформации и модули упругости приобретают тензорный характер, и связь между ними описывается обобщенным законом Гука. Тензор напряжений \check{S} представляется матрицей из 9 компонентов (см. рис. 3.15):

$$\check{S} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}. \quad (3.17)$$

При этом из условий равновесия тела по отношению к трем осям вращения можно показать, что $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$, т. е. неизвестными являются лишь 6 компонент тензора (3.17). При всестороннем (гидростатическом) сжатии тензор напряжений принимает особенно простой вид («сферический тензор»):

$$\check{S}_n = \begin{vmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{vmatrix}. \quad (3.20)$$

В других случаях тензор (3.17) можно представить в виде суммы

шарового тензора \widetilde{S}_n и «девиатора напряжений» \widetilde{S}_∂ :

$$\check{S} = \widetilde{S}_n + \widetilde{S}_\partial, \widetilde{S}_\partial = \begin{vmatrix} \sigma_x - p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - p & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - p \end{vmatrix}. \quad (3.19)$$

Смысл такого представления полного тензора напряжений заключается в том, что описывает только изменения объема, а \widetilde{S}_∂ – только изменения формы тела, что удобно при практическом анализе возможных напряженных состояний, возникающих в материалах в процессе их механической обработки.

Аналогичным образом вводится тензор деформаций

$$\check{\epsilon} = \begin{vmatrix} \epsilon_x & 1/2\gamma_{xy} & 1/2\gamma_{xz} \\ 1/2\gamma_{yx} & \epsilon_y & 1/2\gamma_{yz} \\ 1/2\gamma_{zx} & 1/2\gamma_{zy} & \epsilon_z \end{vmatrix}. \quad (3.20)$$

Здесь компоненты $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ характеризуют удлинение (растяжение-сжатие), а остальные компоненты – сдвиг в деформированном теле. Неизвестными и здесь являются только 6 компонент в силу условий симметрии:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \gamma_{zx} = \gamma_{xz}, \gamma_{zy} = \gamma_{yz}. \quad (3.21)$$

В случае гидростатического сжатия (растяжения) тензор $\check{\epsilon}$ примет «шаровый» вид:

$$\check{\epsilon} = \check{\epsilon}_n = \begin{vmatrix} \chi & 0 & 0 \\ 0 & \chi & 0 \\ 0 & 0 & \chi \end{vmatrix}. \quad (3.22)$$

Полный тензор $\check{\epsilon}$ и в этом случае удобно представить в виде суммы «шарового» тензора $\check{\epsilon}_n$ и «девиатора», построение которого аналогично (3.19).

Модули упругости анизотропного твердого тела образуют матрицу из 36 компонент:

$$C_{ij} = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{vmatrix}. \quad (3.23)$$

В силу условий симметрии:

$$C_{12} = C_{21}, C_{13} = C_{31} \dots. \quad (3.24)$$

Число независимых компонент матрицы (3.23) равно 21. Если все эти величины и тензор деформации (3.20) известны, то компоненты тензора напряжений (3.17) вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= C_{11}\varepsilon_x + C_{12}\varepsilon_y + C_{13}\varepsilon_z + C_{14}\gamma_{xy} + C_{15}\gamma_{yz} + C_{16}\gamma_{xz} \\
\sigma_y &= C_{21}\varepsilon_x + C_{22}\varepsilon_y + C_{23}\varepsilon_z + C_{24}\gamma_{xy} + C_{25}\gamma_{yz} + C_{26}\gamma_{xz} \\
\sigma_z &= C_{31}\varepsilon_x + C_{32}\varepsilon_y + C_{33}\varepsilon_z + C_{34}\gamma_{xy} + C_{35}\gamma_{yz} + C_{36}\gamma_{xz} \\
\tau_{xy} &= C_{41}\varepsilon_x + C_{42}\varepsilon_y + C_{43}\varepsilon_z + C_{44}\gamma_{xy} + C_{45}\gamma_{yz} + C_{46}\gamma_{xz} \\
\tau_{yz} &= C_{51}\varepsilon_x + C_{52}\varepsilon_y + C_{53}\varepsilon_z + C_{54}\gamma_{xy} + C_{55}\gamma_{yz} + C_{56}\gamma_{xz} \\
\tau_{zx} &= C_{61}\varepsilon_x + C_{62}\varepsilon_y + C_{63}\varepsilon_z + C_{64}\gamma_{xy} + C_{65}\gamma_{yz} + C_{66}\gamma_{xz}
\end{aligned} \quad (3.25)$$

Можно вычислить также тензор деформации, если известен тензор напряжений и матрица величин S_{ij} , называемых «коэффициентами упругости» или «упругими податливостями». Они образуют матрицу типа (3.23) при наличии условий (3.24). Компоненты тензора деформации вычисляются по формулам, аналогичным (3.25):

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= S_{11}\sigma_x + S_{12}\sigma_y + S_{13}\sigma_z + S_{14}\tau_{xy} + S_{15}\tau_{yz} + S_{16}\tau_{xz} \\
&\dots\dots\dots \\
&\dots\dots\dots \\
\gamma_x &= S_{41}\sigma_x + S_{42}\sigma_y + S_{43}\sigma_z + S_{44}\tau_{xy} + S_{45}\tau_{yz} + S_{46}\tau_{xz} \\
&\dots\dots\dots \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned} \quad (3.26)$$

Между величинами C_{ij} и S_{ij} существует определенная связь, которая, как и вид самих этих матриц, зависит от структуры кристаллической решетки твердых тел (аморфные твердые тела обычно являются изотропными). Например, для кубической решетки матрица модулей упругости содержит всего лишь три независимых модуля:

$$C_{ij} = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (3.27)$$

Формула для соответствующих компонентов тензора «упругих податливостей» имеет вид, в этом случае:

$$S_{44} = \frac{1}{C_{44}}; S_{11} = \frac{C_{11} + C_{12}}{(C_{11} + C_{12})(C_{11} + 2C_{12})}; S_{12} = \frac{C_{12}}{(C_{11} - C_{12})(C_{11} + 2C_{12})}. \quad (3.28)$$

Упругие постоянные твердых материалов определяются в процессе различных механических испытаний (см. п. 3.4) и содержатся в специальных таблицах.

Основная роль сил упругости в технике заключается в появлении «реакций» деталей и звеньев машин механизмов (а также обрабатываемых материалов) на приложенные внешние усилия (нагрузки). Нагрузки, прикладываемые от внешних источников, могут создаваться сколь угодно медленно и тогда можно считать, что они являются статическими. Возникающие при этом реакции в деталях машин и опорах изучаются в сопротивлении материалов (см. п. 3.5). Однако при наличии вращения с большими скоростями (роторы двигателей, маховики турбин и т. д.) в различных деталях и узлах могут возникать очень большие внутренние

усилия – силы «инерции», которые также могут вызвать значительные деформации (и даже разрушение) деталей. Эти усилия являются «динамическими», поскольку неразрывно связаны с движением. Однако оказывается возможным учесть их таким образом, что задача определения реакций (внутренних упругих напряжений) решается средствами статики. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Пусть некоторая система отсчета 1 (например, вагон) приходит в движение относительно инерциальной системы отсчета 2 (например, Земли) – (рис. 3.15а). В системе 1 находится некоторое незакрепленное (в направлении вектора \vec{a}) тело А. Через некоторое время окажется, что тело А сместилось относительно системы 1 в направлении вектора $(-\vec{a})$. Если же тело прикрепить к системе 1 пружиной, то изменение положения тела А относительно системы 1 прекратится после растяжения пружины на некоторую величину (рис. 3.15б).

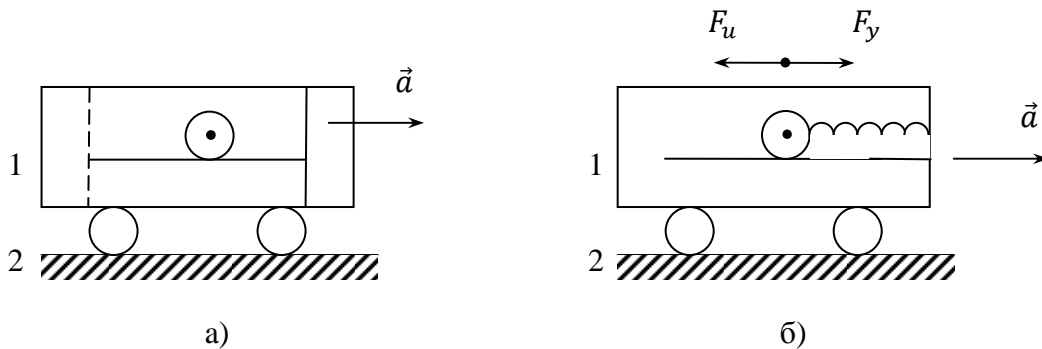


Рис. 3.15

Наблюдатели в системах 1 и 2 будут трактовать эти явления различным образом. Для наблюдателя, связанного с инерциальной системой отсчета 2, смещение тела А относительно системы 1, будет обусловлено действующим в системе 2 законом инерции, вследствие которого тело А отстанет от движения системы 1, поскольку никакие силы на него не действуют, и оно остается в состоянии покоя. Если тело удерживается растянутой пружиной, то развиваемая ею упругая сила («реакция связи») стала достаточной для ускоренного движения тела вместе с системой 1 с ускорением \vec{a} , и согласно второму закону Ньютона:

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (3.29)$$

Наблюдатель, связанный с неинерциальной системой отсчета 1, объясняет эти явления иначе. Для него смещение тела на рис. 3.15а объясняется действием некоторой силы инерции F_u , не связанной с воздействием других тел, поскольку в этой системе закон инерции не выполняется. В случае равновесия тел в системе 1 (на рис. 3.15б) сила инерции компенсируется силой упругости пружины, так что, по законам статики:

$$\vec{F}_u + \vec{F}_y = 0. \quad (3.30)$$

Сравнивая (3.29) и (3.30), мы приходим к выводу, что

$$\vec{F}_u = -m\vec{a}. \quad (3.31)$$

т.е. инерциальная сила равна $-ma$ (3.31).

Таким образом, для того чтобы использовать законы статики в неинерциальной системе 1, необходимо допустить наличие особых «сил инерции», специфика которых заключается в том, что они не характеризуют воздействие каких-либо реальных тел на исследуемое тело. Следовательно, динамическая задача о движении тела А относительно инерциальной системы отсчета 2 сводится к статической задаче о равновесии тела в неинерциальной системе I путем введения силы инерции (3.31), и условие равновесия будет иметь вид:

$$\vec{F} + \vec{F}_u = 0, \quad (3.32)$$

где \vec{F} – равнодействующая всех «материальных» сил, действующих на тело в системе отсчета 1 (в частности, упругих реакций связей). В этой возможности свести решение динамической задачи к статической заключается содержание так называемого принципа Даламбера.

Неинерциальной является также любая система отсчета, совершающая вращательное движение в инерциальной системе отсчета. В этой системе 1 на тело А, совершающее вращение вместе со всей системой (т. е. покоящееся в этой системе), должна действовать центростремительная сила F_u , сообщая телу центростремительное ускорение и направленная к центру вращения (рис. 3.16):

$$\vec{F}_u = m\vec{a}_u = -m\omega^2\vec{r}. \quad (3.33)$$

Этой силой обычно является упругая сила связи между элементами вращающегося тела F_y . Согласно принципу Даламбера, условия равновесия некоторого тела А во вращающейся системе отсчета можно записать в виде:

$$\vec{F}_y + F_u = 0, \quad (3.34)$$

где величина

$$F_{иц} = m\omega^2 r \quad (3.35)$$

является инерционной («центробежной») силой, обусловленной вращением системы 1 и направленной противоположно

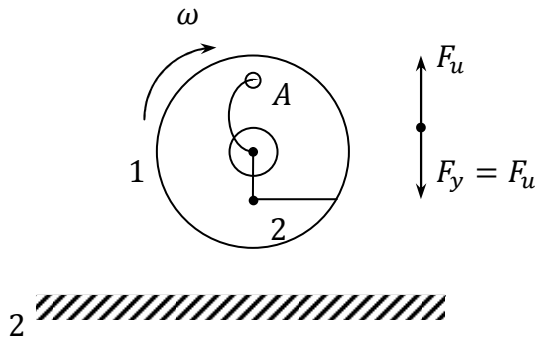


Рис. 3.16

реакции пружины F_y . Такая сила действует, например, на все материальные точки, образующие вращающееся твердое тело (например, колесо турбины). Очень существенно, что величина силы упругости всегда принципиально ограничена предельной прочностью связей; согласно изложенному выше (см. п. 3.4), для каждого материала существует предельное деформирующее усилие, выше которого его деформация становится неупругой, а при дальнейшем увеличении усилия материал разрушается. Поэтому при

больших величинах m , ω и r , входящих в формулу (3.33), условие (3.34) будет неизбежно нарушено, что приведет к разрушению вращающегося тела.

Поэтому выполнение условия (3.34) обязательно должно проверяться при инженерных расчетах деталей машин, вращающихся с большой скоростью (особенно крупных и массивных).

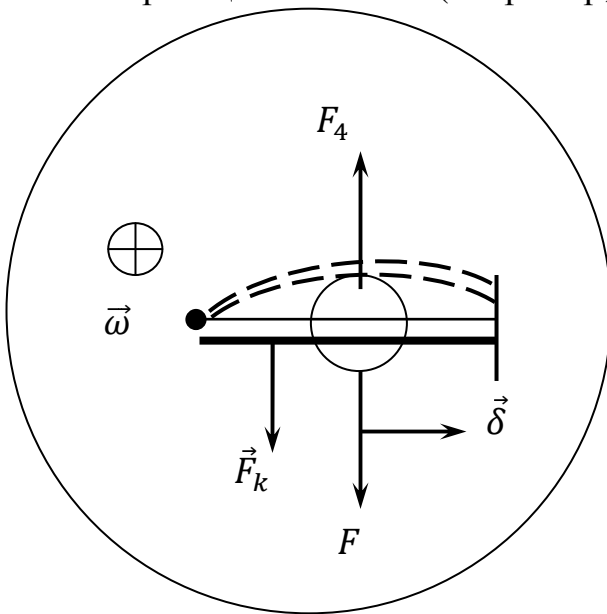
Приведем еще один пример практического применения указанного принципа, который относится к расчету перегрузки, действующей на летчика при выводе самолета из пике при радиусе кривизны R и скорости V . На летчика действуют сила веса P и центробежная сила инерции $Q = ma = \frac{mV^2}{R} = \frac{P}{g} \cdot \frac{V^2}{R}$, направленные вниз (от центра кривизны траектории самолета). Суммарная сила $N = P + Q = P \left(1 + \frac{V^2}{gR}\right)$ прижимает летчика к сиденью и уравнивается равной по величине реакцией со стороны сидения. Величина $\frac{N}{P} = 1 + \frac{V^2}{gR}$ характеризует перегрузку летчика при выходе самолета из пике. При современных скоростях полета эта величина может стать весьма значительной, поэтому во избежание опасности для здоровья летчика, очевидно, с увеличением скорости V необходимо увеличивать радиус кривизны пикирования R .

Отметим что на тело, движущееся во вращающейся системе отсчета, действует еще поперечная (касательная) инерционная сила (сила Кориолиса), направленная перпендикулярно к векторам скорости движущего тела \vec{V} угловой скорости вращения $\vec{\omega}$:

$$F_k = 2m[\vec{\omega}\vec{V}]. \quad (3.36)$$

Направления действия этой силы показано на рис. 3.17.

Для возникновения этой силы необходимо опять-таки наличие упругой силы реакции связи P (например, изогнутой спицы, как показано на рис.



3.18). Во вращающейся системе отсчета условия «равновесия» тела, т. е. состояния равномерного прямолинейного движения, теперь будут иметь вид:

$$\vec{F}_y^{(1)} + \vec{F}_{\text{иц}} = 0, \vec{F}_y^{(2)} + \vec{F}_{\text{иц}} = 0, \quad (3.37)$$

где $\vec{F}_{\text{иц}}$ определяется формулой (3.35),

$\vec{F}_{\text{иц}} = -\vec{F}_k = -2m[\vec{\omega}\vec{V}]$, $\vec{F}_y^{(1)}, \vec{F}_y^{(2)}$ – упругие реакции связей, действующие вдоль направления движения тела и перпендикулярно к нему, соответственно.

Рис. 3.17

Действие указанных инерционных сил легко наблюдать в нашей «естественной» системе отсчета, связанной с Землей. Неинерциальность этой системы обусловлена суточным вращением Земли вокруг своей оси. Под действием кариолисовой силы наблюдается поворот плоскости колебаний маятника в течение суток в сторону, противоположную вращению Земли («маятник Фуко»). Действием этой же силы объясняется размывание правого берега рек северного полушария (закон Бэра), а также преимущественное изнашивание правого рельса двухпутных железных дорог в этом же полушарии. Анализ показывает, что эти эффекты не зависят от направления движения (реки или поезда в указанных примерах).

Итак, инерционные силы в неинерциальных (в частности, вращающихся) системах отсчета являются «фиктивными» в том смысле, что они не отражают воздействие каких-либо материальных тел. Однако их проявление является вполне реальным и может вызвать «крупномасштабные» эффекты (например, «сползание» берега реки и т. п.).

В качестве примера практического использования инерционных сил Кориолиса в технике можно указать вибрационный гироскоп (гиротрон); который может применяться в тех же целях, что и описанный в гл. II вращающийся гироскоп. В гиротроне приводится в интенсивное колебание (с помощью внешней электрической схемы) массивный металлический стержень, выполненный в виде камертона. При вращении подставки со стержнем на него действуют силы Кориолиса, вызывающие дополнительные колебания стержня в перпендикулярном направлении. Эти колебания сообщаются пластине, помещенной между двумя катушками, вырабатывающими соответствующий сигнал во внешнюю (исполнительную) схему. Итак, как показано выше, принцип Даламбера (3.34) может применяться эффективно в различных расчетах в теоретической и прикладной механике, поскольку он позволяет свести динамическую задачу к более простой задаче статики.

3.3 Статика и кинетостатика механизмов

Как уже указывалось выше, при рассмотрении машин и механизмов они разбиваются на кинематические пары, представляющие собой подвижные сопряжения двух твердых звеньев. Наличие связей ограничивает число степеней свободы, т. е. возможных относительных движений в пространстве, до $G-S$, где S – число связей. В то время как кинематика механизмов исследует характер этих движений, в статике механизмов разрабатываются способы нахождения реакций звеньев кинематических пар при отсутствии (или пренебрежимой малости) инерционных сил. Для этой цели составляют уравнения равновесия тел, рассмотренные выше. Если пространственная кинематическая цепь, т. е. связанная система звеньев, входящих в кинематические пары, содержит n звеньев, то число уравнений равновесия равно $6n$. В то же время число определяемых неизвестных

зависит от числа условий связи $G-S$, которое определяет номер класса кинематической пары и принимает значения от 1 до 5. Если цепь содержит P_5 пар 5-го класса, P_4 пар 4-го класса, и т. д., то число уравнений равно числу неизвестных при выполнении условия:

$$6n = \sum_1^5 mP_m. \quad (3.38)$$

Такая кинематическая цепь называется «группой Ассура», а механизм, состоящий из таких групп – механизмом Ассура (по имени основоположника одной из школ по теории машин и механизмов). При отсутствии сил трения система уравнений равновесия является линейной и дает вполне определенные решения для искомых реакций, вследствие чего группы Ассура называются также статически определенными (относительно статики неопределенных систем, см. п. 3.5). Расчеты таких систем имеют особое значение в статике сооружений – одним из основных разделов строительной механики; в этих задачах очень часто силами инерции в механизмах можно пренебречь.

В кинетостатике определяют реакции движущихся звеньев кинематических пар, если инерционными силами нельзя пренебречь. Особое распространение методы кинетостатики получили в расчетах проектируемых машин на прочность. При этих и им подобных расчетах весь механизм считают находящимся в состоянии равновесия, учитывая движение звеньев путем добавления к внешним силам инерционных сил согласно указанному выше принципу Даламбера. При этом вновь составляют систему уравнений, число которых равно числу неизвестных для статически определимой цели. Силовой расчет механизма проводится последовательно для всех групп, начиная с наиболее удаленной от начального (ведущего) звена механизма. Действие других звеньев на выбранную группу заменяют искомыми реакциями, которые разлагают на тангенциальные и нормальные составляющие.

Далее рассчитываются тангенциальные составляющие из уравнений равенства нулю сумм моментов относительно заданной точки для каждого из звеньев групп. Нормальные составляющие определяются из векторных уравнений равновесия групп, причем при решении таких уравнений часто используются графические методы (см. ниже, метод веревочного многоугольника). Далее рассматривают следующую группу, на которую, помимо внешних сил, действует уже найденная реакция со стороны уже исследованной группы и т. д. Последним рассматривают равновесие начального (ведущего) звена с учетом вращательного момента, вызывающего движение звена по заданному закону (например, движение кривошипа по окружности в кривошипно-шатунном механизме).

Если необходимо учесть силы трения, то для каждой кинематической пары добавляется еще одно независимое уравнение. После описанного выше расчета реакций силы трения рассчитываются для каждой пары, а затем повторяется уточненный расчет реакций, т. е. задача решается методом последовательного приложения. Зачастую уже первое приближение

обеспечивает достаточную для инженерных целей точность определения реакций в механизме.

Следует отметить, что расчет механизма с движущимися звеньями относится по существу к области динамики машин и механизмов, элементы которой были изложены в гл. 2. Основное отличие заключается в том, что при кинетостатическом расчете определяют силовые факторы в механизме – реакции и силы трения – при заданном законе движения, в то время как основной задачей динамики машин и механизмов является именно выяснение законов движения различных звеньев путем решения уравнений движения. Поэтому кинетостатические расчеты обычно осуществляются лишь в определенных, ограниченных целях. Помимо упомянутых выше расчетов проектируемых машин на прочность, кинетостатические методы используются при выборе подшипников и расчете режима их смазки.

Статические расчеты современных, зачастую весьма сложных, механизмов и машин связаны с необходимостью проведения большого объема вычислений. Системы уравнений равновесия во многих случаях являются слишком сложными для нахождения решения чисто аналитическим путем. Поэтому широко используются разнообразные приближенные методы решения, а также численные методы расчета реакций с применением современных средств вычислительной математики и техники. Однако применение этих средств не всегда является доступным и рациональным с экономической точки зрения, поэтому следует кратко рассмотреть и другие методы статических расчетов механизмов.

Изложенные выше методы решения статических задач являются

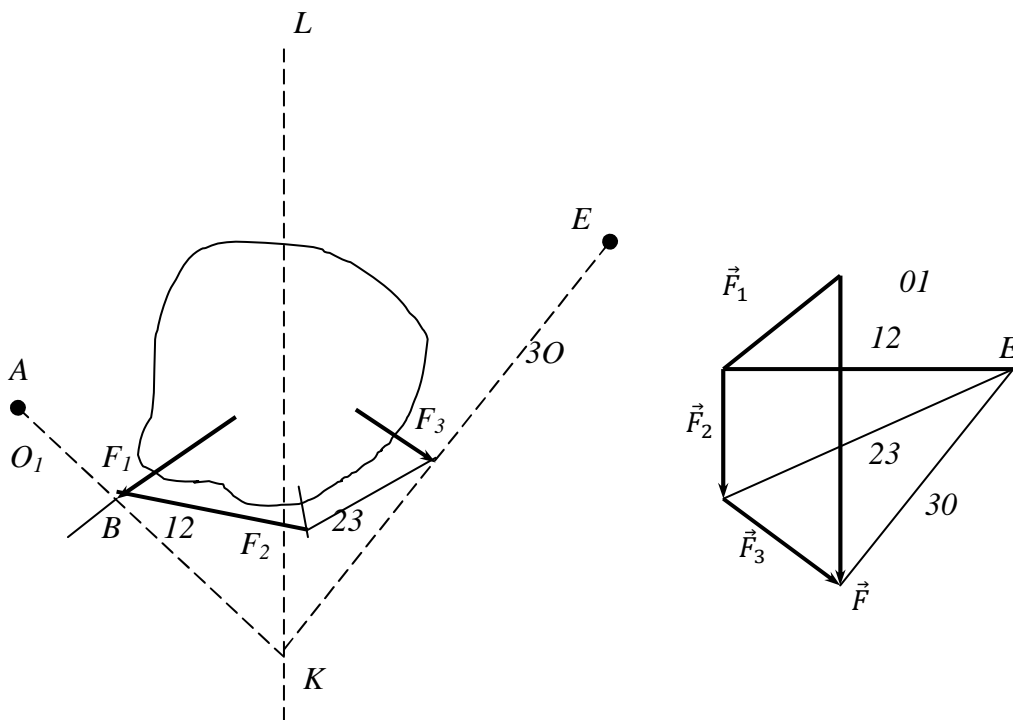


Рис. 3.18

аналитическими. В то же время во многих расчетах (в статике сооружений, в сопротивлении материалов и т. д.) успешно используются графические методы (графостатика). Эти методы основаны на построении многоугольника сил (см. выше) и так называемого «веревочного многоугольника» или многоугольника Вариньона. Построение последнего позволяет определить линию действия равнодействующей плоской системы сил, например, для нахождения реакций опор, положений центров тяжести плоских фигур и т. д. Построение веревочного многоугольника начинается с построения обычного многоугольника сил, как показано на рис. 3.18. Далее выбирают произвольную точку O , не лежащую на сторонах многоугольника («полюс»), и строят из нее лучи, обозначаемые цифрами, как показано на рис. 3.18. Затем из произвольно выбранной точки A проводят линию параллельно лучу до пересечения с линией действия силы F_1 в некоторой точке B , далее из точки B – прямую линию параллельно лучу I_2 до пересечения с линией действия силы F_2 в точке C_1 и т. д. Построив последнюю линию параллельно лучу 30 , получим точку E . Полученная линия $AB...E$ представляет собой веревочный многоугольник данной системы сил при выбранном полюсе O . Очевидно, что число его сторон равно $n+1$, где n – число действующих сил. Смысл указанного названия фигуры $AB...E$ состоит в том, что если закрепить концы веревок в крайних точках A и E и приложить в точках B , C , D заданные силы F_1, F_2, F_3 веревка примет вид фигуры $AB...E$.

Практическое использование этого построения заключается в графическом приведении плоской системы сил к простейшему виду. При этом возможны следующие случаи. Если многоугольник сил не замкнут, как на рис. 3.18 его замыкающая \vec{F} определяет равнодействующую сил. Далее, построив точку K пересечения крайних сторон веревочного многоугольника и проведя через него линию KL , параллельную \vec{F} , определяем линию действия равнодействующей KL . Если же силовой многоугольник оказывается замкнутым, то крайние лучи OI и 30 сливаются так, что крайние стороны веревочного многоугольника (AB и DE) параллельны и находятся, вообще говоря, на расстоянии h , друг от друга. В этом случае вся заданная система сил действует как пара сил, создавая вращающий момент $M=Fh$, где h есть длина крайнего луча OI (величины F и h должны быть взяты в принятом на чертеже масштабе сил и длин). Если, наконец, окажется, что при этом $h=0$, то и веревочный многоугольник будет замкнутым, и суммарное действие сил будет нулевым, т. е. тело находится в равновесии. Особенно ценно подобное построение при графическом определении реакции опор для закрепления балок, ферм и т. д., так как в этих случаях аналитический расчет может принять громоздкий характер, особенно при большом количестве действующих усилий и реакций.

Переходим теперь к рассмотрению конкретных методов решения задач статики механизмов (примеры кинетостатических расчетов уже приводились в п. 2.4).

К простейшим и в то же время самым древним механизмам относятся рычажные механизмы. Простейший рычаг, представляющий собой твердое тело (обычно простой формы типа бруса), вращающееся вокруг неподвижной опоры, и служащий для получения выигрыша в силе, был уже рассмотрен выше. В общем смысле под рычажными механизмами (пространственного типа) подразумеваются системы, состоящие из звеньев, образующих низшие кинематические пары (т. е. с контактом по поверхности – цилиндрическими, сферическим или плоским. В плоских механизмах звенья контактируют по окружности (например, шарниры) или по линии: (поступательные пары). К рычажным относятся, в частности, кулисные и кривошипно-шатунные механизмы. Обычно рычажные механизмы применяют для передачи

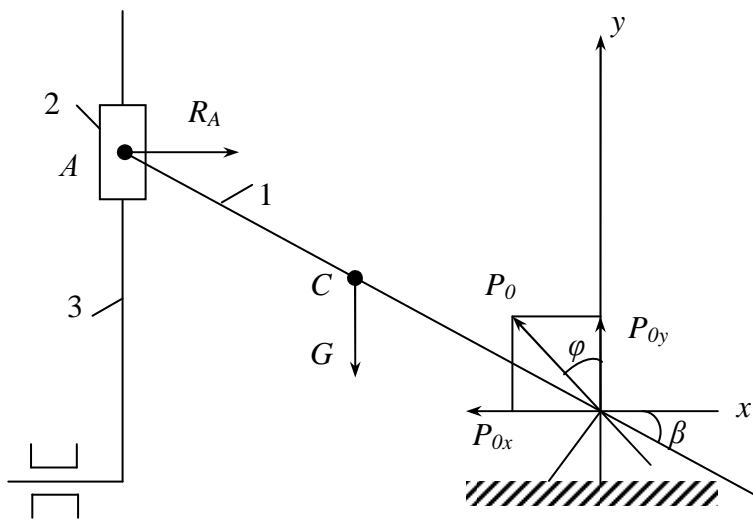


Рис. 3.19

больших усилий в прессах, ковочных машинах и т. д., ввиду их большой прочности и износостойкости по сравнению с кулачковыми или зубчатыми механизмами.

Условия равновесия звена плоского механизма в прямоугольной системе координат имеют вид:

$$\sum F_x = \sum F_y = 0, \sum M = 0. \quad (3.39)$$

В качестве первого примера используем эти уравнения для вычисления

реакций в шарнирах 0 и А механизма, схема которого представлена на рис. 3.19, за счет действия веса (G) поводка I (звено 3 условно считается остановленными). В этом случае условия (3.39) принимает вид:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= -P_{0x} + P_A = 0, \\ \sum F_y &= -G + P_{0y} = 0, \\ \sum M &= M_G + M_{P_A} = 0. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Последнее уравнение можно переписать в виде:

$$-G(OC)\cos\beta + P_A(OA)\sin\beta. \quad (3.41)$$

Отсюда можно определить реакцию ползуна 2 на звено I:

$$P_A = G \frac{(OC)\cos\beta}{(OA)\sin\beta} = G \frac{OC}{OA} \operatorname{ctg}\beta. \quad (3.42)$$

Направление горизонтальной составляющей искомой реакции в шарнире 0 на рис. 3.20 было выбрано произвольно. Определяя теперь эту величину, находим:

$$P_{0x} = P_A = G \frac{OC}{OA} \operatorname{ctg}\beta. \quad (3.43)$$

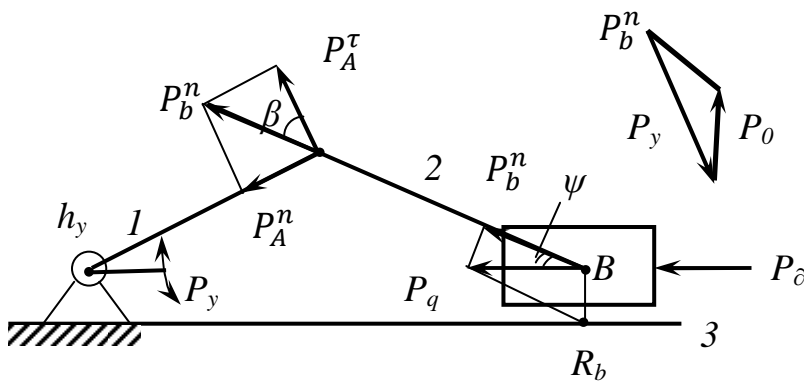


Рис. 3.20

Отсюда видно, что направление P_{ox} было выбрано верно, т.к. величины G и P_{ox} при выбранном направлении осей X и Y обе отрицательны.

Затем из второго уравнения равновесия определяется вертикальная

составляющая P_{ox} искомой реакции в шарнире 0:

$$P_{oy} = G. \quad (3.44)$$

Далее определяется величина реакции в шарнире 0:

$$P_0 = \sqrt{P_{ox}^2 + P_{oy}^2} = G \sqrt{1 + \left(\frac{OC}{OA} \operatorname{ctg} \beta\right)^2} \quad (3.45)$$

и, наконец, угол наклона φ реакции P_0 по отношению к оси X :

$$\sin \varphi = \frac{P_{ox}}{P_0}, \varphi = \arcsin \frac{P_{ox}}{P_0} = \arcsin \frac{\frac{OC}{OA} \operatorname{ctg} \beta}{\sqrt{1 + \left(\frac{OC}{OA} \operatorname{ctg} \beta\right)^2}}. \quad (3.46)$$

В качестве второго примера рассмотрим кривошипно-шатунный механизм (см. рис. 1.29), кинематика и динамика которого были уже детально рассмотрены выше. Определим теперь силы, действующие в кинематических парах (звеньях) этого механизма.

Пусть к ползуну 3 этого механизма приложена движущая сила P_∂ (рис. 3.21).

Требуется рассчитать силы, действующие

в кинематических парах механизма. На основании аксиомы о переносе силы в твердом теле вдоль линии ее действия перенесем силу P_∂ в центр масс ползуна В и разложим ее на две составляющие – в направлении звена 2 (шатунa) и в направлении, перпендикулярном перемещению ползуна. Тогда имеем:

$$R_B = P_\partial \operatorname{tg} \psi, \quad P_B = \frac{P_\partial}{\cos \psi}, \quad (3.47)$$

ψ – угол между шатуном 2 и осью перемещения ползуна 3.

Смысл такого разложения заключается в том, что сила P_B^n компенсируется реакцией направляющей ползуна, в то время как сила P_B^n

передается другим звеньям механизма. Перенеся эту силу в точку А (сочленение кривошипа с шатуном), разложим ее на силу P_A^n , сжимающую кривошип 1, и силу P_A^τ (касательную силу), стремящуюся повернуть кривошип:

$$P_A^n = \frac{P_\partial \sin \beta}{\cos \psi}, \quad P_A^\tau = \frac{P_\partial \cos \beta}{\cos \psi}. \quad (3.48)$$

Сила P_A^τ создает вращающий момент, и во избежание поворота кривошипа на него должна действовать уравнивающая сила \vec{P}_y с плечом h_y . В состоянии равновесия справедливо:

$$\sum M = P_y h_y + P_A^\tau OA = 0, \quad (3.49)$$

откуда:

$$P_y = -\frac{1}{h_y} P_A^\tau OA = P_\partial \frac{OA}{h_y} \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \psi}. \quad (3.50)$$

Построив план сил для звена ОА (отдельно на рис. 3.20), мы видим, что давление в шарнире P_o может быть найдено путем решения полученного треугольника, в котором известны две стороны и угол между P_o и P_b^n (равный $90^\circ + \varphi + \beta$). Тем самым поставленная задача полностью решена.

В качестве другого примера рассмотрим кулачковый механизм (см. рис. 1.26); схематическое представление действующих сил в механизме P_n – реакция толкателя 2 на кулачок 1, направленная по нормали к касательной в точке контакта этих звеньев, R_n – реакция в направляющей толкателя; звено 3 – силовой замыкатель (пружина) механизма.

Располагаем ось, как показано на рис. 3.19, записываем условия равновесия системы (3.39) в виде:

$$\sum F_x = -T + R_n = 0, \quad \sum F_y = Q - G = 0, \quad (3.52)$$

где $T = Q \operatorname{tg} \alpha$, Q – сила, перемещающая толкатель, G – вес толкателя, увеличенный на максимальную величину усилия пружины замыкателя 3. Согласно известным формулам аналитической геометрии,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{d\varphi}, \quad (3.53)$$

где функция $\rho(\varphi)$ задается конкретным видом профиля кулачка 1. Зная вид этой функции, можно вычислить T и тем самым определить давление в опоре кулачка 0 (см. рис. 3.21).

Аналогичным образом на основе условий равновесия (3.39) можно проводить расчеты усилий взаимодействий деталей в более сложных механизмах, а также строительных сооружений, пользуясь методами сопротивления материалов (см. п. 3.5).

3.4 Упругость, пластичность и прочность материалов

В машиностроении, строительном деле, судостроении, авиационной промышленности и других отраслях народного хозяйства применяется огромное количество разнообразных конструкционных и строительных материалов. Выбор того или иного материала в конкретных инженерных

целях во многих случаях определяется, прежде всего, его механическими свойствами.

К основным механическим свойствам материалов относятся упругость (способность материала к восстановлению исходных размеров и формы после его разгрузки), пластичность (способность к деформированию без разрушения до значительных остаточных деформаций) и прочность (способность выдерживать нагрузки без разрушения до определенного предела). Кроме того, в специальных случаях учитывают такие свойства материалов, как твердость (способность сопротивляться внедрению других тел), усталостную прочность (способность выдерживать значительное число переменных нагружений без разрушения), ползучесть (изменение формы и размеров при длительной стационарной нагрузке) и т. д. По величине остаточных деформаций, предшествующих разрушению, материалы бывают пластичными и хрупкими. Например, малоуглеродистые стали, медь, бронза и др. при обычных температурах являются пластичными, т. е. могут деформироваться до больших остаточных деформаций без разрушения – это делает их особо ценными для изготовления изделий путем пластического формоизменения (прессованием, вытяжкой и т. д.). Напротив, такие материалы, как чугун, кирпич и другие, являются хрупкими, т. е. разрушаются уже при незначительных деформациях. При решении конструкционных задач и выборе технологий следует учитывать, что пластические свойства материала могут очень сильно изменяться в зависимости от его температуры (см. ниже).

Механические свойства материалов изучают в процессе механических испытаний на различные типы деформации – растяжение (сжатие), сдвиг (срез), кручение, изгиб и т. д. Наиболее широко используются испытания образцов в виде стержней круглого сечения на растяжение, которые осуществляются сравнительно просто, в легко контролируемом режиме и дают весьма полное и наглядное представление об упругих, пластических и прочностных свойствах материала. В результате такого испытания (которое обычно проводится с постоянной скоростью деформирования, т. е. удлинения образца) можно построить диаграмму растяжения в координатах $P, \Delta l$ (т. е. усилие – удлинение). Если же построить график в координатах $\sigma = \left(\frac{P}{F}\right); \varepsilon = \left(\frac{\Delta l}{l_0}\right)$ (F – площадь сечения образцов, l_0 – первоначальная длина образца), то получается диаграмма «напряжение-деформация».

Для строительных материалов (камни, бетон) и материалов, служащих для фундаментов и опор, обычно проводят аналогичное испытание на сжатие, что соответствует условиям их «работы» на практике.

Рассмотрим типичную диаграмму растяжения для широко распространенного конструкционного материала – малоуглеродистой стали – с целью иллюстрации ее характерных свойств и физического смысла явлений, происходящих при деформировании материала. Такая диаграмма представлена на рис. 3.22 (в упрощенном виде). До точки А величина P пропорциональна Δl , т. е. выполняется закон Гука. Точке соответствует напряжение, называемое пределом пропорциональности материала. Затем линейный ход $P(\Delta l)$ нарушается. Однако вплоть до точки В, которой соответствует напряжение, называемое пределом упругости, деформация является упругой или обратимой, т. е. исчезает после снятия нагрузки. Выше точки В возникает зона пластических деформаций, после снятия нагрузки остается некоторая «остаточная» деформация. После прохождения точки В зависимость $P(\Delta l)$ становится почти горизонтальной и остается таковой вплоть до некоторой точки С. Это соответствует увеличению деформации практически без увеличения нагрузки – возникает пластическое течение материала. Величина σ_T , соответствующая точке С, называется пределом текучести материала. Появление пластического течения обнаруживается по возникновению на полированной поверхности образца линий, наклоненных к оси образца примерно под углом 45° (линий Людерса-Чернова), вследствие чего поверхность постепенно становится матовой. Причина появления линий Чернова будет установлена ниже, а их ориентация объяснена в п. 3.5. После достижения деформации, соответствующей точке С, усилие деформирования вновь возрастает, т. е. имеет место упрочнение материала, вплоть до некоторой точки Д, которая соответствует максимальному напряжению $\sigma_{max} = \frac{P_{max}}{F}$, которое можно приложить к материалу. Участок СД диаграммы называется зоной упрочнения, а величина $\sigma_\sigma = \sigma_{max}$ – временным сопротивлением или пределом прочности материала. В окрестности σ_σ на образце развивается заметное локальное сужение поперечного сечения – «шейка». При этом образец сильно удлиняется, и нагрузка на образец уменьшается вплоть до некоторого значения P_o , при котором происходит разрыв образца. Поскольку площадь поперечного сечения в области шейки $F_{уст}$ уменьшается быстрее, чем нагрузка P , то «истинное напряжение»

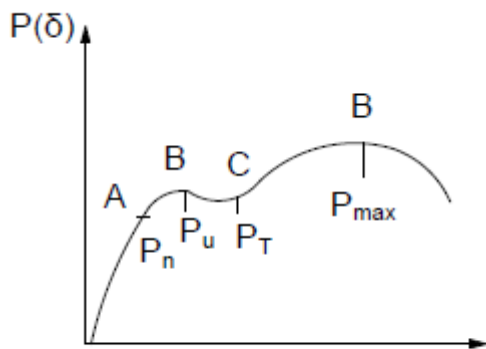


Рис. 3.22

$\sigma_{ист} = \frac{P}{F_{ист}}$ в процессе развития шейки все время возрастает и в точке Е значительно превышает величину временного сопротивления σ_σ . Однако при решении проектных задач целесообразно использовать величину σ_σ , а не $\sigma_{ист}$, поскольку величина $F_{уст}$ при образовании шейки заранее не известна, а величина $P_{max} = F\sigma_\sigma$ определяет величину наибольшей растягивающей силы,

которую можно приложить к образцу без его разрушения.

При испытаниях на растяжение, помимо указанных выше величин σ_u , σ_T и σ_b , определяется также величина остаточного (пластического) удлинения в момент разрыва и относительное сужение образца в месте разрыва, т. е.

$$\delta = \frac{\Delta l_{\text{ист}}}{l}, \quad \psi = \frac{F - F_p}{F} \quad (3.54)$$

(причем для круглого образца $F = \frac{\pi d^2}{4}$, $F_p = \frac{\pi d_{\text{ш}}^2}{4}$, где $d_{\text{ш}}$ – диаметр шейки).

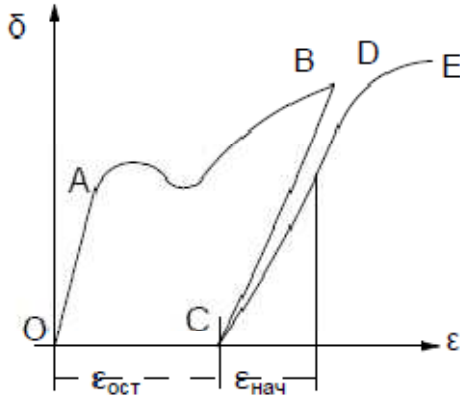


Рис. 3.23

Величина δ зависит от положения точки E (протяженности диаграммы σ - E), а ψ – от длины участка образования шейки DE на рис. 3.23. Кроме того, эти величины зависят от отношения длины образца к диаметру l/d ; при увеличении отношения l/d величина δ уменьшается из-за уменьшения относительной протяженности пластической зоны для длинных образцов.

Для многих конструкционных материалов (медь, бронза и др.) диаграмма растяжения не содержит выраженной «площади текучести» BC. Для таких материалов вводится «условный» предел $\sigma_{0,2}$ (т. е. напряжение, при котором остаточное удлинение образца составляет 0,2 % от первоначальной длины, что соответствует удлинению образца из малоуглеродистой стали при «истинном» пределе текучести σ_T).

Большое практическое значение имеет явление «наклепа», т. е. упрочнения материала в результате предварительной пластической деформации. Пусть образец из малоуглеродистой стали нагружен до напряжения выше предела текучести (точка B на рис. 3.23). Если теперь разгрузить образец ($\sigma=0$), то деформация ϵ уменьшится на некоторую часть $\epsilon_{\text{упр}}$, а часть $\epsilon - \epsilon_{\text{упр}} = \epsilon_{\text{ост}}$ характеризует остаточную (пластическую) деформацию. При этом оказывается, что линия «разгрузки» BC параллельна «линии нагружения» OA, т. е. упругие деформации развиваются в материале и в пластической зоне и подчиняются закону Гука, причем модуль растяжения (модуль Юнга) сохраняет неизменное значение. Если же теперь вновь нагрузить образец, то линией нагружения теперь будет CDE, т. е. теперь предел пропорциональности (D) стал значительно выше (A), а остаточное удлинение (δ) предварительно растянутого образца значительно меньше (временное сопротивление образца при этом не изменяется). Это явление и представляет собой деформационное (механическое) упрочнение или наклеп материалов.

Описанное явление используется в ряде технологических процессов для повышения твердости (или жесткости) материала (холодное волочение проволоки, наклеп цепей грузоподъемных механизмов и др.). В некоторых

случаях наклеп оказывается вредным явлением, и его ликвидируют путем отпуска материала (т.е. его прогрева до температур несколько сотен °С с последующим медленным охлаждением).

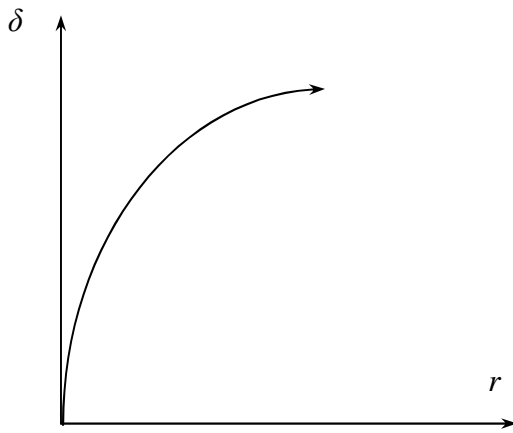


Рис. 3.24

Для хрупких материалов (чугун, керамика, стекло) диаграмма растяжения значительно отличается от приведенной выше для пластичной малоуглеродистой стали (рис. 3.24). Текучесть этих материалов не наблюдается, диаграмма σ - E значительно короче из-за малости остаточной деформации δ разрушение носит характер «хрупкого излома» по некоторой неравной поверхности без образования шейки. Для этих материалов вводится предел прочности или временное сопротивление

$\sigma_b = P_{max}/F$, характеризующее максимальную нагрузку на образец в момент разрыва; в отличие от пластичных материалов, эта величина практически не отличается от «истинного» напряжения при разрыве.

Отметим особенности диаграммы напряжения – деформация в условиях испытаний на сжатие образца. Для пластичных материалов величины σ_n и σ_T при этом получаются примерно такими же, как и при испытаниях на растяжение. При дальнейшем увеличении нагрузки образец не разрушается, а сплющивается, т. е. укорачивается и увеличивается в поперечных размерах. Поэтому понятие предела прочности σ_b в этом случае теряет смысл, и проведение испытаний на сжатие таких материалов практически нецелесообразно. Напротив, хрупкие материалы при сжатии разрушаются при малых остаточных деформациях, как и при растяжении. Однако предел прочности при сжатии оказывается значительно выше, что означает, например, целесообразность использования таких материалов для опорных элементов конструкций.

Переходим теперь к рассмотрению физических представлений о природе упругости, пластичности и прочности материалов. В настоящее время накоплен огромный экспериментальный материал по этой исключительно важной для практики проблеме, и достигнут высокий уровень развития теории. По существу, теория упругости и теория пластичности представляют собой разные науки, с различной методологией и разными задачами. Поэтому здесь будут рассмотрены лишь некоторые основные представления, главным образом с целью пояснения приведенных выше опытных данных.

Основными факторами, определяющими механические свойства материалов, являются их внутренняя структура, т. е. взаимное расположение атомов вещества, характер связывающих атомы сил взаимодействия. В свою

очередь, на эти факторы оказывают влияние температура, давление, механическая обработка, добавление примесей и т. д. Отсюда уже ясна причина исключительного многообразия механических свойств, используемых в технике конструкционных и строительных материалов.

Большинство используемых в технике металлических материалов (как чистых металлов, так и их сплавов) имеют поликристаллическую структуру; образованную множеством прочно связанных друг с другом зерен – кристаллов, каждый из которых представляет собой маленький монокристалл с геометрически упорядоченным расположением атомов. Металлические сплавы обычно представляют собой твердые растворы с закономерным взаимным расположением атомов различных металлов; к сплавам, в частности, относятся сталь (железо+углерод), бронза (медь+олово), латунь (медь+цинк) и т. д. В отличие от этих материалов, различные стекла, керамика, бетон по своей структуре являются аморфными, т. е. характеризуются беспорядочным взаимным расположением атомов различных элементов.

Для монокристаллов характерна анизотропия, т. е. различие физических свойств по разным направлениям. Напротив, поликристаллические и аморфные тела обычно являются изотропными, т. е. их физические (в частности, механические) свойства одинаковы по всем направлениям.

Существуют материалы, отличающиеся свойствами, которые неразрывно связаны с фазовым их состоянием – стеклообразные (аморфные) или кристаллические. Например, путем частичной кристаллизации стекол получают ценные технические материалы – ситаллы (именуемые за рубежом стеклокерамикой или пирокерамами). Ситалл представляет собой монолитный материал, состоящий из высокодисперсных, одинаковых по размерам (менее 1 мкм в обычных и менее 0,1 мкм в прозрачных ситаллах), беспорядочно ориентированных кристалликов, сросшихся между собой или склеенных остатками стекла (5-10% в обычных и до 40 % в прозрачном ситалле), при отсутствии пустот и дефектов. Такая структура обеспечивает высокую прочность (выше прочности стали), газо- и влагонепроницаемость, хорошую прозрачность, небольшой удельный вес (плотность не более 2500 кг/м³), высокую химическую стойкость и жаропрочность (до 1600°C) и низкий коэффициент термического расширения (почти нуль). Все это обеспечивает широкое применение ситаллов в самых разнообразных областях науки и техники.

Здесь ограничимся рассмотрением преимущественно металлических (поликристаллических) материалов с целью иллюстрировать физическую природу явлений упругости, пластичности и прочности.

Как указывалось выше, силы упругости, возникающие в деформированных твердых телах, стремятся восстановить первоначальные («равновесные») размеры и форму тела. Это объясняется специфической зависимостью межатомных расстояний. Энергия межатомного

взаимодействия U имеет минимум при некотором «равновесном» расстоянии между атомами, которая соответствует их устойчивой конфигурации и, следовательно, устойчивой форме (и определенным размерам) тела. При растяжении тела расстояние между атомами возрастает, и возникает сила притяжения, стремящаяся вернуть атомы в исходное положение, при сжатии тела атомы сближаются и возникает сила отталкивания, также направленная к положению равновесия.

Рассмотрим простейшую систему из двух атомов, равновесное расстояние между которыми равно a_0 . При «деформации» системы возникает смещение на некоторую величину $u = a - a_0$ (a – расстояние между смещенными атомами). Согласно изложенному выше, потенциальная энергия межатомного взаимодействия $U = U(u)$ имеет минимум при $u=0$, т. е.

$$\left. \frac{dU}{du} \right|_{u=0} = 0. \quad (3.55)$$

Сила взаимодействия между атомами определяется как $f(u) = \frac{dU(u)}{du}$ и возникает при деформировании рассматриваемой системы под действием внешней силы f ; условие равновесия имеет вид:

$$\frac{dU(u)}{du} = f. \quad (3.56)$$

Рассмотрим теперь случай малых смещений $u \ll G_0$. В этом случае, как известно, функцию $U(u)$ можно разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $u = 0$:

$$U(u) = U_0 + u \left(\frac{dU}{du} \right)_0 + \frac{1}{2} u^2 \left(\frac{d^2U}{du^2} \right)_0 + \dots \quad (3.57)$$

Ограничиваясь членами разложения (что допустимо при не слишком больших степенях деформации) и учитывая условие (3.55), получим:

$$U(u) = U_0 + \frac{1}{2} u^2 \left(\frac{d^2U}{du^2} \right)_0. \quad (3.58)$$

Такая параболическая зависимость потенциальной энергии от смещения характерна для всех упругих сил, как указывалось, в п. 3.2. Величина $\frac{d^2U}{du^2}$ не зависит ни от величины, ни от знака u и является константой, характеризующей «жесткость» межатомной связи в данном материале. Поэтому можно переписать (3.58) в виде:

$$U(u) = U_0 + \text{const} u^2. \quad (3.59)$$

Наконец, согласно (3.56) находим:

$$f = \text{const} u. \quad (3.60)$$

Это соответствует закону Гука – линейной зависимости упругой силы от деформации материала.

Закон Гука обычно выполняется лишь до весьма малых относительных деформаций (доли процента). Только нитевидные металлические кристаллы с совершенной внутренней структурой («усы») удастся упруго деформировать на несколько процентов. При дальнейшем деформировании выше некоторого предела упругости, как указывалось выше (см. рис. 3.22) во всех материалах

развиваются более или менее значительные пластические (остаточные) деформации. Заметим, что хрупкие материалы разрушаются уже при очень небольших упругих и пластических деформациях, см. рис. 3.24. Другим предельным случаем являются так называемые «эластичные» материалы, которые можно деформировать (растягивать в несколько раз) вплоть до разрушения вообще без появления пластических деформаций (резина, каучук и т. п.).

Рассмотрим основные закономерности пластической деформации металлических материалов. Она осуществляется путем перестройки кристаллической решетки материала, т. е. перехода атомов в новые положения. Причем возможны два типа перестройки, в соответствии с чем, различают два типа пластической деформации – скольжение и двойникование. При скольжении имеет место сдвиг (трансляция) одной части кристалла относительно другой по некоторой граничной плоскости – плоскости скольжения (АВ) – рис. 3.25а. При этом кристаллическая решетка в общем остается неизменной. Плоскостями скольжения обычно служат определенные «кристаллографические» плоскости, характеризующие тип кристаллической решетки материала.

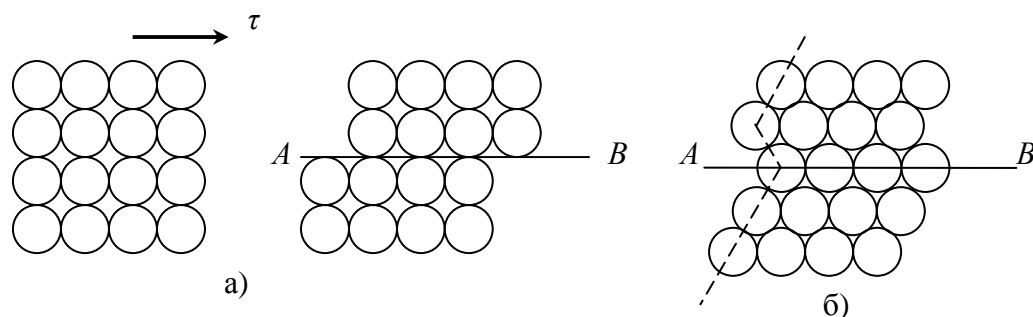


Рис. 3.25

При двойниковании также осуществляется сдвиг вдоль определенных плоскостей, однако на меньшие расстояния, чем при скольжении – на часть периода кристаллической решетки; при этом одна часть кристалла оказывается зеркальным отражением другой относительно некоторой плоскости «двойникования» (АВ на рис. 3.25б).

Пластическая деформация обладает резко выраженной анизотропией: напряжение сдвига существенно неодинаково в разных направлениях и минимально вдоль некоторых из них, называемых «направлениями легкого скольжения». Обычно они соответствуют плоскостями с наиболее плотной упаковкой атомов. Это вполне понятно, поскольку в этих направлениях между плотноупакованными слоями расстояние больше, чем между атомами в самих слоях, а силы межатомного взаимодействия уменьшаются с расстоянием. Поэтому сдвинуть плотноупакованные слои друг относительно друга легче, чем деформировать сами эти слои.

Таким образом, «пластичность» материала определяется возможностью относительного смещения в нем атомных слоев без разрушения, т. е. с сохранением достаточного сцепления между слоями. Эта возможность существенно зависит от типа связи кристаллической решетки. Металлическая связь отличается сравнительной однородностью электростатического поля вокруг каждого атома (иона), которая сохраняется даже при значительном отклонении иона от равновесного положения. Этим объясняется наибольшая пластичность кристаллов с металлическим типом связи, т. е. возможность значительной их деформации без разрушения. Напротив, кристаллы с ковалентным характером связи (типа алмаза), характеризуются наличием строго направленных (валентных) связей между атомами и уже при небольших отклонениях атомов от равновесных положений эти связи нарушаются, что ведет к разрушению материала, чем и объясняется хрупкость этих материалов.

Схема на рис. 3.25 иллюстрирует только конечный результат пластической деформации, но не механизм ее осуществления. Простые теоретические соображения и оценки показывают, что скольжение не может осуществляться одновременно по всей плоскости скольжения. Вычисленные на основе такой модели значения предела текучести для всех пластичных материалов на 3-4 порядка превышают реально измеряемые при механических испытаниях. Таким образом, реальное скольжение развивается последовательно по плоскости скольжения с некоторой конечной скоростью, захватывая все новые области материала.

В соответствии с этим схематично рассмотрим участок кристалла, где в данный момент развивается скольжение; схема этого процесса показана на рис. 3.26 (решетка кристалла считается продолжающейся неограниченно в

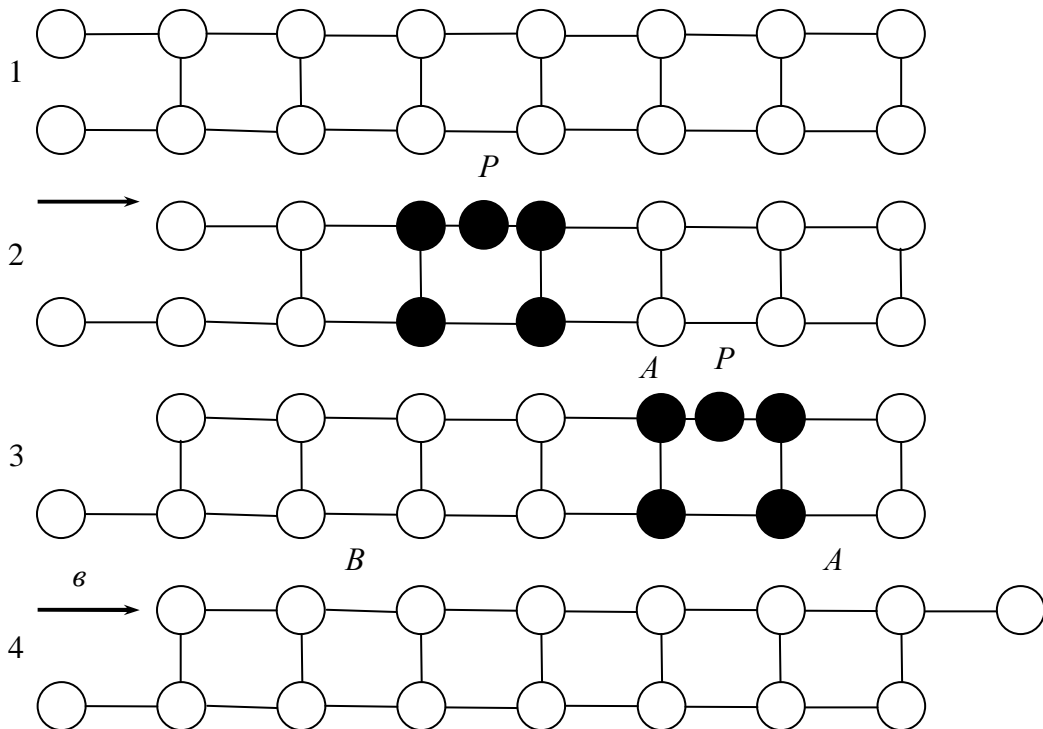


Рис. 3.26

направлении, перпендикулярном плоскости чертежа). Состояние 1 – исходное положение атомов кристалла, состояние 4 – конечное положение атомов кристалла, после прохождения скольжения слева направо на один период решетки («единичный сдвиг»), т. е. результат скольжения согласно рис. 3.26а. В состоянии 2 кристалл можно разделить на две части – несдвинутый участок А и «сдвинутый» участок В, в котором прошло скольжение. Граница между ними проходит по некоторой линии Р, называемой «дислокационной линией», а переходный участок размером порядка периода решетки, содержащей эту линию – «краевой дислокацией». В состоянии 3 дислокация переместилась вправо, и участок А сократился. В конечном состоянии дислокация прошла через всю рассматриваемую область кристалла.

Таким образом, эта упрощенная «дислокационная модель» скольжения отображает указанную выше неоднородность процесса пластической деформации. Очевидно, что сдвинуть небольшой участок кристалла значительно легче, чем весь кристалл макроскопических размеров. Весьма удачной аналогией этого процесса является предложенное в литературе движение складки по ковру: перемещение складки в определенном направлении значительно легче осуществить, чем движение всего ковра по полу, в то же время, полное прохождение складки по всему ковру приводит к некоторому перемещению и всего ковра в целом.

Теоретические оценки дают напряжение сдвига дислокации правильного порядка величины (10^{-3} - 10^{-4} от модуля сдвига), подтверждаемый экспериментальными данными.

Направление и величина смещения атомов в области дислокации определяется характерным для нее вектором Бюргера \vec{b} ; для случая простого сдвига величина $|\vec{b}|$ совпадает с периодом решетки a , а его направление совпадает с направлением сдвига – положение 4 на рис. 3.26. Деформация двойникованием (рис. 3.25б) осуществляется «частичными» дислокациями, для которых величина b значительно меньше a . Пластическая деформация кристалла ε определяется прохождением всех содержащихся в нем дислокаций со средней скоростью \vec{V} , которая зависит от приложенного сдвигового напряжения. Если плотность дислокации в кристалле равна N (полная длина дислокационных линий в единице объема кристалла), то скорость пластической деформации $d\varepsilon/dt$ определяется приближенным

выражением:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = Nb\vec{V}. \quad (3.61)$$

В рамках дислокационной модели объясняются основные закономерности механического упрочнения кристаллов, которые были описаны выше на примере диаграммы «напряжение-деформация», показанной на рис. 3.22. (Полная дислокационная теория упрочнения кристаллов является весьма сложной и изложена в ряде специальных

монографий, некоторые из которых указаны в списке литературы в конце книги).

Сущность явления упрочнения заключается в возникновении препятствий для движения дислокаций в кристалле, в частности, обусловленных размножением дислокаций в процессе деформирования кристалла. В результате действия упругих сил, возникающих при деформировании, возникают новые дислокации по пересекающим плоскость скольжения другим плоскостям и различным направлениям («дислокационный лес»), создающие дислокационные сетки и барьеры, препятствующие движению «первичных» дислокаций скольжения. Такими барьерами могут служить также атомы примесей, частицы различных фаз в сплавах и т. п. Поэтому характер упрочнения для разных кристаллов существенно неодинаков и зависит от множества факторов.

Переходим теперь к краткому рассмотрению свойств кристаллических материалов. Под прочностью подразумевают сопротивление тела разрушению, т. е. разделению на части под действием внешних сил (растягивающих, сдвигающих и т. д.). Основная идея физического объяснения явлений разрушения заключается в том, что разрушение представляет собой сложный динамический процесс (а не мгновенный акт), закономерно развивающийся во времени, так что финальный акт нарушения сплошности тела подготовлен накопленными в теле «микроскопическими» изменениями.

Как указывалось выше, характер разрушения для «пластичных» («вязких») и «хрупких» тел существенно неодинаков (см. рис. 3.22 и 3.24). При этом имеется ввиду, что «зародышевая» трещина, которая впоследствии развивается в поверхность раздела между частями разрушенного тела («поверхность излома»), может возникать после более или менее значительной пластической деформации. При «вязком» характере разрушения предварительно возникает большая пластическая деформация, которая, согласно изложенному выше, сопровождается накоплением дефектов в кристалле (в частности, сеток дислокаций) и значительным упрочнением. Это приводит к концентрации напряжений в кристалле, вызывающей при определенном уровне нагрузки возникновение «микротрещины». При определенных условиях эта трещина расширяется и продвигается вглубь материала; этот процесс, разумеется, также сопровождается пластической деформацией. В результате процесс вязкого разрушения характеризуется большой энергоемкостью, т. е. большими затратами энергии со стороны внешнего источника нагружения.

При хрупком разрушении зарождающаяся трещина при определенном уровне напряжения становится «неуправляемой», т. е. растет без дальнейшего повышения нагрузки с большой скоростью, поэтому разрушение не сопровождается значительной пластической деформацией. Поэтому хрупкое разрушение характеризуется малой энергоемкостью и высокой скоростью развития процесса. Однако и в этом случае образованию

трещины предшествует определенная пластическая деформация, которая, однако, является, незначительной по сравнению со случаем вязкого разрушения.

Важным с практической точки зрения является тот факт, что характер разрушения (вязкий или хрупкий) данного материала зависит от условий деформирования, в частности, от его температуры, скорости нагружения, свойств нагружающей системы и окружающей среды, а также от наличия примесей. Эти процессы исследуются методами теории упругости и теории дислокаций, а также экспериментальными методами (фрактография). Подробное изложение этих вопросов содержится в специальной литературе.

В качестве иллюстраций основных представлений о физических механизмах разрушения материалов рассмотрим еще одно из весьма важных для практики явлений – абсорбционное понижение прочности (эффект Ребиндера).

Если, например, смочить цинковую пластинку, обладающую хорошей пластичностью при комнатной температуре, ртутью (нанести капельку ртути на поверхность), то даже при небольшой изгибной деформации в месте нанесения ртути образуется трещина, быстро распространяющаяся по всей поверхности пластинки, что приводит к хрупкому разрушению цинка.

Объяснение этого эффекта основано на представлениях о зависимости прочности тела от его поверхностной энергии. Согласно теории Гриффитса, хрупкое разрушение обусловлено развитием имеющейся в кристалле зародышевой трещины длиной l при некотором кристаллическом растягивающем напряжении $P_{кр}$, равном $P_{кр} = \sqrt{E\sigma/l}$ (E – модуль упругости). Таким образом, с понижением поверхностной энергии прочность твердого тела снижается. Именно это и происходит при смачивании поверхности тела, например, цинка ртутью. При этом образуется адсорбционно-активный расплав, поверхностная энергия которого в несколько раз меньше, чем чистого цинка. Тем самым значительно облегчается развитие зародышевых трещин, что и обуславливает понижение прочности.

Эффект Ребиндера имеет широкое и разнообразное применение в различных областях техники, в частности, для снижения прочности металла при его механической обработке, при бурении твердых горных пород и т. д. В то же время, этот эффект в ряде случаев является вредным, и с ним приходится бороться. Например, латунные изделия выходят из строя при смачивании ртутью (поскольку латунь – это сплав меди и цинка), стальные детали ломаются при расплавлении припоя в процессе пайки и т. д.

Активная среда может быть и газообразной. Так, например, латунные изделия растрескиваются в присутствии аммиака и т. д. Эффект Ребиндера наблюдается также и на неметаллических материалах (например, течение гипса при попадании влаги в строительной практике). Этот эффект используется при бурении горных пород, в процессах измельчения твердых материалов, шлифовки и полировки поверхностей и т. д.

3.5 Элементы сопротивления материалов

Теория упругости, прочности и пластичности материалов лежит в основе технической науки – сопротивления материалов (сокращенно сопромат), изучающей методы расчета элементов различных конструкций (машин, механизмов, строительных сооружений и т. д.) на прочность, жесткость и устойчивость с целью обеспечения надежности и долговечности их работы. Наиболее широко применяются здесь законы статики твердого тела, изложенные выше. В результате расчетов определяются рациональные размеры и форма, а также материалы элементов конструкций. Ниже рассмотрим лишь наиболее общие физические принципы, лежащие в основе сопротивления материалов, и их простейшие приложения, в дополнение к приведенным выше (п. 3.3 и 3.4). В п. 3.4, были изложены физические представления об упругости, пластичности и прочности материалов. Все они в полной мере используются в расчетах, выполняемых по законам сопротивления материалов. Так, сопротивляемость упругому деформированию рассматривается как меры жесткости элементов конструкций, а сопротивляемость пластическому деформированию – как мера их прочности. Например, железнодорожный мост под действием веса тяжело нагруженного состава может получить прогиб, при котором деформация превышает упругий предел. В результате этого после прохождения состава может возникнуть значительная пластическая деформация, что создает в дальнейшем угрозу разрушения моста. Однако, если деформация и не превысила упругий предел, но чрезмерно велика (жесткость конструкций недостаточна), то может возникнуть опасность того, что поезд сойдет с рельсов сильно деформированного пути. Таким образом, мост должен быть соответствующим образом рассчитан как на прочность, так и на жесткость. Вообще, многие элементы, например, упругие стержни, подвергающиеся сжатию, рассчитываются также на устойчивость, то есть на сопротивляемость значительному искажению формы (например, искривлению), при котором возникает опасность отказа элемента конструкции.

При расчетах в сопромате учитывается различный характер внешних сил (нагрузок), действующих на элементы конструкций, машин и сооружений. Некоторые силы – главным образом силы тяжести и силы инерции – носят объемный характер и пропорциональны массам тел, на которые они действуют (массовые силы). Например, центробежные силы инерции, действующие на массивные быстро вращающиеся маховики, могут быть настолько велики, что вызывают разрыв маховиков. Другие силы носят поверхностный характер и могут быть распределены по некоторой более или менее значительной поверхности (например, давление пара на стенки котла – распределенные нагрузки), или же могут передаваться через малые участки его поверхности (например, давление колеса на рельс – сосредоточенные нагрузки). Нагрузки могут быть постоянно действующими – статическими,

т. е. действуют на конструкцию продолжительное время, мало изменяясь по величине (например, нагрузка на фундамент здания), или же временными – динамическими, т. е. воздействует на конструкцию сравнительно небольшое время (например, ударные нагрузки). Во многих случаях нагрузка является повторно-переменной или знакопеременной, т. е. ее величина и направление действия периодически изменяются со временем (например, нагрузка на штоки поршневых двигателей).

Если характер действия внешних сил на элемент полностью описан, то тем самым задан режим нагружения и можно приступить к расчету напряжений и деформации, как будет описано ниже.

Для проведения таких расчетов обычно применяются различные допущения (гипотезы), основанные на физической теории и экспериментальных данных. Результаты расчета также подвергаются экспериментальной проверке с целью подтверждения обоснованности принятых гипотез. Такой «экспериментально-теоретический» метод является характерным для многих технических наук, в том числе и сопротивления материалов.

Основными допущениями о свойствах материалов являются следующие.

- 1) Гипотеза об абсолютной упругости материала. Это означает, что расчет конструкции проводится на основе законов теории упругости (закона Гука), но при этом указываются деформации и нагрузки, выше которых появляется пластическая деформация материала, и полученные расчетные формулы определяют, следовательно, «предел прочности» для данной конструкции.
- 2) Гипотеза об однородности материала, т. е. физические свойства материала считаются одинаковыми в окрестности любой его точки. Эта гипотеза оказывается оправданной для многих металлов и сплавов (стали, меди, алюминия и др., за исключением чугуна) и менее обоснованной для керамических материалов, бетонов и т. п.
- 3) Гипотеза об изотропности материала, т. е. физические свойства материала (например, его модуль упругости) считаются одинаковыми в любых направлениях. Это оправдывается для большинства конструкционных и строительных материалов с волокнистым строением (древесина, стекловолокно и т. д.).
- 4) Гипотеза о сплошности (неразрывности) материала, т. е. принимается, что в материале отсутствуют пустоты (раковины), трещины и т. п. Реальные материалы всегда содержат различные дефекты, что существенно сказывается на их механических свойствах (см. выше, п. 3.4). Поэтому расчеты, проведенные для «идеального» (бездефектного) материала, могут дать значительно завышенные значения допустимых нагрузок и деформаций (особенно для хрупких материалов). Это учитывается введением в расчеты различных поправочных коэффициентов (запаса прочности).

Основными допущениями о характере деформаций тел под действием внешних сил являются следующие:

- 1) Принцип начальных размеров: абсолютные деформации элементов конструкций под действием нагрузок настолько малы, что связанные с ними изменения формы и размеров тел и обусловленные этим изменения режима нагружения можно не учитывать.
- 2) Гипотеза о линейной деформации тела: перемещения его элементов (деформации) пропорциональны внешним нагрузкам. Это допущение по существу является следствием указанной выше гипотезы об абсолютной упругости материала и справедливо лишь в определенном интервале величин действующих нагрузок.
- 3) Принцип независимости действия сил (принцип суперпозиции): общий результат воздействия на тело нескольких нагрузок не зависит от порядка или способа приложения этих нагрузок и определяется как сумма воздействия отдельных нагрузок.

Помимо этих основных положений, в сопротивлении материалов применяются и другие гипотезы, причем следует иметь в виду, что аксиомы статики (см. п. 3.1), относящиеся к абсолютно твердому телу, могут оказаться не применимыми для абсолютно упругих тел. Например, в сопротивлении материалов не используется положение о переносе силы вдоль линии ее действия, т. к. такой перенос может сильно изменить характер деформации тела. Кроме того, систему во многих случаях нельзя заменять их равнодействующей: например, две равные и противоположно направленные силы могут вызвать значительную деформацию и даже разрушение тела, в то время как их равнодействующая равна нулю.

Методы расчета деформации упругих тел (элементов конструкций) под действием нагрузок зависят от геометрии тела и типа деформации. Элемент, поперечные размеры которого значительно меньше его длины, называют бруском (или стержнем). Примерами могут служить балки в строительных конструкциях, валы и оси и т. д. Элемент, ограниченный криволинейными поверхностями больших размеров по сравнению с расстояниями между ними, называется оболочкой (котлы, цистерны, резервуары высокого давления, трубопроводы и т. д.). В частности, ограничивающие поверхности оболочки могут быть и плоскими, тогда она называется пластиной (например, днище резервуара). Если же все три размера тела сопоставимы, то элемент называется массивным (фундаменты, опорные стены и т. п.). Методы сопротивления материалов эффективны и применимы при расчетах множества технических устройств – к расчету нагруженных брусков. Оболочки и массивные тела, деформируемые внешними силами рассчитываются методами теории упругости. Большие деформации тел, превышающие упругий предел (например, возникающие при обработке металлов давлением), рассчитываются методами пластичности на основе специальных полуэмпирических закономерностей.

Следует указать, что в некоторых системах усилия не могут быть определены на основании уравнений статики, выражающих условия равновесия. Такие системы называются статически неопределенными. К ним относятся геометрически неизменяемые системы типа балок, ферм и других конструкций. В них, помимо связей, обеспечивающих геометрическую неизменяемость, имеются еще «лишние» или «избыточные» связи, число которых определяет «степень статической неопределенности» системы. Отличительной особенностью таких систем является возможность существования в них внутренних напряжений при отсутствии внешних силовых воздействий. Эти напряжения могут возникнуть уже в процессе сборки конструкции, в результате температурных изменений (например, при наличии элементов из различных материалов с разными температурными коэффициентами расширения) и по другим причинам. Для расчета таких систем необходимо составлять, в дополнение к уравнениям статики, уравнения, выражающие совместимость деформации, т. е. неразрывность системы при деформировании, причем количество этих уравнений должно равняться степени статической неопределенности системы.

Рассмотрим теперь некоторые конкретные методы и понятия, используемые в сопротивлении материалов.

В нагруженном теле в каждом его сечении возникают дополнительные

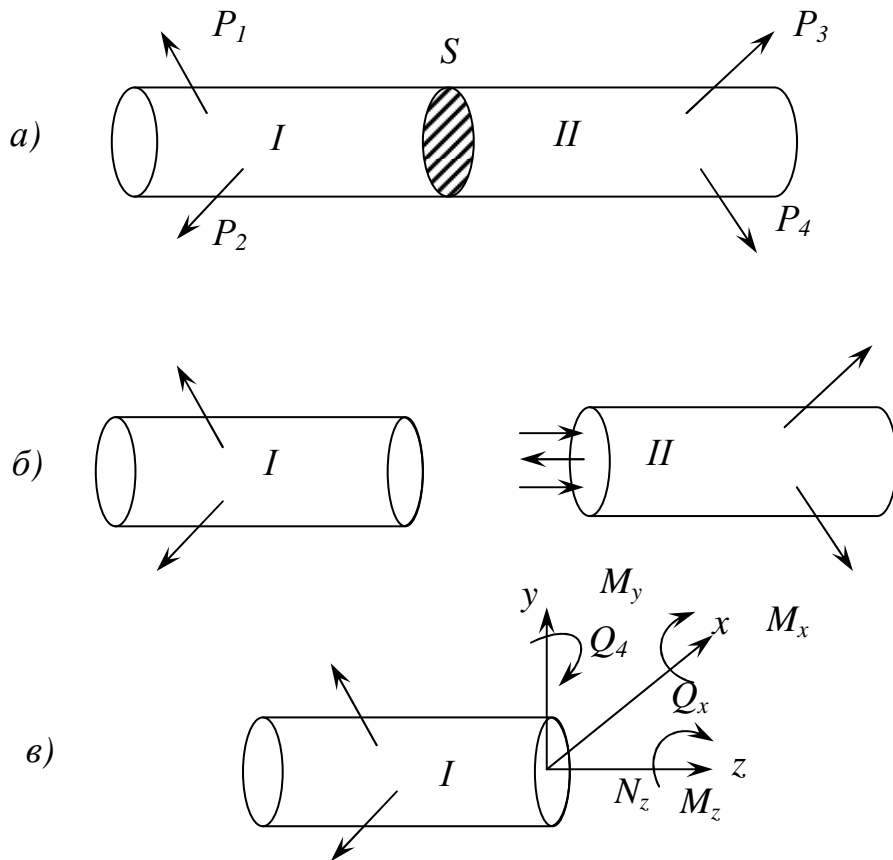


Рис. 3.27

внутренние силы (по сравнению с ненагруженным телом), действие которых

компенсирует влияние внешних нагрузок. Эти силы обнаруживаются при рассечении нагруженного тела на части, что лежит в основе так называемого метода сечений.

Пусть тело (например, брус) деформировано приложенными к нему внешними нагрузками $P_1 \div P_4$, как показано на рис. 3.27а. Рассечем тело некоторым произвольным сечением S и рассмотрим левую часть I, а правую часть II отбросим. Поскольку до рассечения левая часть находилась в равновесии, то это означает, что в сечении на нее действовали «внутренние силы» со стороны правой части, компенсирующие нагрузки P_1 и P_2 (рис. 3.27б). Такое же утверждение относится и к правой части тела. Согласно аксиоме статики о равенстве действия и противодействия внутренние силы в сечении S , действующие на части I и II тела, одинаковы.

Сущность метода сечения заключается в том, что ввиду равенства внешних сил, действующих на отсеченную часть тела, и внутренних сил, действующих в сечении (со стороны отброшенной части тела), к любой из частей тела (I или II) можно применить условия равновесия, т. е. условия равенства нулю суммарных сил и моментов. Это позволяет установить связь между внешними нагрузками и внутренними упругими силами в любом сечении тела, т. е. рассчитать его напряженно-деформированное состояние. В сечении возникают, вообще говоря, 6 внутренних силовых факторов: продольная сила N_z , поперечные силы Q_x и Q_y , изгибающие моменты M_x и M_y и крутящий момент M_z (в частных случаях некоторые из них могут быть равны нулю). Сложную деформацию любого тела под действием внешних нагрузок можно представить как комбинацию нескольких простых видов деформаций. Для брусьев (стержней) различают: 1) осевое растяжение или сжатие, при котором в поперечном сечении действует только продольная сила N_z (если «наружу» - растяжение, если «внутри» - сжатие); 2) сдвиг, при котором в плоскости сечения действует только поперечная сила Q ; 3) кручение, при котором единственным силовым фактором в сечении тела является крутящий момент M_z ; 4) изгиб, при котором в сечении тела действует только изгибающий момент M (M_x или M_y) (см. рис. 3.27в). При этом внутренние силы – считаются действующими равномерно по всему сечению бруса (величина

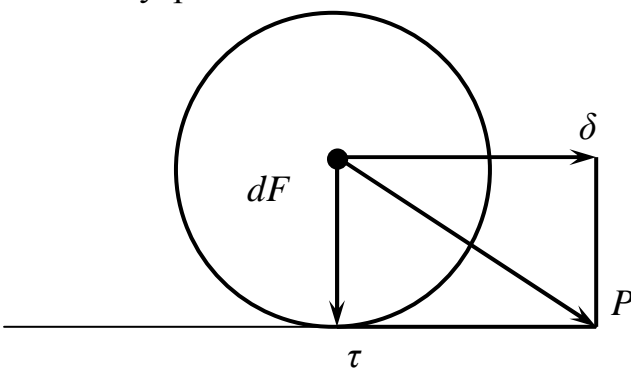


Рис. 3.28

внутренней силы, отнесенная к единице площади в окрестности какой-либо точки сечения, называется напряжением). Напряжения зависят от местоположения и ориентации сечения в брус при данном режиме его нагружения. Кроме того, напряжение в любой точке сечения является вектором, ориентированным определенным

образом к поверхности сечения. Произвольно ориентированный вектор полного напряжения $\sigma = \frac{dQ}{dF}$ (рис. 3.28) может быть разложен на нормальную (по отношению к сечению) составляющую σ_n и касательную (тангенциальную) составляющую σ_τ , причем $\sigma = \sqrt{\sigma_n^2 + \sigma_\tau^2}$.

Напряжение в элементе конструкции является мерой внутренних сил, возникающих в нем при приложении внешних нагрузок, и определяет величину и характер деформации элемента. Если напряжения превысят некоторый «предел прочности» (см. выше, п. 3.4), то возникает разрушение элемента в соответствующем сечении элемента. В этом состоит сущность расчета на прочность элементов конструкций методом сечений.

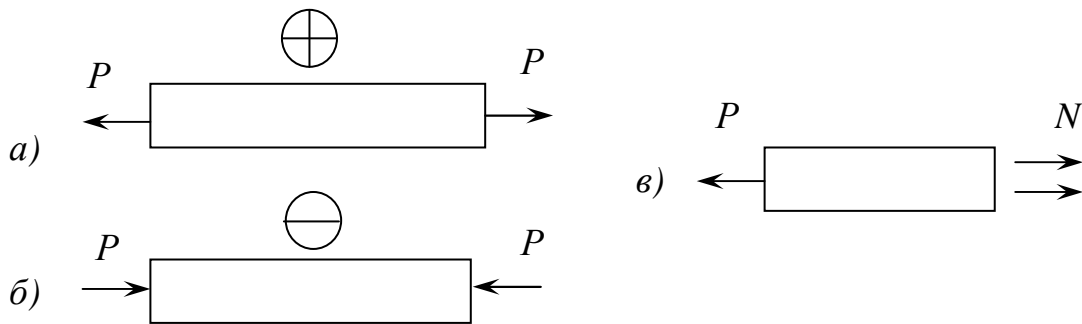


Рис. 3.29

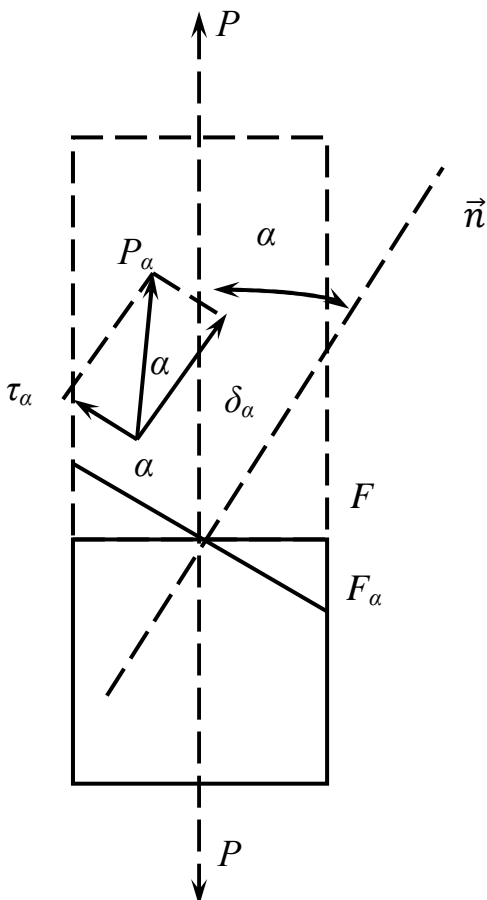


Рис. 3.30

Рассмотрим теперь некоторые конкретные примеры расчета силовых факторов в сечениях бруса. Простейшим случаем является деформация растяжения-сжатия, которая возникает под действием равных и противоположно направленных сил P , приложенных к торцам стержня (рис. 3.29а,б). Метод сечений в этом случае (рис. 3.27в) приводит к выводу, что в сечении действует только продольная сила $N=P$. Тогда нормальное напряжение в сечении равно $\sigma = \frac{N}{F}$, где F — площадь сечения. (Сила N считается положительной при растяжении и отрицательной при сжатии).

Большой практический интерес представляет распределение напряжения по поперечным сечениям бруса. На основании опытных данных была предложена гипотеза Бернулли: поперечные сечения деформируемого тела (бруса), достаточно удаленные от точек

приложения действующих сил, остаются плоскими и параллельными самим себе. Если эта гипотеза справедлива, то все эти сечения находятся в равных условиях и, следовательно, во всех этих сечениях действует одинаковое нормальное напряжение $\sigma_n = \frac{N}{F}$. Однако, при проведении реальных

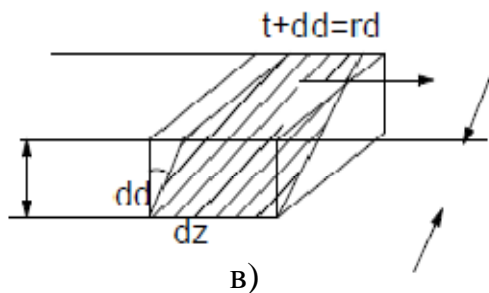
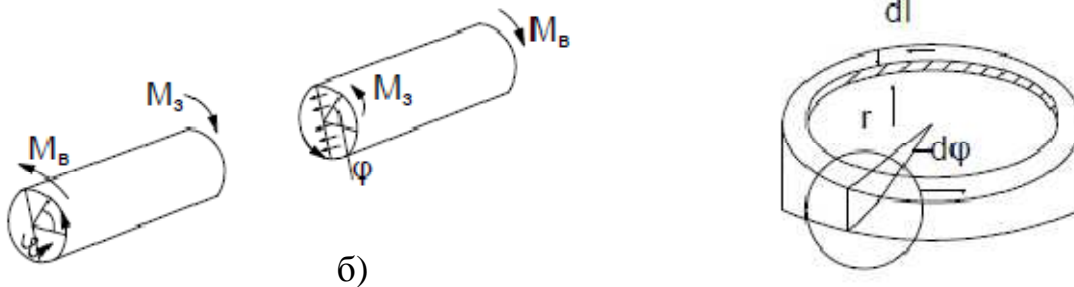


Рис. 3.31

испытаний материалов на растяжение в сечениях, близких к торцам стержня, имеются сосредоточенные силы (например, создаваемые зажимными устройствами). В этих местах напряжения в сечениях резко возрастают (кроме того, возникают и поперечные силы). Однако, опытными и теоретическими исследованиями было установлено, что в местах, удаленных от торцов хотя бы на величину диаметра

поперечного сечения, напряжения уже практически выравниваются. Результат этих исследований был сформулирован в форме принципа Сен-Венана: распределение напряжений в деформируемом теле зависит от способа приложения нагрузок только вблизи мест их приложения и не зависит в сечениях, достаточно удаленных от этих мест. Обычно этими местными искажениями напряжений можно пренебречь. Однако при наличии местных неоднородностей (выточек, отверстий и т. п.) равномерность внутренних напряжений может существенно нарушиться. Отметим еще, что в наклонном сечении, нормаль к некоторому \vec{n} образует с осью бруса (направлением растяжения) угол α , возникают как нормальные, так и касательные напряжения. Совокупность значений этих напряжений во всех сечениях, проведенных через данную точку тела, определяет напряженное состояние в этой точке.

Рассмотрим еще пример расчет $P_{кр}$ по методу Эйлера, считая брус абсолютно упругим (справедлив закон Гука). Для этой цели используется формула для радиуса кривизны ρ изогнутого бруса при воздействии изгибающего момента M :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{M}{EI_{min}} \quad (3.62)$$

(E – модуль упругости (модуль Юнга) материала бруса, I_{min} – момент инерции бруса относительно одной из главных осей, для которых величина I минимальна).

Поскольку в данном случае $M=P_y$ (см. рис. 3.32б), то уравнение (3.62) имеет вид:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{P}{EI_{min}} y. \quad (3.63)$$

Решение этого дифференциального уравнения при граничных условиях $y(z=0) = y(z=l) = 0$ (отсутствие прогиба у концов стержня) имеет вид:

$$y = A \sin kz, \quad \sin kl = 0, \quad (3.64)$$

где $k = \sqrt{P/EI_{min}}$. Первый корень $kl = 0$ соответствует $k=0$, т. е. случаю ненагруженного стержня. Второй корень $kl=\pi$ соответствует критическому значению $k_{кр}$:

$$k_{кр} = \frac{\pi}{l}. \quad (3.65)$$

Отсюда для $P_{кр}$ находим:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l^2}. \quad (3.66)$$

Эта формула называется формулой Эйлера. Она справедлива для

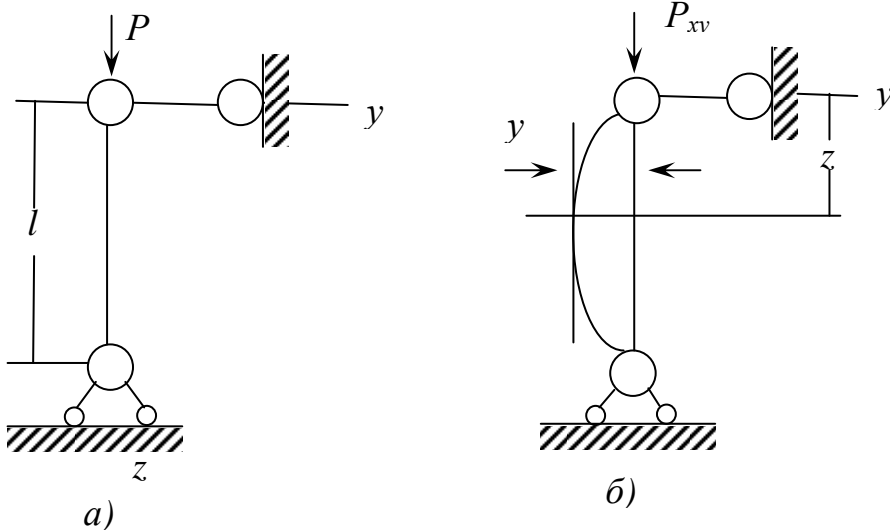


Рис. 3.32

достаточно гибких стержней (большой длины). Для очень жестких стержней $P_{кр}$ определяется из условия равенства критического напряжения ($\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F}$ (F – площадь сечения стержня)) пределу текучести материала.

ГЛАВА 4 РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

4.1 Кинетическая и потенциальная энергия

Понятие энергии является самым фундаментальным не только в физике, но и в естествознании вообще, и имеет глубокий философский смысл. В окружающем нас материальном мире непрерывно происходят разнообразные процессы движения и взаимодействия в различных формах. На первый взгляд между некоторыми формами движения материи нет ничего общего. Например, очевидно, что удар молотом о наковальню – механическое явление, связанное с сокращением мышц руки, перемещением молота относительно наковальни, деформацией молота и наковальни в момент удара и т.д. Количественно это явление можно охарактеризовать механической работой, совершаемой за счет мускульной энергии работающего. Но выработка этой мускульной энергии – биохимический процесс, связанный с протеканием множества химических реакций в организме. С другой стороны, в результате удара наковальня нагревается в определенной мере, что можно охарактеризовать как изменение ее «тепловой энергии», измеряемое повышением температуры. Таким образом, в этом элементарном примере мы видим цепочку взаимосвязанных химических, механических и тепловых процессов, которые количественно можно охарактеризовать единой количественной мерой – энергией разных видов. Опыт количественного изучения закономерностей огромного количества подобных процессов показал, что все формы движения материи (помимо указанных выше, различают еще электромагнитную, внутриядерную и др. формы) превращаются друг в друга в строго определенных количественных соотношениях. Так, например, совершение механической работы в 1 Дж сопровождается выделением количества теплоты 0,24 кал, т. е. механическая и тепловая энергия эквивалентны и могут выражаться в одних и тех же единицах. Таким образом, энергия есть единая количественная мера различных форм движения материи. Поскольку движение материи вечно и неуничтожимо, то и энергия всех видов этого движения должна оставаться неизменной, хотя энергии отдельных видов движения постоянно превращаются друг в друга. Этот закон сохранения и превращения энергии является наиболее общим законом природы и служит единой основой для количественного изучения всех явлений материального мира.

Рассмотрим теперь простейший вид движения материи – изменение относительного положения материальных тел в пространстве с течением времени, которое называется механическим движением. Ему соответствуют механическая энергия, которая, согласно указанному определению, зависит от состояния движения тел и их взаимного расположения.

Механическая энергия может быть выражена количественно путем измерения механической работы, совершаемой за счет ее изменения. Работа выражается произведением силы на величину вызванного ею перемещения.

Если перемещение равно нулю, то и работа равна нулю, сколь бы велика ни была действующая сила. Элементарная работа силы \vec{F} на отрезке траектории материальной точки $d\vec{S}$ равна $dA = (\vec{F}d\vec{S})$. Поэтому на конечном отрезке (L) величина работы равна криволинейному интегралу:

$$A = \int_{(L)} (\vec{F}d\vec{S}). \quad (4.1)$$

Поскольку, согласно 2-му закону Ньютона, $\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{V})$, $a \frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{V}$, то из (4.1) имеем:

$$A = \int_{(L)} \vec{V}d(m\vec{V}). \quad (4.2)$$

Величина $P = \frac{dA}{dt}$ называется мощностью. Она характеризует работу, совершаемую в единицу времени. Согласно определению величины dA , находим:

$$P = \frac{(\vec{F}d\vec{S})}{dt} = \left(\vec{F} \frac{d\vec{S}}{dt} \right) = (\vec{F}\vec{V}). \quad (4.3)$$

Если направления перемещения и силы совпадают, то формулы (4.1) и (4.3) приобретают более простой вид:

$$a) A = \int_{(L)} FdS; \quad b) P = FV. \quad (4.4)$$

Формула (4.3) и ее упрощенный вариант (4.4(b)) имеют большое практическое значение. При неизменной мощности двигателя сила тяги с уменьшением скорости возрастает. Именно по этой причине, например, водитель автомобиля переключает скорость при подъеме. С другой стороны, при неизменной силе тяги (как это имеет место, например, в реактивных авиационных двигателях), (см. выше, гл. 2), единственным средством увеличения скорости движения является повышение мощности двигателя (именно этот способ и является основным при поисках путей преодоления «звукового барьера» в авиации).

Учтем теперь, что в рамках классической механики масса тела не зависит от состояния его движения, т.е. от скорости V поэтому формула (4.2) может быть преобразована следующим образом:

$$A = m \int_{(L)} \vec{V}d\vec{V} = m \int_{(L)} d \frac{V^2}{2} = m \left(\frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} \right) = \frac{1}{2} m V_2^2 - \frac{1}{2} m V_1^2 = T_2 - T_1 = \Delta T, \quad (4.5)$$

где V_1 и V_2 – скорости движения в начальной и конечной точках траектории L , соответственно. Величина

$$T = \frac{mV^2}{2} \quad (4.6)$$

является количественной мерой состояния движения материальной точки и называется кинетической энергией движущейся точки. Формула (4.5) означает, что работа, совершаемая внешней силой над некоторой материальной точкой, идет на увеличение ее кинетической энергии.

Формула (4.5) может быть непосредственно обобщена на систему произвольного числа материальных точек. Записывая это выражение для 1-й

материальной точки, в виде $A_i = \Delta T_i$ принимая во внимание как внешние, так и внутренние силы, действующие в системе, (т. е. $A_i = A'_i + A''_i$), путем суммирования по i находим:

$$\sum_i \Delta T_i = \sum_i A'_i + \sum A''_i, \quad (4.7)$$

$$\Delta T = \sum_i A'_i + \sum A''_i, \quad (4.8)$$

где ΔT – изменение суммарной кинетической энергии некоторой системы i материальных точек. Из формулы (4.8) следует, что внутренние силы, которые, как и было уже изложено в гл. 2, не могут изменить суммарный импульс изолированной системы, в состоянии изменить ее кинетическую энергию. Как мы увидим ниже, это изменение объясняется изменением взаимного расположения точек, образующих систему (в результате чего изменяется ее потенциальная энергия). Типичным примером является разрыв гранаты: при разлете осколков их кинетическая энергия значительно больше, чем у неразорвавшейся гранаты (чем, собственно, и объясняется ее поражающее действие). Но при этом осколки разлетаются на значительное расстояние, и взаимодействие между ними, вначале весьма сильное, обращается практически в нуль, в то время как суммарный импульс остается неизменным.

Как уже указывалось выше, формула (4.6) относится к материальной точке, которая, согласно проведенному в гл. 1 обсуждению, может совершать только поступательное движение. В противоположность этому, твердое тело конечных размеров может совершать еще и вращательное движение вокруг некоторой оси. В этом случае, очевидно, к энергии поступательного движения добавится еще и энергия вращения. Пользуясь представлением твердого тела как системы материальных точек, в гл. 2 была выведена формула для суммарной кинетической энергии твердого тела, вращающегося вокруг оси, проходящей через его центр масс, который, в свою очередь, одновременно движется поступательно с некоторой скоростью V_c , т. е.:

$$T = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}, \quad (4.9)$$

где I – момент инерции тела; ω – угловая скорость его вращения. Эта формула является выражением частного случая более общей теоремы Кенига, согласно которой:

$$T = T' + \frac{mV_c^2}{2}. \quad (4.10)$$

Это означает, что кинетическая энергия некоторой произвольной движущейся системы материальных точек равна сумме кинетической энергии движения центра масс, в котором сосредоточена вся масса системы, и кинетической энергии движения этой системы по отношению к ее центру масс.

Формула (4.5) может быть обобщена на «релятивистский» случай движения со скоростью, близкой к скорости света. Это обобщение осуществляется в релятивистской динамике, являющейся составной частью теории относительности (оно будет рассмотрено подробно в т. III курса).

Превращение кинетической энергии тела в механическую работу весьма часто встречается в природе и широко применяется в технике. Укажем несколько наглядных примеров. Так, падающий с большой скоростью на Землю метеорит образует огромную воронку, для открытия которой потребовалась бы мощная техника. При забивании свай используются свайные молоты, с массой ударной части до 2,5 т (дизельные молоты). Молоты меньшей массы постоянно используются для аналогичных работ (например, для забивания гвоздей) в повседневной практике (как производственной, так и бытовой). Действие гранат, снарядов и т. п. основано на огромной величине кинетической энергии осколков при взрыве, за счет которой совершается большая разрушительная работа. Широко используется также кинетическая энергия воды и воздуха (ветра). Так, в гидравлических машинах создается струя воды с большой скоростью и, следовательно, кинетической энергией, которая оказывается достаточной для разрушения твердых горных пород. За счет кинетической энергии движущейся воды совершается работа вращения турбин гидроэлектростанций. Энергия движущегося воздуха (ветра) с незапамятных времен использовалась для приведения в движение парусных судов (это не потеряло своего значения и в настоящее время), ветряных мельниц и т. д.

Переходим теперь к рассмотрению потенциальной энергии – второй составной части механической энергии. Наличие этой энергии обусловлено универсальным явлением материального мира – взаимодействием между образующими его частицами материи – «элементарными частицами». Поскольку тела больших размеров представляют собой системы из большого числа этих частиц, то силы взаимодействия того или иного вида существуют между всеми телами, которые образуют в окружающем их пространстве «силовые поля».

Рассмотрим кратко природу взаимодействия между различными телами. Наибольшие силы взаимодействия в природе существуют между «тяжелыми» элементарными частицами, к которым относятся и нуклоны (протон и нейтрон), при их сближении на расстояние порядка 10^{-15} м. За счет этого «сильного» взаимодействия образуются атомные ядра. В «больших» масштабах эти силы не проявляются, поскольку являются короткодействующими, т. е. быстро ослабевают при расстояниях больших указанной величины. Более слабые силы – электромагнитные – возникают между покоящимися (электростатические силы) или движущимися (магнитные силы) электрически заряженными частицами. Электромагнитное взаимодействие (притяжение) между заряженными элементарными частицами – протонами и электронами – обуславливает образование атомов вещества. Взаимодействие между атомами также имеет электромагнитную природу и является, в свою очередь, причиной возникновения рассмотренных в гл. 2 упругих сил в твердых и жидких телах, образование сложных молекул из атомов (в том числе гигантских макромолекул, осуществляющих биохимические функции в живом организме) и т. п. В

процессах ядерного распада проявляются так называемые «слабые» взаимодействия, роль которых в природе будет особо рассмотрена в т. III курса ввиду их весьма специфического характера. Наконец, универсальными силами взаимодействия между любыми элементарными частицами или телами в природе являются гравитационные силы, обусловленные наличием массы – универсального свойства материи. Ввиду огромной роли этих сил в природе они будут особо рассмотрены. Здесь отметим лишь, что обычно они заметно проявляются в виде сил притяжения между телами значительной массы согласно закону всемирного тяготения.

Рассмотрим теперь некоторое тело А, находящееся вдали от всех других тел. Согласно изложенному выше, оно создает в окружающем пространстве силовое поле, которое можно обнаружить, помещая в некоторую точку поля 1 «пробное» тело В и регистрируя силу \vec{F} , действующую на него со стороны тела А. Для большинства перечисленных выше видов взаимодействий эта сила является центральной, т. е. зависит только от расстояния r до точки поля: $\vec{F} = \vec{F}(r)$. Тогда, для перемещения тела В в точку 2 придется совершить работу извне против сил поля:

$$A_{12} = \int_1^2 (\vec{F} d\vec{r}). \quad (4.11)$$

Можно показать, что эта работа не зависит от формы пути перемещения из точки 1 в точку 2. Такие силовые поля называются консервативными, и именно для них можно ввести понятия потенциальной энергии. Примеры неконсервативных сил будут рассмотрены ниже (в частности, работа сил трения будет рассмотрена особо в п. 4).

Учтем теперь, что с увеличением расстояния от силового центра (тела А) сила $|\vec{F}|$ убывает (например, в гравитационном поле $F \sim \frac{1}{r^2}$), так что $F(r \rightarrow \infty) = 0$. Учитывая это обстоятельство, запишем интеграл (4.11) в виде:

$$A_{12} = \int_{\infty}^2 (\vec{F} d\vec{r}) - \int_{\infty}^1 (\vec{F} d\vec{r}) = \int_1^{\infty} (\vec{F} d\vec{r}) - \int_2^{\infty} (\vec{F} d\vec{r}) = U_1 - U_2 = \Delta U. \quad (4.12)$$

Величина $\int_a^{\infty} (\vec{F} d\vec{r})$, численно равная работе по перемещению «пробного» тела из произвольной точки $r=a$ силового поля в бесконечность (где поле отсутствует), называется потенциальной энергией «пробного» тела в этой точке поля. Формула (4.12) показывает, что работа по перемещению в силовом поле из одной точки в другую численно равна разности потенциальных энергий для соответствующих точек.

Если внешние силы отсутствуют, то тело будет перемещаться под действием собственных сил поля. В этом случае, согласно (4.12), работа перемещения совершается за счет изменения потенциальной энергии в поле.

Сравнение формул (4.5) и (4.12) обнаруживает глубокую аналогию между ними: работа может совершаться за счет изменения состояния движения, характеризуемого его кинетической энергией (формула (4.5)), или же за счет изменения его положения в силовом поле (т. е. относительно других тел), характеризуемом потенциальной энергией (формула (4.12)).

Величины T и U являются двумя составляющими полной механической энергии W :

$$W = T + U. \quad (4.13)$$

Для вычисления потенциальной энергии достаточно знать характер силового поля, описываемый зависимостью силы от расстояния. Действительно, из определения:

$$U = \int_a^\infty (\vec{F} d\vec{r}). \quad (4.14)$$

Видно, что при известном законе $\vec{F}(r)$ можно вычислить $U=U(a)$. В качестве примера рассмотрим гравитационное поле, в котором, как известно,

$$F(r) = -\gamma \frac{Mm}{r^2}, \quad (4.15)$$

где M – масса тела, создающего силовое поле, m – масса «пробного» тела, γ – гравитационная постоянная, знак означает силу притяжения. Выполняя интегрирование, находим:

$$U(a) = \int_a^\infty \gamma Mm \frac{dr}{r^2} = -\frac{\gamma Mm}{a} \quad (4.16)$$

или, ввиду произвольности точки a :

$$U(r) = -\frac{\gamma Mm}{r}. \quad (4.17)$$

Рассмотрим тело вблизи поверхности Земли на расстоянии h , тогда $M=M_3, ar=R_3+h$, причем $h \ll R_3$. Тогда вместо (4.17) имеем:

$$U(h) = -\frac{\gamma M_3 m}{R_3+h} = -\frac{\gamma M_3 m}{R_3} \cdot \frac{1}{1+\frac{h}{R_3}} \approx -\frac{\gamma M_3 m}{R_3} \left(1 - \frac{h}{R_3}\right) = \frac{\gamma M_3 m}{R_3^2} h - \frac{\gamma M_3 m}{R_3}. \quad (4.18)$$

Вводя обозначения $U_{(h=0)} = U_0 = -\frac{\gamma M_3 m}{R_3}$ и $g = \frac{\gamma M_3}{R_3^2}$, получим:

$$U(h) - U_0 = mgh, \quad (4.19)$$

т.е. известную формулу для потенциальной энергии тела вблизи поверхности Земли.

Аналогичным образом ведется расчет потенциальной энергии в других случаях. Например, для тела, находящегося под действием упругой силы $F=-kx$ потенциальная энергия равна $U = -k \frac{x^2}{2}$ (коэффициент k определяет жесткость упругой связи).

Совершение телом работы за счет изменения его потенциальной энергии очень часто реализуется в природе и технике. При этом характерно то, что во многих подобных случаях потенциальная энергия превращается в кинетическую и только затем – в механическую работу.

Так обстоит дело в приведенном выше примере падения тела на Землю, его потенциальная энергия тяготения к Земле вначале превращается в кинетическую, которая затем (частично) превращается в механическую работу по образованию воронки. При падении водяной струн с некоторой высоты ее потенциальная энергия вначале превращается в кинетическую энергию, а затем уже в механическую работу по вращению колеса турбины или мельничного жернова. Однако возможно и непосредственное превращение потенциальной энергии в работу. Так, в частности, всегда

обстоит дело при действии сил упругости (например, в различных амортизационных устройствах). Поле тяготения будет рассмотрено отдельно в гл. 5, а электрическое поле в т. II; там будут приведены и соответствующие примеры из практики.

Рассмотрим примеры систем, в которых работа перемещения зависит от формы пути – с увеличением длины пути между двумя точками работа перемещения возрастает. К таким системам относятся, прежде всего, диссипативные системы, в которых действуют силы трения, возникающие при движении тел в жидких и газообразных средах или одних тел по поверхности других. Эти силы зависят от относительной скорости движения тела и всегда препятствуют движению. Диссипативные системы будут подробно рассмотрены ниже, в п. 4.3. Особым видом неконсервативных сил являются гироскопические силы, направленные перпендикулярно движению и потому не совершающие работу при перемещении тела. К ним относятся, например, сила Лоренца, действующая на электрический заряд, движущийся в магнитном поле (см. т. II, п. 6.3), а также инерционные силы, действующие в неинерциальных (например, вращающихся) системах отсчета, например, сила Кориолиса (см. выше, п. 3.2).

4.2 Закон сохранения механической энергии

Как было указано в п. 4.1, одним из наиболее универсальных законов природы является закон сохранения полной энергии всех видов в изолированной системе тел. В такой системе, характеризующейся отсутствием поступления энергии извне, могут происходить самые разнообразные процессы превращения одних видов энергии в другие. Так, механическая энергия может переходить в тепловую (например, при соударениях тел), в электрическую (генератор с движущимся ротором) и внутриядерную (разрушение ядер при бомбардировке быстрыми частицами) и т. д. Возможны и обратные превращения – тепловой (тепловые машины), электрической (электродвигатели) и ядерной (ядерный взрыв) энергий в механическую. Очевидно, что вследствие протекания этих процессов механическая энергия системы тел может значительно изменяться со временем. Превращение механической энергии в другие виды (часто не по назначению, а в виде потерь, например, тепловых) называется диссипацией энергии, а системы тел, в которых это происходит – диссипативными системами. Пример такой системы уже был приведен выше: при наличии в системах сил трения энергия движущегося тела постепенно расходуется на совершение работы по преодолению сил трения и уменьшается со временем. При этом трущиеся тела в той или иной степени нагреваются, т. е. их тепловая энергия возрастает. Взаимопревращения механической и тепловой энергии являются предметом изучения особого раздела физики – термодинамики, основы которой будут изложены в главе 10.

Ясно, что если этими процессами в определенных условиях можно пренебречь, то механическая энергия изолированной системы тел, складывающаяся из кинетической энергии их движения и потенциальной энергии их взаимодействия, будет оставаться неизменной во времени, и возможны лишь взаимопревращения кинетической и потенциальной составляющих полной энергии. Это положение выражает закон, сохранения (и превращения) механической энергии.

Как уже указывалось выше, существуют три фундаментальных закона сохранения в механике, отображающие коренные свойства пространства и времени. Законы сохранения импульса и момента импульса, рассмотренные ранее, отражают однородность и изотропность пространства, соответственно. Закон сохранения механической энергии отражает однородность времени, т. е. одинаковый характер механических процессов, независимо от начального времени t_0 . Так явление свободного падения тела вблизи поверхности Земли с ускорением g всегда происходило, происходит и будет происходить одинаковым образом (например, продолжительность падения с высоты h равна $\sqrt{\frac{2h}{g}}$), когда бы ни начался этот процесс. Таким образом, закон сохранения механической энергии имеет не только физическое, но и глубокое философское содержание, отображая одно из коренных свойств движения – формы бытия материи.

Формально закон сохранения полной механической энергии $W=T+U$ может быть получен следующим образом. Обратимся вновь к рассмотрению рис. 4.1; тело, первоначально покоившееся в некоторой точке 1 силового поля, созданного другим телом А, под действием сил поля придет в движение, если какие-либо силы связи на него не действуют. Пусть это поле

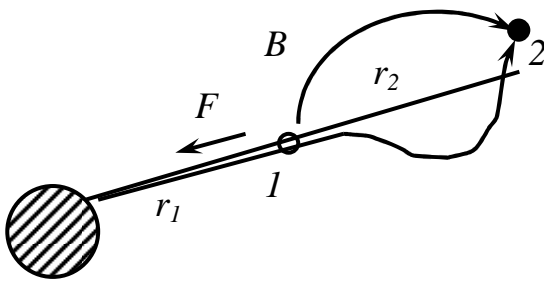


Рис. 4.1

для определенности будет полем отталкивания. Тогда через некоторое время тело переместится в точку 2, и при этом будет совершаться работа, равная, согласно формуле (4.12):

$$A_{12} = -\Delta U. \quad (4.20)$$

С другой стороны, силы поля сообщают телу ускорения, и его скорость, а следовательно, и

кинетическая энергия $\frac{mv_2^2}{2} = T$, возрастают. Согласно формуле (4.5) увеличение этой энергии ΔT обусловлено совершенной работой сил поля A_{12} :

$$A_{12} = \Delta T. \quad (4.21)$$

Из (4.20) и (4.21) находим:

$$-\Delta U = \Delta T, \quad \Delta T + \Delta U = 0, \quad \Delta(T + U) = 0. \quad (4.22)$$

Откуда:

$$T + U = W = const. \quad (4.23)$$

Если система содержит n взаимодействующих движущихся тел, то, суммируя (4.23), находим:

$$\sum_{i=1}^n (T_i + U_i) = \sum_{i=1}^n W_i = \text{const} . \quad (4.24)$$

Это и есть математическое выражение закона сохранения механической энергии.

Приведем простейший иллюстрированный пример – падение тела с высоты h на поверхность Земли. Согласно формуле (4.19), потенциальная энергия U тела на этой высоте равна $U = mgh + U_0$, а кинетическая энергия равна нулю, так что $W = T + U = mgh + U_0$. В момент падения тела на Землю его скорость, как известно равна $v = \sqrt{2gh}$ и кинетическая энергия $T = \frac{mv^2}{2} = mgh$, и так, что полная $W = T + U$ не изменяется в результате падения тела. Если же сопротивление воздуха велико, то скорость в момент падения будет меньше, чем $\sqrt{2gh}$, и кинетическая энергия в момент падения будет меньше mgh , т. е. полная механическая энергия тела уменьшается. Таким образом, система «тело-Земля» при учете силы вязкого трения (сопротивления воздуха) становится диссипативной. Как мы увидим ниже, силы трения всегда присутствуют в процессах, протекающих в земных условиях, чем и обусловлено их огромное практическое значение. В Космосе эти силы отсутствуют, и поэтому в нем можно наблюдать механические процессы «в чистом виде». В частности, закон сохранения механической энергии при этом проявляется, например, в том, что система Земля-Солнце (и вся солнечная система в целом) сохраняет неизменное состояние механического движения уже миллиарды лет.

Рассмотрим еще некоторые примеры действия закона сохранения энергии в механике. К числу наиболее ярких примеров действия этого закона являются колебательные системы. Как будет показано в гл. 7, процесс незатухающих гармонических колебаний представляет собой периодическую «перекачку» кинетической энергии в потенциальную и наоборот, причем полная механическая энергия $W = T + U$ сохраняется. Так, при колебании маятника его потенциальная энергия в среднем положении минимальна, а кинетическая – максимальна; в крайних положениях имеет место обратная ситуация. При «утечке» (диссипации) энергии колебания постепенно затухают.

Превращение кинетической энергии в потенциальную и обратно при сохранении полной энергии может носить и непериодический «разовый», характер. На этом явлении основано действие всевозможных буферов, рессор, тормозных и обкатных устройств и т. п. Так, при ударе буфера о препятствие кинетическая энергия движения переходит в равную по величине потенциальную энергию буфера, что приводит к «погашению» скорости транспортного средства без его повреждения; при стрельбе из автоматического оружия энергия отдачи превращается в энергию сжатой пружины при взведении затвора, которая затем вновь превращается в

кинетическую энергию при выстреле; при прыжке с шестом потенциальная энергия упругой деформации шеста преобразуется в кинетическую энергию спортсмена, которая затем, в свою очередь, превращается в его потенциальную энергию, что приводит к значительному увеличению высоты прыжка; аналогичные явления происходят при упражнении на батуте и т. п. Превращения кинетической энергии в потенциальную и обратно имеют место при упругом соударении тел, что было показано выше (п. 4.5).

Следует отметить, что «энергетический» подход позволяет получать простые решения многих задач, в том числе и прикладного характера. Например, если требуется рассчитать работу по вкатыванию цилиндра или шара массой m по наклонной криволинейной траектории на высоту h , то очевидно, что непосредственный расчет работы с использованием определяющего соотношения (4.1) будет весьма громоздким, а может оказаться и неосуществимым, например, если форма траектории не задана. Если же пренебречь действием сил трения (трение качения обычно мало, см. ниже), то данная система оказывается консервативной, и согласно закону сохранения механической энергии искомая работа будет равна mgh , независимо от формы пути перемещения. Ниже, в главе 7, будет приведен также способ вывода уравнения механических колебаний на основе закона сохранения энергии. «Энергетический» подход оказывается целесообразным не только в механике, но и во многих других областях физики (см., например, гл. 10).

Одним из интересных примеров закона сохранения механической энергии являются различные системы автоматического оружия, в которых энергия пороховых газов, возникающих при выстреле, используется частично и для перезарядки оружия и производства очередного выстрела. К автоматическому оружию относятся автоматические пистолеты, автоматы (пистолеты-пулеметы), автоматические винтовки (карабины), ручные пулеметы, автоматические пушки и др.

В зависимости от способа использования энергии пороховых газов различают несколько типов автоматики. В некоторых системах используется отдача ствола при выстреле; ствол при этом делается подвижным и скрепляется с затвором. Во время выстрела ствол отходит назад, сжимая возвратную пружину; возвращение ствола на место под действием этой пружины сопровождается автоматическим извлечением стреляной гильзы, досылком очередного патрона в патронник и запиранием затвора. К таким системам относятся пистолет ТТ, станковый пулемет и др. В других системах используется отдача затвора при выстреле. В этих системах ствол неподвижен, а затвор является свободным или специальным образом скреплен со стволом. В ряде систем пороховые газы после выстрела отводятся через газоотводное отверстие в стволе в специальную газовую камеру, расположенную обычно в передней части ствола. В этой камере находится подвижный поршень, с которым соединены детали затвора. Под действием пороховых газов происходит отпирание затвора и извлечение

гильзы. Обратное движение подвижных деталей и зарядка осуществляется с помощью возвратной пружины. Эта система автоматики применяется во многих типах пулеметов и других видах современного стрелкового оружия. Основным достоинством автоматического оружия является высокая скорострельность, позволяющая поражать быстро движущиеся цели и создавать большую плотность огня. При высоком режиме ведения огня все более заметной становится диссипация механической энергии в системе оружия: наличие многочисленных быстро движущихся деталей, а также текущих пороховых газов под высоким давлением, сопровождается действием больших сил трения, в результате чего значительная часть механической энергии переходит в тепло. Это вызывает интенсивное нагревание ствола и всех других деталей, что может привести к отказу оружия (например, к заклиниванию затвора). В автоматических системах старых конструкций применялось водяное охлаждение, что создавало значительные неудобства в боевой обстановке (необходимость подачи воды). В современных видах автоматического оружия применяется воздушное охлаждение стволов.

В комбинированных конструкциях, станковых и ручных пулеметах в боевых условиях производится смена чрезмерно нагретых стволов, что предотвращает отказ оружия.

4.3 Консервативные системы

В консервативных системах выполняется закон сохранения механической энергии, которая для системы из нескольких материальных точек состоит из двух слагаемых – кинетической и потенциальной энергии.

$$E = T(q, \dot{q}) + U(q) = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} + U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots), \quad (4.25)$$

где q – обобщенные координаты системы, т. е. величины, совокупность которых полностью характеризует ее механическое состояние, $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$ обобщенные скорости. Как уже отмечалось выше, закон сохранения механической энергии отражает фундаментальный физический факт – однородность времени, т.е. одинаковый характер протекания того или иного механического явления в любом месте пространства в любой заданный момент времени.

Выражение (4.25) можно получить на основе общего подхода к рассмотрению механических явлений – принципа наименьшего действия или принципа Гамильтона. Согласно этому принципу для произвольной механической системы вводится функция $L(q, \dot{q}, t)$, называемая функцией Лагранжа и обладающая свойством аддитивности: функция L для системы невзаимодействующих материальных точек равна сумме функций L для отдельных точек. Для свободной материальной точки функция Лагранжа, согласно принципу относительности Галилея, может лишь линейно зависеть

от квадрата скорости ее движения, т. е. при соответствующем выборе единиц измерения совпадает с кинетической энергией частицы:

$$L = \frac{mv^2}{2}. \quad (4.26)$$

Для системы из S невзаимодействующих материальных точек:

$$L = \sum_{i=1}^S \frac{1}{2} m_i v_i^2. \quad (4.27)$$

Если же между этими точками существует взаимодействие, то функция Лагранжа:

$$L = \sum_{i=1}^S \frac{1}{2} m_i v_i^2 - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots) = T - U \quad (4.28)$$

или в обобщенных координатах:

$$L = \frac{1}{2} \sum_i \sum_k a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k - U(q). \quad (4.29)$$

В силу однородности времени функция L для замкнутой системы материальных точек (или для систем, находящихся в постоянных – статических – внешних полях) не может явно зависеть от времени, так что $\frac{dL}{dt} = 0$, и

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \ddot{q}_i = 0. \quad (4.30)$$

Для дальнейшего преобразования необходимо применить принцип наименьшего действия, согласно которому система переходит от состояния движения в момент t_1 к состоянию движения в момент t_2 таким образом, что интеграл

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = S, \quad (4.31)$$

называемый «действием», имеет минимальное (вообще говоря, экстремальное, т. е. минимальное или максимальное) значение. При этом на вид функции накладываются определенные ограничения, выражаемые уравнениями Лагранжа. Они выводятся из сформулированного принципа методами вариационного исчисления, и имеют вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (4.32)$$

При наличии соответствующих начальных условий решение дифференциальных уравнений (4.32) полностью определяет движение механической системы. Примеры такой процедуры приведены ниже:

Выражая $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ из (4.32), можно переписать уравнение (4.30) в виде:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \ddot{q}_i = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \quad (4.33)$$

или

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = 0. \quad (4.34)$$

Откуда следует

$$\left(\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = \text{const.} \quad (4.35)$$

Применяя к функции Лагранжа (4.28) известную теорему Эйлера для однородных функций имеем:

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T. \quad (4.36)$$

Подставляя в (4.35), приходим к закону сохранения механической энергии (4.25).

Итак, при таком «энергетическом» подходе уравнения Лагранжа, полная энергия системы и принцип однородности времени находятся в тесной друг с другом связи.

Величины в уравнении Лагранжа согласно

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = P_i \quad (4.37)$$

называются обобщенными импульсами.

Полная механическая энергия системы, выраженная через координаты и импульсы, называется гамильтоновой функцией (или гамильтонианом) системы:

$$H(p, q, t) = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \sum_i P_i \dot{q}_i - L. \quad (4.38)$$

Полный дифференциал функции Гамильтона равен:

$$dH = - \sum_i \dot{P}_i dq_i + \sum_i \dot{q}_i dP_i. \quad (4.39)$$

Причем P_i и q_i теперь рассматриваются как независимые переменные.

Из этого равенства следует, что:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (4.40)$$

Эти выражения представляют собой так называемые канонические уравнения, или уравнения Гамильтона механической системы. Полная производная H равна:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial P_i} \dot{P}_i. \quad (4.41)$$

После подстановки выражений (4.40) с учетом принципа однородности получается:

$$H = const. \quad (4.42)$$

Что означает закон сохранения полной механической энергии.

При рассмотрении реальной траектории движения удобно рассматривать действие S (4.31) как функцию координат и времени. Можно считать, что действие характеризует движение по истинным траекториям и принимает в момент t_2 различные положения при едином общем начале этих траекторий в момент t_1 . При этом можно показать, что обобщенные импульсы p_i могут быть выражены через S как:

$$P_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}. \quad (4.43)$$

Действие S можно рассматривать также как функцию момента времени $t_2 = t$, в который система принимает заданное положение $q^{(2)}$ при едином

общем, начальном положении $q^{(1)}$. При таком понимании $S' = S(q, t)$, причем:

$$\frac{dS}{dt} = L = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i P_i \dot{q}_i. \quad (4.44)$$

Откуда

$$\frac{dS}{dt} = L - \sum_i P_i q_i = -H \quad (4.45)$$

или

$$\frac{dS}{dt} + H\left(q, p = \frac{\partial S}{\partial t}, t\right) = 0. \quad (4.46)$$

Выражение (4.46) называется уравнением Гамильтона-Якоби, и его интегрирование при соответствующих начальных условиях дает описание характера движения системы.

Итак, уравнения Лагранжа (4.32), канонические уравнения (4.40) и уравнение Гамильтона-Якоби (4.46) служат основой методов описания движения механической системы, реализуемых путем интегрирования этих уравнений. Общим для них является «энергетический» подход – составление функции Лагранжа или функции Гамильтона с учетом кинетической и потенциальной энергии частиц, образующих систему. Эти общие методы чрезвычайно широко применяются в теоретической и прикладной механике. Причина этого становится ясной, если учесть, что при движении и взаимодействии любых тел в них возникают деформации и развиваются внутренние упругие напряжения, оказывающие влияние на движение тел. Во многих случаях точный количественный учет этих явлений представляет большие трудности, что соответственно усложняет и динамическое описание движения на основе 2-го закона Ньютона, для которого необходимо знать и учесть все силы, действующие в системе. Пример такого рода будет особо рассмотрен ниже, в п. 4.5 – упругие и неупругие соударения тел.

При соударении все тела деформируются на непродолжительное время, возникают возвращающие упругие силы, и через некоторое время первоначальная форма тел полностью или частично восстанавливается, принимая некоторое конечное состояние системы. Ясно, что полный количественный учет всех действующих при этом сил и их зависимости от времени был бы довольно затруднительным, хотя и принципиально возможным. В то же время «энергетический» подход, с привлечением закона сохранения импульса, позволяет сравнительно легко и просто решить задачу об изменении характера движения тел в результате удара. Некоторые подобные примеры будут рассмотрены ниже.

При одномерном движении системы с одной степенью свободы функция Лагранжа и Гамильтониан системы зависят только от одной координаты:

$$L = \frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2 - U(q) = \frac{m}{2} \dot{X}^2 - U(x), \quad (4.47)$$

$$E = H = \frac{m}{2} \dot{X}^2 + U(x). \quad (4.48)$$

Интегрирование дифференциального уравнения при заданной величине полной энергии E дает:

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}} + \text{const}, \quad (4.49)$$

где постоянная интегрирования определяется из начального условия:

$$x(t=0) = x_0. \quad (4.50)$$

Для осуществления интегрирования необходимо задать вид функции $U(x)$.

Кинетическая энергия системы – всегда положительная величина, т. е.:

$$T = (E - U(x)) > 0. \quad (4.51)$$

Таким образом, движение возможно лишь в некоторой области между точками пространства, для которых выполняется условие:

$$U(x) = E. \quad (4.52)$$

В этих точках (граница движения) (или «точках остановки») кинетическая энергия и, следовательно, скорость обращаются, в нуль. Если таких точек две, то система совершает колебания, т. е. периодическое движение между этими точками (конечное, или «финитное», движение). Если же таких точек нет, (если есть только одна точка), то движение является неограниченным – «инфинитным». Ясно, что характер движения определяется запасом полной механической энергии системы.

В качестве примера рассмотрим колебания математического маятника. Период колебаний при заданной зависимости $U(x)$ определяется, согласно (4.49) и (4.52) выражением:

$$t(E) = \sqrt{2m} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}, \quad (4.53)$$

где x_1 и x_2 – точки остановки системы при заданной энергии E . Полная энергия маятника равна:

$$E = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} - mgl\cos\varphi, \quad (4.54)$$

где φ – угол отклонения нити от вертикали, φ_0 – его максимальное значение в крайних точках), l – длина нити. Точки остановки в данном случае определяются значениями φ и φ_0 , симметричными относительно положения, в котором $\varphi = 0$. Поэтому период колебаний равен $4t_0$, где t_0 – время прохождения маятником интервала углов от 0 до φ_0 , и формула (4.53) принимает вид:

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}} = 2 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi_0}{2}}} = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} K(\sin\frac{\varphi_0}{2}), \quad (4.55)$$

где

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\xi}{\sqrt{1-K^2\sin^2\xi}}, \quad \sin\xi = \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}}, \quad \sin\frac{\varphi_0}{2} = K. \quad (4.56)$$

Величина $K(k)$ – называется полным эллиптическим интегралом первого рода. При малых углах ($\sin \varphi_0 \approx \varphi_0$) функцию $K(k)$ можно разложить в ряд, и для T имеем:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{16} \varphi_0^2 + \dots\right). \quad (4.57)$$

Члены этого ряда быстро убывают, так что с хорошим приближением получается известный результат ($T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$). Однако следует заметить, что при таком выводе формулы совершенно не рассматривалось динамика колебательного движения (этот вопрос будет рассмотрен ниже, в гл. 7).

Точное интегрирование уравнений движения возможно далеко не всегда. В то же время имеются важные для практики частные случаи, когда такое точное решение может быть получено. К их числу относится так называемая «задача двух тел» – о движении простейшей системы, содержащей всего лишь две взаимодействующие материальные точки. В этом случае потенциальная энергия взаимодействия зависит только от расстояния между этими точками: $U(|\vec{r}|) = U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$. Функция Лагранжа для системы имеет вид:

$$L = \frac{m_1 \dot{r}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{r}_2^2}{2} - U(|\vec{r}|). \quad (4.58)$$

Если поместить начало координатной системы в центре инерции системы, для которого

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0, \quad (4.59)$$

то

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}. \quad (4.60)$$

Подстановки в выражение для L после преобразований даёт:

$$L = \frac{m \dot{r}^2}{2} - U(|\vec{r}|), \quad (4.61)$$

где величина

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (4.62)$$

называется приведенной массой системы. Задавая вид $U(r)$, можно решить уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0 \quad (4.63)$$

и определить закон движения $\vec{r}(t)$.

Силовое поле, для которого частица в каждой его точке имеет потенциальную энергию, зависящую только от расстояния до силового центра ($U = U(r)$), называется центральным. На частицу, помещенную в некоторую точку этого поля, согласно изложенному в п. 4.2, действует сила, равная:

$$\vec{F} = \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial \vec{r}} = -\frac{dU}{dr} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (4.64)$$

К таким полям относятся, например, гравитационное и электростатическое поля. В первом из них силовым центром является материальная точка с массой M , а во втором – точечный электрический заряд Q . В обоих этих полях выполняется «принцип суперпозиции»: каждый силовой центр создает свое поле независимо от наличия других центров, и сила, действующая в некоторой точке такого «многоцентрового» поля, определяется как геометрическая сумма сил, действующих со стороны отдельных силовых центров.

В силу закона сохранения момента импульса системы относительно центра поля, имеем:

$$M = [\vec{r}\vec{p}] = \text{const.} \quad (4.65)$$

Отсюда следует, что траектория движения в центральном поле является плоской и может быть описана полярными координатами (r, φ) . Тогда функция Лагранжа системы принимает вид:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r). \quad (4.66)$$

Обобщенный импульс P_φ равен $P_\varphi = \frac{dl}{d\varphi} = mr^2\dot{\varphi}$, а момент импульса:

$$M = mr^2\dot{\varphi} = \text{const.} \quad (4.67)$$

Наконец, энергия движения в центральном поле равна:

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r). \quad (4.68)$$

Выражая отсюда $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ и производя интегрирование, можно получить:

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2r^2}}} + \text{const.} \quad (4.69)$$

Затем, выражая из (4.67) $d\varphi$ как $d\varphi = \frac{M}{mr^2} dt$ имеем для φ :

$$\varphi = \int \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}} + \text{const.}, \quad (4.70)$$

причем постоянные в (4.69) и (4.70) определяются из начальных условий.

Формулы (4.69) и (4.70) дают общее решение «задачи двух тел» для случая центрально симметричного поля $U = U(r)$. Первая из них определяет закон движения $r = r(t)$, а вторая – форму траектории $r = r(\varphi)$. Границы движения (по величине расстояния от силового центра) определяются из условия (см. формулу для E (4.68)):

$$U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} = E \quad (4.71)$$

(величину $\frac{M^2}{2mr^2}$ иногда называют «центробежной энергией»). Если это, уравнение имеет два решения r_{\min} и r_{\max} – то движение происходит по некоторой замкнутой или незамкнутой кривой внутри кольца, ограниченного этими значениями r . В центральном поле с $U(r) \sim \frac{1}{r}$ (что характерно для гравитационного или электростатического полей) траектория финитного движения частиц всегда является замкнутой. Ниже случай гравитационного

поля, для которого справедливы «законы Кеплера», будет рассмотрен более подробно.

Метод функции Лагранжа широко используется в теории колебаний (более подробно см. в гл. 7), при исследовании рассеяния частиц в силовых полях, в теории упруго деформируемых сред и т. д. Детальное изложение этих вопросов можно найти в специальной литературе.

Многочисленные задачи в области прикладной и теоретической механики были решены также с использованием канонических уравнений (4.40). Их достоинство заключается в том, что они образуют систему из $2S$ уравнений первого порядка (S – число степеней свободы), вместо системы уравнений 2-го порядка, получаемых методом Лагранжа. Это может привести к существенному упрощению решения поставленной задачи. Для применения метода необходимо составить функцию Гамильтона в виде $H(p_i, q_i, t)$. Если одна из координат q_0 является «циклической», т. е. не входит явно в выражение для H , то $\frac{\partial H}{\partial q_0} = 0$ и одно из канонических уравнений дает $P_0 = \text{const}$. Например, в рассматривавшейся выше задаче двух тел с центросимметричным полем гамильтониан системы представляется в виде:

$$H = \frac{1}{2m} \left(P_r^2 + \frac{P_\varphi^2}{r^2} \right) + U(r). \quad (4.72)$$

Так как здесь координата φ в явном виде не входит, то:

$$\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \quad (4.73)$$

и тогда уравнение

$$P \frac{1}{\varphi} = - \frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \quad (4.74)$$

сразу дается

$$P_\varphi = \text{const} = M, \quad (4.75)$$

что выражает закон сохранения момента «импульса в данной» системе.

Может оказаться, что все координаты будут циклическими, тогда все $P_i = \text{const}$ (функция Гамильтона при этом не зависит явно от времени – силовое поле стационарно). Тогда вся группа канонических уравнений $\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_i}$ представлена в виде:

$$\frac{dq_i}{dt} = \text{const} = C_i. \quad (4.76)$$

Решение этой системы имеет вид:

$$q_i = C_i' t + C_i' \quad (4.77)$$

(C_i – постоянные, определяемые из начальных условий), т. е. в этом случае все координаты изменяются линейно со временем. С помощью перехода к новым обобщенным переменным («канонического преобразования») можно в принципе преобразовать заданный гамильтониан к указанному виду ($H = H(p, t)$), т. е. определить «циклические» координаты для заданной системы и получить решение вида (4.77). Канонические уравнения ввиду указанных возможностей широко используются не только в механике, но и

др. областях физики – в статической физике, электродинамике, квантовой физике и т. д.

Определенными преимуществами обладает также использование уравнения Гамильтона-Якоби (4.46) для описания движения механических систем. В частном случае движения одной материальной точки в силовом поле оно имеет вид:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] - U(x, y, z, t). \quad (4.78)$$

Решение уравнения типа (4.78) ищется в виде $S=S(t, q_i, \alpha_i)$, где α_i – постоянные интегрирования (их число равно числу независимых переменных S в данной задаче). Далее составляются S уравнения вида:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i \quad (i = 1, 2, 3, 4 \dots \dots S), \quad (4.79)$$

где β_i – новые постоянные. Из полученной системы S алгебраических уравнений определяются функции:

$$q_i = q_i(t, \alpha_i, \beta_i), \quad (4.80)$$

которые и описывают закон движения. Значения импульсов определяются из уравнений (4.43).

Для нахождения постоянных (α_i, β_i) в уравнения (4.79) и (4.80) подставляются соответствующие начальные условия для q_i и P_i .

В некоторых случаях уравнение Гамильтона-Якоби упрощается: например, если H не зависит от времени явно, что имеет место, в частности, для рассматриваемых консервативных систем, то решение для S ищется в виде:

$$S = S_0(q_i) - \alpha t, \quad (4.81)$$

где функция координат $S_0(q_i)$ называется «укороченным действием» или «характеристической функцией», а α – постоянная, равная полной энергии системы:

$$\alpha = H(q_i, \frac{\partial S_0}{\partial q_i}). \quad (4.82)$$

Закон движения системы определяется равенствами:

$$\text{а) } \frac{\partial S_0}{\partial \alpha_i} = \beta_i \quad \text{б) } \frac{\partial S_0}{\partial h} = t + \beta_s \quad (i = 1, 2, 3, 4, \dots \dots S - 1), \quad (4.83)$$

причем уравнение (а) определяет форму пространственной траектории движения, а (б) – закон движения по этой траектории. Особенно важные приложения уравнения Гамильтона-Якоби относятся к оптике и квантовой механике и будут рассмотрены в т. III курса.

4.4 Диссипативные системы

Как указывалось выше, в механике под диссипативными системами подразумевают системы тел, в которых происходит процесс превращения механической энергии в тепловую. Однако в физике понятие диссипативной системы, вообще говоря, значительно шире. Действительно, тепловая энергия, как известно, представляет собой энергию хаотического («теплого») движения атомов и молекул вещества. Эта особенность обуславливает коренное отличие тепловой энергии от энергии всех других видов движения, которые характеризуются определенной «упорядоченностью». Так, механическое движение осуществляется с определенной скоростью в определенном направлении, в то время как, например, молекулы газа имеют всевозможные скорости и направления движения. Подобная упорядоченность свойственна многим другим движениям материи. Например, электрические колебания в идеальном контуре представляют собой закономерный периодический процесс превращения энергии электрического поля (в конденсаторе – «емкости») в энергию магнитного поля (в катушке – «индуктивности») и наоборот, и характеризуется своим законом сохранения полной электромагнитной энергии в контуре. Если же в контуре имеется омическое («активное») сопротивление, то на нем выделяется тепло по закону Джоуля-Ленца, т. е. происходит постепенное превращение электромагнитной энергии в тепловую. Следовательно, такая система также может считаться диссипативной в том смысле, что энергия упорядоченного (электромагнитного) процесса превращается в энергию неупорядоченного теплового движения. Таким образом, под диссипативными системами в широком смысле в физике подразумевают системы, в которых происходят процессы превращения энергии упорядоченных процессов любого вида в энергию неупорядоченного теплового движения.

Для количественного описания динамики диссипативных систем можно использовать изложенные выше законы динамики, включая в них силы сопротивления движению (диссипативные силы, в частности, силы трения). Однако эти силы зачастую сложным образом зависят от динамических характеристик, например, от скорости относительного движения тел (см., например, ниже, п. 4.4). Это обстоятельство существенно усложняет решение уравнений динамики и обуславливает необходимость применения приближенных и численных методов. Как будет показано ниже, сила сопротивления движению тела, например, сила вязкого трения, иногда может в первом приближении считаться пропорциональной скорости движения. Такое допущение можно ввести, в частности, при исследовании затухания малых колебаний механических систем при наличии упругих и квазиупругих сил (см. п. 7.1). В этом случае описание движения диссипативной системы существенно упрощается путем введения диссипативной функции. Заметим, что этот метод используется не только для

описания механических систем, а применим в принципе и к немеханическим (например, электрическим, см. ниже), диссипативным системам. Диссипативная функция характеризует, вообще говоря, быстроту перехода энергии любого вида (в частности механической) в тепловую. Для механических систем она строится при условии, что скорости движения тел в системе малы, так что силы сопротивления движению тел приближенно пропорциональны их скоростям. Диссипативная функция является квадратичной формой обобщенных скоростей \dot{q}_i (q_i – обобщенные координаты при S степенях свободы системы $i=1,2,\dots,S$):

$$F = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^S \sum_{k=1}^S \alpha_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k. \quad (4.84)$$

Коэффициенты зависят, вообще говоря, от координат q_i и имеют такую размерность, что вся функция F имеет размерность мощности. Величина $F > 0$ и численно равна:

$$F = \frac{1}{2} \left| \frac{dE}{dt} \right|, \quad (4.85)$$

где $\left| \frac{dE}{dt} \right|$ – скорость диссипации полной механической энергии системы.

Если функция F задана, то для систем можно построить уравнение движения в форме Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^{(R)}, \quad (4.86)$$

где $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ – функция Лагранжа системы, $Q_i^{(R)}$ – сила сопротивления движению, соответствующая координате q_i :

$$Q_i^{(R)} = - \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}. \quad (4.87)$$

При отсутствии диссипации энергии $Q_i^{(R)} = 0$. Диссипативную функцию можно формально построить и для немеханических систем, если уравнения, описывающие их состояние, имеют вид (4.86). Например, для колебаний силы тока I_i в i -м контуре уравнения записываются в форме (4.86), причем под q_i подразумеваются заряды e_i на обкладках конденсаторов, под \dot{q}_i – токи $\frac{de_i}{dt} = I_i$. Тогда диссипативная функция равна:

$$F = \frac{1}{2} \sum_i R_i I_i^2 \quad (4.88)$$

(R_i – активное сопротивление i -го контура) и определяет выделение тепла по закону Джоуля-Ленца. Диссипативная функция характеризует также рассеяние механической энергии движущейся сплошной среды – вследствие наличия сил вязкого трения в среде (сил вязкости). Для единицы объема изотропной упруго деформируемой среды:

$$\Phi = \mu \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ik}^2 + \frac{1}{2} \left(\lambda - \frac{2}{3} \mu \right) \theta^2, \quad (4.89)$$

где ε_{ik} – компоненты тензора скоростей деформаций, причем случай $i=k$ соответствует деформации растяжения-сжатия, а $i \neq k$ – деформации сдвига, λ – коэффициент вязкости, $\theta = (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})$ – скорость объемного

расширения, μ – коэффициент вязкости. Для несжимаемой вязкой жидкости $\theta=0$, и т. к. $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}$, то для диссипативной функции имеем:

$$\Phi = \mu[\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2 + 2(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2)]. \quad (4.90)$$

Значение диссипативной функции и в этом случае позволяет построить уравнения движения среды с учетом диссипаций энергии. Для этого компоненты тензора напряжений в упругой среде заменяются на

$$\sigma'_{ik} = \sigma_{ik} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ik}}. \quad (4.91)$$

После этого решение уравнений движения определяет влияние сил трения на течение сплошной среды (жидкости, газа или деформируемого твердого тела).

Как уже указывалось выше, наиболее широко распространенным видом диссипативных систем являются системы, в которых действуют силы трения. Силы трения возникают как между отдельными соприкасающимися телами, так и между частями одного и того же тела, например, между слоями движущейся жидкости или газа. В первом случае трение называется внешним, во втором – внутренним. Силы внутреннего трения часто называют также силами вязкости. Внешнее трение между твердыми поверхностями при отсутствии прослойки газа или жидкости между ними (смазки) называется сухим. При наличии такой прослойки трение называется вязким и по своей природе является не внешним, а внутренним. Действительно, опыт показывает, что прилегающий к поверхности слой жидкости удерживается возле нее силами молекулярного сцепления («прилипает» к поверхности) и движется вместе с твердым телом, практически испытывая трение об окружающие слои жидкости.

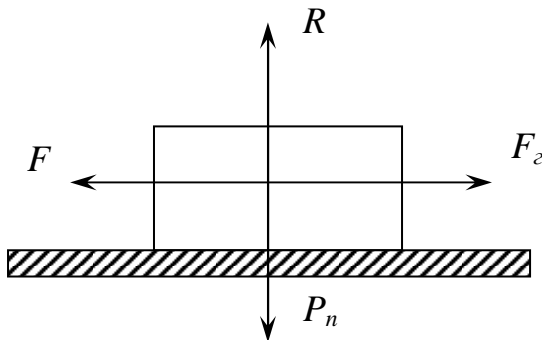


Рис. 4.2

Характерной особенностью сухого трения является наличие трения покоя (трения сцепления). Рассмотрим случай контактирования твердого бруска с весом P_n с твердой, сухой поверхностью (рис. 4.2). В результате действия веса бруса возникает «нормальное давление» с силой P_n на твердую поверхность, деформация которой приводит к возникновению силы реакции R , уравнивающей силу P_n . Если теперь приложить постепенно возрастающую силу F к бруску, как показано на рис. 4.2, то

оказывается, что при малых величинах F брусок остается в состоянии покоя. Это означает, что сила F компенсируется равной и противоположно направленной «силой трения покоя» F_T , которая возрастает пропорционально увеличению внешней силы F . При этом сила F_T не производит работу, и, следовательно, в этом случае не происходит превращения механической энергии в тепловую, т. е. в данном случае сила трения покоя не является

диссипативной. Если же между рассматриваемыми поверхностями появится жидкая прослойка, то малой силы F оказывается достаточно для приведения бруска в движение. В этом, по существу, и заключается основное назначение любой смазки – сила трения покоя обращается в нуль, что предотвращает

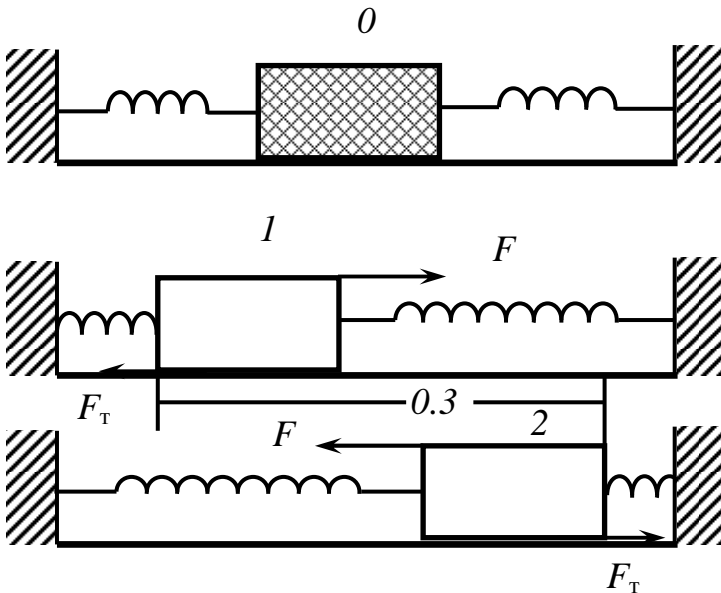


Рис. 4.3

явления заклинивания или «застоя» движущихся деталей машин. При отсутствии смазки явление застоя оказывает вредное влияние во многих приборах и устройствах.

Это можно проиллюстрировать рис. 4.3. Брусок находится в равновесии под действием упругих сил в положении 0. Если сместить его в положения 1 или 2, то равновесие упругих сил нарушится (например, в положении 3 на брусок будет действовать сила F вправо). Но

если эта сила не превышает силы трения покоя, то тело остается в равновесии и в положениях 1 или 2. Таким образом, возникает «область застоя» (0.3), которая делает равновесие тела на плоскости неопределенным. Это явление наблюдается в механизмах и приборах. Оно, в частности, ограничивает точность стрелочных измерительных приборов. Здесь сухое трение имеет место в подшипниках оси, на которую насажена стрелка прибора, а двумя силами, показанными на рис. 4.3, являются действующая сила, пропорциональная измеряемой величине (например, силе тока в амперметрах), и упругая сила возвращающей пружины. При большой силе трения покоя равновесное положение стрелки оказывается неопределенным, и точность показаний прибора снижается.

При увеличении внешней силы сила трения покоя может, возрастать лишь до определенной величины – максимальной силы трения покоя $F_{\text{тр max}}$. Опыт показывает, что $F_{\text{тр max}}$ пропорциональна силе нормального давления, сжимающей трущиеся поверхности (в случае рис. 4.2 – это сила веса бруса):

$$F_{\text{тр max}} = \mu P_n. \quad (4.90)$$

Это выражение называется законом Амонтона (1699 г.). Величина μ называется коэффициентом трения и зависит, прежде всего, от состояния трущихся поверхностей. Так, при трении стальных поверхностей величина может быть менее 0,1, а при трении металла о деревянную поверхность μ превышает 0,6. Величина

$$\alpha_0 = \arctg \mu \quad (4.93)$$

называется «углом трения». Он характеризует угол наклонной плоскости, при которой тело начинает соскальзывать с нее под действием скатывающей силы F_c – рис. 4.4. Условие начала движения в этом случае, имеет вид:

$$F_c = F_{Tmax} = \mu P_n \quad (4.94)$$

или

$$P \sin \alpha_0 = \mu P \cos \alpha_0,$$

откуда следует формула (4.93).

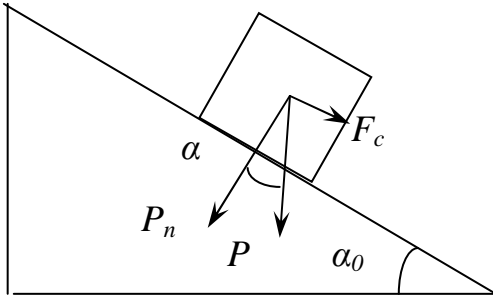


Рис. 4.4

Физическая природа сил сухого трения оказывается довольно сложной. Поэтому удовлетворительной количественной теории для этих сил пока нет. Упрощенная картина явлений, происходящих при сухом трении, представлена на рис. 4.5. Поверхность любого реального твердого тела является шероховатой, т. е. имеет неровности – выступы и углубления. Поэтому

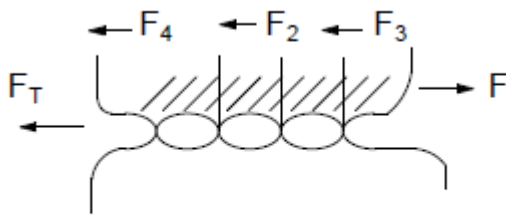


Рис. 4.5

контактирование тел осуществляется не по всей их геометрической поверхности, а в основном на выступах, которые деформируются упругим или неупругим образом под действием силы сжатия поверхностей.

Ясно, что с увеличением этой силы (нормального давления) вклад неупругой деформации возрастает, что приводит к возрастанию площади истинной поверхности контакта. В этих местах (1,2,3 на рис. 4.5) молекулы контактирующих тел сильно сближаются и взаимодействуют друг с другом. Возникает сила межмолекулярного притяжения, которая препятствует относительному перемещению поверхностей под действием сдвигающей силы. Суммарное действие сил f_1, f_2, f_3 , показанных на рис. 4.5, и создает силу трения покоя F_T .

При превышении максимальной силы трения покоя возникает относительное перемещение (скольжение) трущихся тел. При малых скоростях движения сила скольжения трения равна F_{Tmax} , которая опять-таки определяется формулой (4.92) (в этом случае она выражает закон Кулона для трения скольжения). С увеличением скорости сила трения вначале обычно несколько уменьшается, а затем, вновь возрастает, причем характер зависимости $F_T(V)$ существенно неодинаков для различных пар соприкасающихся материалов.

Трение скольжения в технике и повседневной жизни играет огромную роль, осуществляя передачу движения между телами, а также фиксируя их состояние покоя. Действие всех соединительных и крепежных деталей типа винтов, гвоздей, шурупов, шпилек, шплинтов и т. д.; основано на наличии

сил трения. Различные передачи – ременные, фрикционные и др. – передают вращение ведущих валов двигателей к исполнительным органам и устройствам различных машин. Более того, само существование жизни на Земле, как и перемещение людей по земле, т. е., исполнение их жизненных операций, возможно лишь благодаря наличию сил трения. Действительно, Земля совершает вращательное движение вокруг своей оси, а также поступательное движение по околосолнечной орбите. Все находящиеся на Земле предметы, люди, животные, а также атмосфера участвуют в этих движениях только благодаря наличию сил трения. При их отсутствии какое-либо «равновесное» состояние на Земле было бы невозможным. Так, например, при отсутствии сил вязкого трения в атмосфере на экваторе в результате суточного вращения Земли всегда дул бы ураган со скоростью ветра около 400 м/с, что далеко превосходит по скорости самые разрушительные ураганы, существующие в реальной атмосфере. Имеется множество и других примеров.

Наряду с указанной жизненно важной ролью сил трения на Земле они являются и вредными во многих случаях. Так, силы трения ограничивают скорость движения транспортных средств, поскольку при движении по горизонтальному пути вся сила тяги двигателя идет на преодоление сил трения. Наличие этих сил в различных машинах приводит к постепенному износу деталей и, в конечном счете, к выходу машины из строя. Основной мерой борьбы с износом в технике является применение смазки, которое будет подробнее рассмотрено ниже. Мерой борьбы с трением в транспортном деле является, прежде всего, замена трения скольжения трением качения, ставшая возможной впервые в результате изобретения колеса. Сила трения качения возникает при качении круглого тела (шара, цилиндра и т. п.) по плоскости без проскальзывания. Опыт показывает, что если покатить такое тело по горизонтальной плоскости, то оно рано или поздно неизбежно остановится, пройдя некоторый путь (т. е. по поверхности

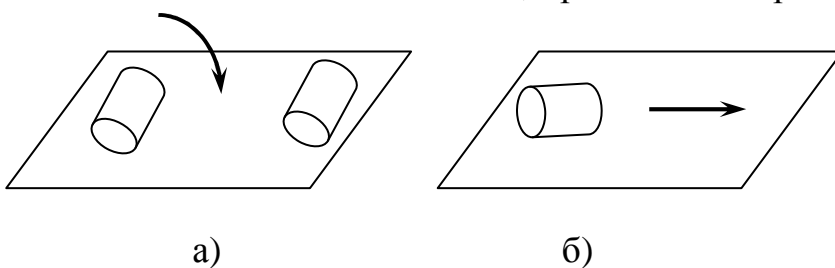


Рис. 4.6

контакта и в этом случае действует сила трения). Однако чрезвычайно существенно то, что сила трения качения значительно меньше силы трения скольжения. В этом нетрудно убедиться на

опыте типа показанного схематически на рис. 4.6: в случае а) цилиндр пройдет значительно больший путь до остановки, чем в случае б), при равенстве начальных скоростей цилиндра. Именно в малости силы трения качения, и заключается их значение на транспорте.

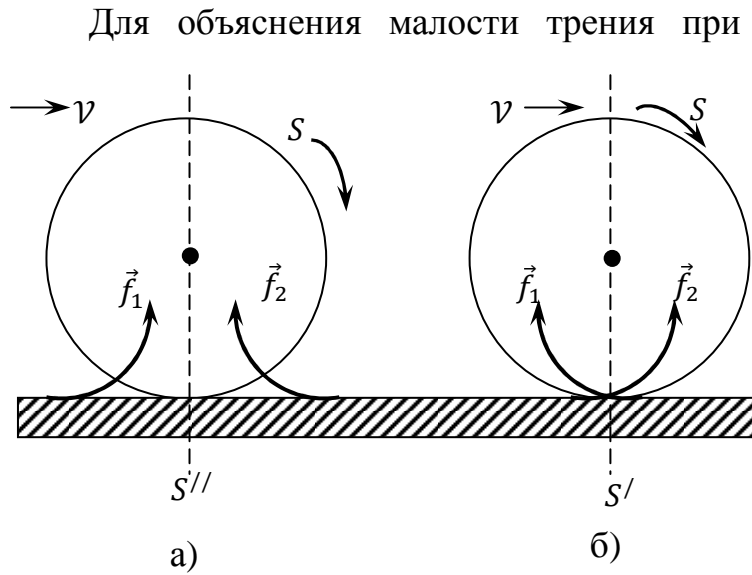


Рис. 4.7

Для объяснения малости трения при качении следует подробнее рассмотреть характер деформации контактирующих тел. Если деформации, возникающие под действием давления катящегося цилиндра на плоскость являются упругими, то силы реакции \vec{f}_1 и \vec{f}_2 будут симметричными относительно оси SS' – рис. 4.7(а). Равнодействующая всех этих сил создает вертикально направленную

реакцию опоры \vec{R} , которая уравнивает силу давления цилиндра на плоскость P_n . Составляющих сил в направлении движения не возникает и сила трения (при пренебрежении трением скольжения) оказывается равной нулю. Малость трения может быть объяснена наличием неупругих деформаций контактирующих тел. При этом сила \vec{f}_2 на участке контакта по ходу движения, где возникает деформация, будет больше, чем сила \vec{f}_1 на пройденном участке, где деформация уже произошла. Теперь равнодействующая всех сил реакции будет иметь горизонтальную составляющую, препятствующую движению тела. Эта составляющая и определяет силу трения качения в данном случае. Ясно, что эта сила обычно является малой, когда контактирующие тела являются достаточно твердыми (например, колесо вагона и рельс). В то же время при движении по «рыхлой» поверхности (например, по выпаханному полю) сила трения качения резко возрастает. Поскольку во многих случаях величина неупругой деформации мала по сравнению с упругой деформацией (это имеет место, например для металлов при нагрузках ниже предела текучести, см. выше, п. 3.4), то ясно, что сила трения качения в этих случаях может быть очень малой.

Удовлетворительная количественная теория явления трения качения в настоящее время еще не создана. Величину силы трения можно приближенно выразить следующим образом. Пусть равнодействующая всех реакций \vec{N} , о которой шла речь выше, приложена в точке на малое расстояние S по ходу цилиндра и образует с вертикальной осью SS' малый угол α (рис. 4.8) Разложим реакцию \vec{N} на две составляющие:

$$N \cos \alpha = P,$$

$$N \sin \alpha = F_{TK}. \quad (4.96)$$

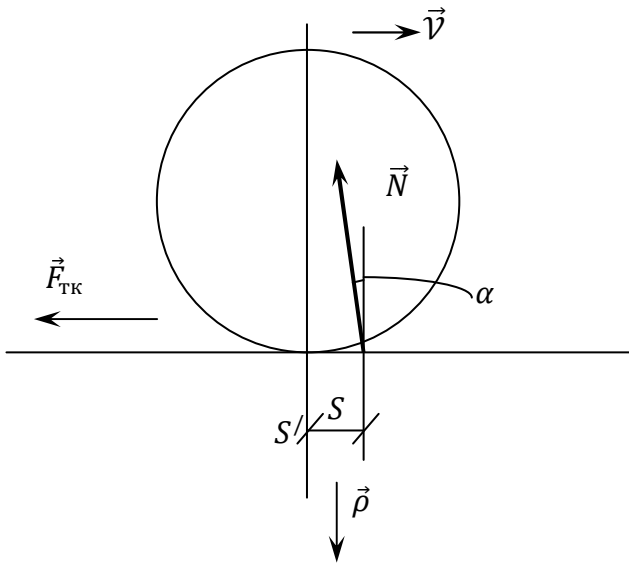


Рис. 4.8

зависит от радиуса катящегося тела, то более удобно использовать в расчетах величину δ , которую можно называть «плечом силы трения» катящегося тела, или величину $M_k = PS$ – момент силы трения качения. Величина δ , как показывают эксперименты, в известных пределах не зависит от радиуса R и скорости качения и определяется, главным образом, природой контактирующих тел (аналогично коэффициенту трения скольжения при малых скоростях движения).

Малость силы трения качения по сравнению с силой трения скольжения широко используется в технике. Помимо использования колеса в транспортном деле, о чем уже упоминалось выше, этот факт является основной действия шариковых или роликовых подшипников (вместо подшипников скольжения) для вращающихся валов в различных машинах. Чистое качение может быть осуществлено лишь в случае плоской поверхности соприкосновения (рис. 4.9 (а)). В случае, показанном на рис. 4.9 (б), неизбежно и наличие скольжения. Однако этот эффект тем меньше, чем меньше отношение радиуса шарика (ролика) к радиусу цилиндра R (при этом

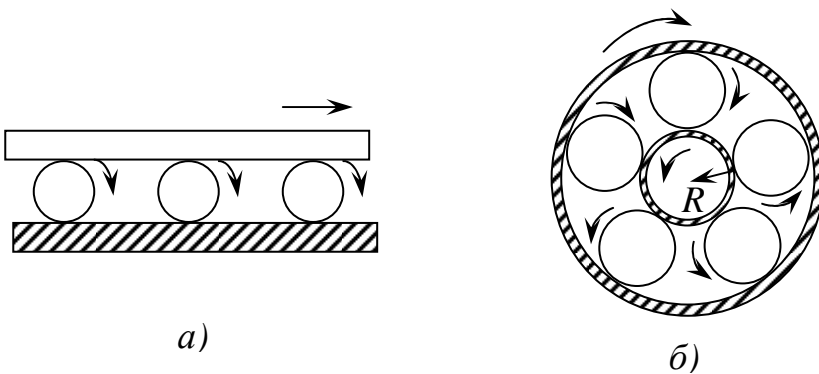


Рис. 4.9

Нормальная составляющая реакции твердой поверхности уравнивает силу нормального давления, в данном случае вес тела P , а горизонтальная составляющая создает силу трения качения F_{TK} . Из рис. 4.8 видно, что при малых углах α величина $\alpha \approx \frac{S}{R}$, так что:

$$P \approx N, F_{TK} = N\alpha = P \frac{S}{R} = \gamma_k P \quad (4.97)$$

Мы получаем вновь закон Кулона (4.35), а величина

$$\gamma_k = \frac{S}{R} \quad (4.98)$$

характеризует коэффициент трения качения γ_k . Поскольку эта величина

линейные скорости на окружностях внешнего и внутреннего колец сближаются). Поскольку слишком малый радиус шариков также невыгоден из-за возможности их заклинивания, то на практике приходится выбирать компромиссное значение радиуса шариков.

4.5 Столкновения твердых тел. Удар

Движущиеся тела при их сближении на определенных расстояниях начинают заметно взаимодействовать друг с другом. В результате этого состояние движения изменяется. Это явление, в общем, называется столкновением тел и весьма широко распространено в природе и технике. Столкновения испытывают макроскопические тела на Земле, молекулы газа или жидкости, заряженные и нейтральные частицы в плазме, космические частицы в земной атмосфере, метеориты с поверхностью планет и Луны и т.п.

Взаимодействие между электрически заряженными частицами носит дальнodelствующий характер. Сила взаимодействия, согласно закону Кулона (см. т. II курса), обратно пропорциональна квадрату расстояния между частицами. Поэтому при их сближении, взаимодействие приводит к постепенному искривлению их траектории движения. Заметное их взаимодействие перестает «осуществляться» лишь на значительных удалениях.

Подобная ситуация имеет место при сближении нейтральных тел, обладающих большими массами. Сила, взаимодействия и в этом случае является также дальнodelствующей, обратно пропорциональной квадрату расстояния между телами. Поэтому, например, сближение небесных тел приводит к определенным изменениям формы их траектории на весьма значительных (по сравнению с размерами тел) расстояниях.

В общей механике обычно рассматриваются столкновения электрически нейтральных тел с небольшими массами, так что оба указанных вида взаимодействия на больших расстояниях здесь не проявляются. Изменение состояния движения тел происходит лишь при их непосредственном физическом контакте, когда между ними возникают различные контактные явления (трение, пластические и упругие деформации на поверхности сталкивающихся тел и др.). Такое «близкodelствие» между телами, происходящее за весьма короткие промежутки времени, и вызывающее изменения движения тел и состояние их поверхностей называется ударом.

Проявления этого явления в природе и технике (в том числе и в военной) весьма многообразны и его изучению посвящены фундаментальные исследования. Здесь же будут кратко рассмотрены лишь некоторые закономерности этого явления. Но, прежде чем приступить к этому, целесообразно внести некоторые уточнения в самих понятиях «столкновение» и «физическое соприкосновение» (или «физический контакт») двух тел. Именно эти понятия определяют момент начала пространственно-временных изменений системы сталкивающихся тел, являясь как бы «точкой отсчета» этих изменений. Понятие «физического контакта» между поверхностями двух макроскопических тел можно трактовать по-разному, в зависимости от природы этих тел и среды, в

которой происходит этот контакт, так как соприкасающиеся поверхности могут обладать разными свойствами, в том числе на атомно-молекулярном уровне. Поверхности могут быть «чистыми» или покрыты окислами и другими химическими соединениями, содержать абсорбированные из среды молекулы, аэрозольные частицы и т. д. Поэтому формирование физического контакта между сближающимися поверхностями тел может происходить по различным механизмам, индивидуальный учет которых в практических расчетах затруднителен. Поэтому за наиболее общее определение «физического контакта» сближающихся поверхностей тел можно принять их сближение на такое расстояние, когда между ними становится возможным взаимообмен элементарными частицами, например, электронами в случае тел, обладающих электронной проводимостью, или молекулами за счет диффузии и т.п. Очевидно, что такие процессы могут происходить на расстояниях, соизмеримых с межатомными и межмолекулярными расстояниями, что в большинстве случаев составляет порядка нескольких ангстрем ($A^0 = 10^{-8}\text{см}$). Разумеется, что при столкновениях тел контакты между ними могут возникать одновременно (или последовательно за время длительности столкновения) в нескольких «точках». Однако для упрощения рассмотрения в дальнейшем будем иметь в виду только случаи «одноточечных» столкновений.

При анализе процессов сталкивания следует их различать:

а) по интенсивности – слабые, средние, сильные столкновения;
 б) по направлению столкновений – прямые, косые, центральные, не центральные (см. рис. 4.10);

с) по характеру деформаций тел при столкновениях – абсолютно упругие, абсолютно неупругие, упругопластические (с различными значениями коэффициента восстановления);

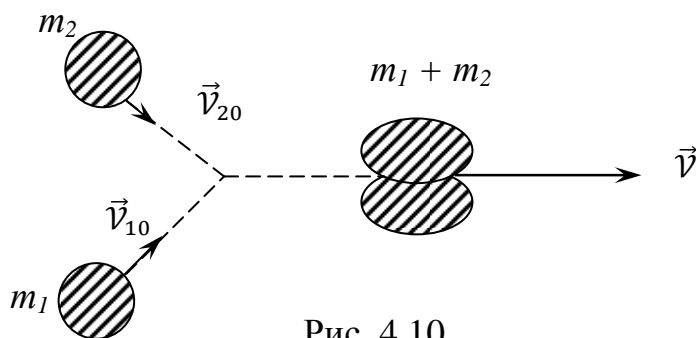


Рис. 4.10

д) по состоянию поверхностей тел в местах столкновений – абсолютно гладкие поверхности (отсутствие сил трения); шероховатые поверхности (возникновение сил трения);

е) по симметрии сталкивающихся тел – шаровые (и близкие к ним поверхности, например, эллипсоиды с малыми отношениями полуосей и др.), тела произвольной формы.

ф) по наличию сталкивающихся тел (кроме поступательных) вращательных движений – их значения и направления.

Как было указано выше одним из видов столкновений тел является удар. Это явление широко распространено в природе и технике, обладает рядом особенностей, которые проявляются тем сильнее, чем больше

относительные скорости сталкивающихся тел. Явление удара происходит кратковременно и сопровождается значительными изменениями в системе сталкивающихся тел и в скорости движения, и их состояний, вплоть до разрушения целостности одного из тел или обоих тел (в зависимости от их масс, физических свойств вещества и параметров удара). Скорости сталкивающихся тел, при которых наблюдаются большие локальные изменения на поверхности тел, колеблются в широких пределах (в зависимости от свойств материала тел, а так же формы тел и направлении удара по отношению центров масс). Локальное среднее давление в местах соударений тел может достигать (10^8-10^{10}) Па, а сила взаимодействия тел – около (10^4-10^5) Н. Длительность ударного процесса колеблется также в широких пределах в зависимости от скоростей и масс соударяющихся тел (10^3-10^6) сек. Так, например, при прямом центральном упругом соударении двух стальных шариков диаметром 10 см, относительная скорость которых составляет 5 м/сек, длительность процесса соударения $t=5 \cdot 10^{-4}$ сек. При этом средняя сила взаимодействия составляет $F \approx 4 \cdot 10^5$ Н. Отсюда ударный импульс силы составляет $P \approx 2 \cdot 10^2$ Н·сек. (Заметим, что в практических приложениях различных видов буферных устройств иногда возникает необходимость уменьшения ударного импульса в целях предотвращения возможных его разрушительных действий. В этих случаях стремятся растянуть процесс соударения, т. е. увеличить длительность удара, если изменение силы удара невозможно или затруднительно).

При анализе процесса удара следует отдельно рассмотреть две его фазы. Первая фаза начинается с момента физического контакта соударяющихся тел (о чем было указано выше) и заканчивается моментом максимального их сближения. При этом относительная скорость сближения обращается в нуль, а деформация в месте контакта достигает наибольшего значения. В этой фазе, если удар был абсолютно упругим, кинетическая энергия относительного движения тел переходит в потенциальную энергию их упругой деформации. Если же удар был упругопластическим, то часть энергии затрачивается на пластическую деформацию, диссипатирует в виде тепла и звука.

Во второй фазе процесса соударения энергообмен в системе протекает как бы в обратном порядке: при упругом соударении тел потенциальная энергия их деформации переходит в кинетическую энергию системы. Если же удар был упругопластическим, то, естественно, только часть первоначальной кинетической энергии системы «возвращается» обратно к ней. Ее значение определяется коэффициентом восстановления (о котором было указано выше при общем рассмотрении процессов столкновений). При абсолютно неупругом соударении тел весь процесс завершается после первой фазы. Таким образом, при абсолютно упругом соударении тел, после второй фазы кинетическая энергия системы полностью возвращается к ней, а изменения скоростей происходит в соответствии с выражением $|(V_1 - V_2)| =$

$= |(\mathcal{V}'_1 - \mathcal{V}'_2)|$, где $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ – скорости тел до удара, а $\mathcal{V}'_1, \mathcal{V}'_2$ – скорости тел после удара. При упругопластическом соударении $|(\mathcal{V}'_1 - \mathcal{V}'_2)| < |(\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2)|$, т. е. происходит частичная потеря скоростей движения тел, что характеризуется так называемым коэффициентом восстановления:

$$K = \frac{|(\mathcal{V}'_1 - \mathcal{V}'_2)|}{|(\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2)|}. \quad (4.99)$$

Коэффициент K принимает различные значения от 0 до 1 в зависимости от свойств материала соударяющихся тел ($K = 1$ при абсолютно упругом соударении и $K = 0$ при абсолютно неупругом соударении).

При абсолютно неупругом соударении тел скорости движения после соударения могут быть определены согласно теоремы Карно, математическая формулировка которой имеет вид:

$$\begin{aligned} T_0 - T_1 &= \frac{1}{2} \sum m_i (\mathcal{V}_i - \mathcal{V}'_i)^2, \\ T_0 &= \frac{1}{2} \sum m_i \mathcal{V}_i^2, \quad T_1 = \frac{1}{2} \sum m_i (\mathcal{V}'_i)^2, \end{aligned} \quad (4.100)$$

где T_0 и T_1 – соответственно кинетическая энергия системы до и после удара, m_i – масса точек системы (которые практически могут быть определены как небольшие части тел), \mathcal{V}_i и \mathcal{V}'_i – скорости точек до и после удара.

По теореме Карно кинетическая энергия системы, потерянная при абсолютно неупругом соударении тел, равна кинетической энергии системы, если бы все ее точки двигались бы с потерянными скоростями.

Определим максимальное сближение соударяющихся тел, после которого начинается вторая фаза при упругом соударении. Для этого используем полуэмпирические зависимости теории Герца. Суммарная сила взаимодействия F двух тел массами m_1 и m_2 при прямом центральном ударе согласно этой теории связана с расстоянием сближения α и описывается зависимостью вида:

$$F = A\alpha^{3/2}, \quad (4.100)$$

где A – некоторая величина, зависящая индивидуально от упругих свойств материалов соударяющихся тел и геометрических характеристик поверхности в месте их физического контакта.

Согласно 2-му закону Ньютона для приведенной массы μ и расстояния α существует связь:

$$F = -\mu \frac{d^2\alpha}{dt^2}, \text{ где } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (4.101)$$

Соединив эти две зависимости, будем иметь:

$$A\alpha^{3/2} = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2\alpha}{dt^2}. \quad (4.102)$$

После интегрирования (4.102) можно получить значение α в виде:

$$\alpha = \left(\frac{5}{k}\right)^{2/5} \left(\frac{\mathcal{V}}{2}\right)^{6/5}, \quad (4.103)$$

где $k=A/\mu$, \mathcal{V} – относительная скорость сближения тел.

Зная скорость \mathcal{V} и расстояние, пройденное при сближении, можно найти длительность времени контакта тел в виде:

$$\tau = 2,94 \left(\frac{5}{k}\right)^{2/5} \cdot \mathcal{V}^{-1/5}. \quad (4.104)$$

Максимальное значение силы взаимодействия тел при их контактировании (сила сжатия) определяется выражением:

$$F_{max} = A \left(\frac{5}{k}\right)^{2/5} \left(\frac{\mathcal{V}}{2}\right)^{6/5}. \quad (4.105)$$

Наибольшая неопределенность в приведенных соотношениях обусловлена коэффициентом A . Его значение устанавливается обычно экспериментальным путем, варьируя свойствами материала соударяющихся тел и формой тел. Поскольку полученные при идеальных условиях значения A переносятся к реальным ситуациям, то очевидна необходимость критического анализа этих ситуаций в направлении их идентификаций.

Такова общая качественная картина процесса удара.

Строгий теоретический анализ явлений при ударном взаимодействии тел, одновременно учитывающий всевозможные вариации условий протекания процессов, сопряжен с большими трудностями. Тем не менее, при определенных допущениях и упрощениях теоретический анализ основных явлений при ударном взаимодействии тел возможен и выполнен многими авторами при тех или иных упрощающих предпосылках. Приведем некоторые примеры такого подхода.

В общей теории удара (пренебрегая всеми силами «неударного» характера) для описания взаимодействия соударяющихся тел вместо силы F ударного взаимодействия вводится ударный импульс силы \bar{P} , определяемый в виде

$$\bar{P}\tau = \int_0^\tau F dt. \quad (4.106)$$

Используя проекции ударного импульса на оси координат (x, y, z), составляется система уравнений, описывающая изменения при ударе количества движения и кинетического момента системы в виде:

$$\begin{aligned} M(\mathcal{V}'_x - \mathcal{V}_x) &= P_x, \\ M(\mathcal{V}'_y - \mathcal{V}_y) &= P_y, \\ M(\mathcal{V}'_z - \mathcal{V}_z) &= P_z, \\ I_x(\omega'_x - \omega_x) - I_{xy}(\omega'_y - \omega_y) - I_{xz}(\omega'_z - \omega_z) &= m_x(P), \\ I_y(\omega'_y - \omega_y) - I_{xy}(\omega'_x - \omega_x) - I_{yz}(\omega'_z - \omega_z) &= m_y(P), \\ I_z(\omega'_z - \omega_z) - I_{xz}(\omega'_x - \omega_x) - I_{yz}(\omega'_y - \omega_y) &= m_z(P), \end{aligned} \quad (4.107)$$

где $\mathcal{V}, \omega, \mathcal{V}', \omega'$ – соответственно поступательная и угловая скорости центра масс в начале и конце процесса удара; M – масса тела; $I_x, I_y, I_z, I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}$ – осевые и центробежные моменты инерции; P_x, P_y, P_z – проекции ударного

импульса на соответствующие оси; $m_x(P), m_y(P), m_z(P)$ – моменты импульса относительно осей соответственно.

При составлении уравнений (4.107) приняты некоторые допущения. Так, считается, что отсутствуют влияния посторонних сил неударного происхождения, как силы трения, силы сопротивления движению (аэродинамические и гидродинамические), силы гравитации и т. п.

Уравнения допускают упрощения при соответствующем выборе системы координат по отношению к осям инерции тел. Так, если в качестве осей координат выбрать главные центральные оси инерции, то в уравнениях будут отсутствовать I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} , так как в этом случае они обращаются в нуль. Возможны и другие упрощения с учетом конкретных условий и особенностей системы взаимодействующих тел. В общем, уравнения (4.107) позволяют найти поступательные и вращательные скорости соударяющихся тел (и, следовательно, их кинетическую энергию) при их упругом соударении, если известны значения этих скоростей непосредственно к моменту начала соударений.

При упругопластическом соударении к уравнениям (4.107) необходимо присоединить уравнения типа (4.99), дополнив их аналогичными зависимостями в случае, если тела обладают и угловыми скоростями. Однако, использование этих уравнений требует точного знания коэффициента восстановления, что связано в ряде случаев с большими трудностями, поскольку этот коэффициент существенно зависит от свойств материала соударяющихся тел, а выразить эти свойства в строго аналитической форме в общем виде для всех материалов практически невозможно. Поэтому при проведении расчетов пользуются экспериментально найденными его значениями применительно к материалам соударяющихся тел.

На основе общих закономерностей явлений удара (элементы которых указаны выше) производятся инженерные расчеты различных конструкций машин и механизмов ударного действия.

При этом решаются две (как бы противоположные по целям) группы задач. Первая из них – это задачи, связанные с созданием эффективных способов и технических устройств для получения требуемых ударных импульсов с оптимальными параметрами. Вторая – задачи, связанные с устранением (или уменьшением) вредных последствий воздействия ударных импульсов в механизмах, машинах, сооружениях. Работая в первом направлении, инженерами созданы разнообразные механизмы ударного действия для выполнения работ, связанных с деформацией тел воздействия, таких как штамповка, ковка, чеканка, дробление и т. п. Характерным для этих механизмов является то, что масса тел, осуществляющих ударное действие, намного меньше массы тел воздействия (пример, молот и наковальня), а также для выполнения работ, связанных со строительством (забивание свай в грунт, разрушение горных пород, металлического лома,

глыб мартеновского шлака и др.). Но есть группа инструментов ударного воздействия, в которых масса воздействующего тела намного больше массы тела, на которое оказывается действие (например, баба-свая, молоток-гвоздь и т. п.)

По второй группе задач, связанных с уменьшением (или устранением) вредных последствий ударных воздействий в машинах и механизмах, имеется множество инженерных решений. Если, например, в системе соударяющихся тел имеются «постоянные» связи, т. е. движение тел не является свободным (что обычно имеет место во многих машинах и механизмах), то определив расчетные (например, по уравнениям (4.107)) импульсные реакции связей в разных вариантах конструкции, можно выбрать тот вариант, где эти реакции на ту или другую деталь будут минимальны (задача на экстремум). Например, в системах механизмов, в которых некоторая точка тела (детали) имеет неподвижную ось вращения, ударное воздействие на нее можно устранить, если направить удар в эту точку перпендикулярно к плоскости, проходящей через ось вращения и центр инерции. В этом случае ударный импульс не будет передаваться оси и подшипниковой системе в ее креплении. Далее, при необходимости уменьшения последствий вредных (иногда разрушительных) воздействий ударного импульса $P_{yg} = \bar{F}_{yg}\tau$ можно удлинить время действия τ , соответственно уменьшить действие ударной силы \bar{F}_{yg} . Для подобных целей разработаны и широко применяются различные виды амортизирующих устройств. По принципу действия они бывают: а) механические (фрикционные), которые «поглощают» часть энергии удара за счет возникновения сил трения в специальном узле механизма, б) пневматические, которые противодействуют ударной силе путем создания противодавления воздуха, в) гидравлические, которые в соответствии с законом гидродинамики «поглощают» ударную силу за счет вынужденного перемещения жидкости из одного объема в другой через соединяющую их трубку (канал) малого диаметра (для обеспечения большого сопротивления потоку жидкости).

Существуют специальные амортизирующие устройства типа демпферов, предназначенных, главным образом, для гашения механических колебаний, которые также могут возникнуть при ударных процессах (при упругих и упругопластических соударениях). По принципу действия они различаются на несколько видов: а) фрикционные, работающие за счет поглощения энергии удара специальными узлами с повышенными силами сухого или жидкостного трения; б) динамические, изменяющие параметры колебаний системы и предотвращающие явление резонанса; в) пневматические, функционирующие за счет сжатия воздуха в цилиндре с помощью подвижного поршня; г) электромагнитные, в которых силы торможения создаются за счет ЭДС индукции, наводимой в ферромагнитной пластине, движущейся между полюсами магнита.

Амортизаторы и демпферы находят широкое применение в разных отраслях техники, в частности, на транспорте (в железнодорожном – в качестве буферов между вагонами; в автомобильном – в системе подвески; в воздушном – в устройствах шасси и т. д.).

Выше были рассмотрены кратко, но, в общем, основные положения столкновений макроскопических тел, в том числе элементы теории удара. Такой подход, хотя оправдан методологически, но зачастую при этом теряется наглядность рассматриваемых явлений. Поэтому вернемся к рассмотрению процессов на конкретных случаях столкновений, когда известны и формы сталкивающихся тел, и материалы этих тел, и параметры столкновений.

При непосредственном контакте двух движущихся тел их кинетическая энергия вначале переходит в энергию их деформации, а затем полностью или частично в кинетическую энергию движения. Очевидно, что состояние движения тел в результате столкновения изменится в зависимости от характера этих энергетических превращений, которые, в свою очередь, в значительной мере определяются начальным состоянием движения тел и физическими свойствами материала тел. Если начальная кинетическая энергия мала, то она может практически полностью превратиться в энергию упругой деформации тел, которая является обратимой. Поэтому через некоторое малое время при абсолютно упругом столкновении первоначальная форма тел восстановится, и энергия деформации вновь перейдет в кинетическую энергию движения (без ее диссипации). Подобная ситуация (по характеру движения) может возникнуть не только при малых энергиях сталкивающихся тел, но и в том случае, если их энергия велика, а сами тела обладают большими модулями упругости.

Если энергия сталкивающихся тел велика, но упругие модули материала тел малы, а, следовательно, мала и энергия упругой деформации, то может возникнуть ситуация, при которой кинетическая энергия движения практически полностью переходит в энергию неупругой деформаций и, в конечном счете, превращается в тепло. При этом оба тела, или же одно из них, могут перейти в состояние покоя (такая ситуация возникает, например, при попадании пули в защитное ограждение, сложенное из мешков с песком). При этом система тел оказывается диссипативной, и к ней неприменим закон сохранения механической энергии, хотя, конечно, общий закон сохранения энергии остается в силе.

При реальных столкновениях, как правило, имеет место промежуточная ситуация: кинетическая энергия частично переходит в тепловую, а частично – в кинетическую энергию движения тел после столкновения, т. е. имеет место «частично упругое» или просто «неупругое» столкновение. «Степень неупругости» столкновения в принципе можно охарактеризовать долей кинетической энергии движения тел, перешедшей в тепловую энергию. Однако на практике неупругое столкновение обычно характеризуют «коэффициентом восстановления относительной скорости тел

после столкновений» (K). Действительно, в ряде опытов (начатых еще Ньютоном) было обнаружено, что при определенных, близких между собой механических свойствах материалов тел отношение относительных скоростей их движения до и после столкновения приблизительно постоянно. Экспериментальные значения коэффициента восстановления для некоторых материалов приведены ниже.

Вещество	дерево	слоновая кость	пробка	сталь	стекло
коэффициент « K »	$\frac{1}{2}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{15}{16}$

Характер соударения тел существенно зависит от их геометрической формы. Учет этого обстоятельства сильно усложняет количественное рассмотрение явления. Однако в большинстве практически важных случаев можно принять, что сталкивающиеся тела имеют сферическую форму. Это возможно в тех случаях, когда площадь контакта между телами при ударе мала, как это всегда имеет место при соударениях шаров. Кроме того, многие тела действительно имеют форму близкую к сферической (например, пули, бильiardные шары, атомы вещества и т. д.). Поэтому при анализе общих закономерностей удара обычно ограничиваются рассмотрением случая соударения двух шаров с различными массами m_1 и m_2 и скоростями \vec{v}_{1_0} и \vec{v}_{2_0} до и \vec{v}_1 и \vec{v}_2 после удара.

Рассмотрим вначале абсолютно неупругий удар шаров. Очевидно, что в этом случае, ввиду полной необратимости деформации, шары после удара движутся совместно с некоторой скоростью \vec{v} (рис. 4.11), т. к. для разделения

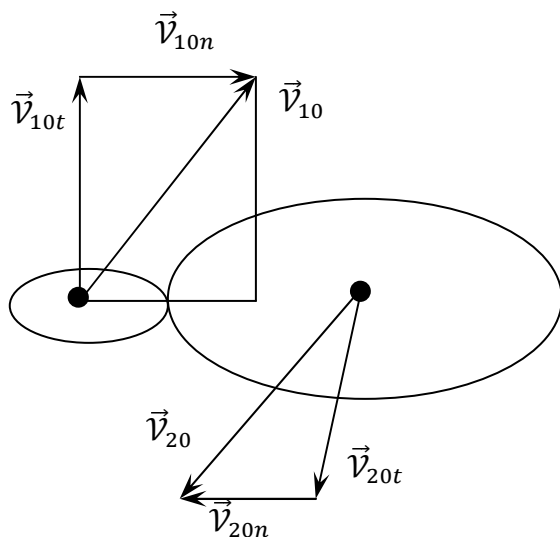


Рис. 4.11

шаров необходимо хотя бы небольшое «восстановление» их формы. Поскольку эти два тела можно рассматривать как замкнутую механическую систему, то общий импульс обоих шаров после соударения, согласно закону сохранения импульса, должен остаться неизменным, т. е.

$$\vec{P}_{1_0} + \vec{P}_{2_0} = \vec{P} \quad (4.108)$$

или

$$m_1 \vec{v}_{1_0} + m_2 \vec{v}_{2_0} = (m_1 + m_2) \vec{v} \quad (4.109)$$

Отсюда легко определяется конечная скорость «слипшихся» шаров:

$$\vec{v} = \frac{m_1 \vec{v}_{1_0} + m_2 \vec{v}_{2_0}}{(m_1 + m_2)} \quad (4.110)$$

Рассмотрим теперь изменение кинетической энергии шаров в результате абсолютно неупругого удара. До удара полная кинетическая энергия равна $\frac{1}{2}m_1v_{1_0}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2_0}^2$, а после удара – $\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2$. Потеря кинетической энергии, т.е. количество выделившегося тепла ΔQ , равна, с учетом (4.109):

$$\Delta Q = -\Delta T = \frac{1}{2}m_1v_{1_0}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2_0}^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(\vec{v}_{1_0} - \vec{v}_{2_0})^2 \quad (4.111)$$

или

$$\Delta Q = \frac{1}{2}\mu(\Delta\vec{v})^2, \quad (4.112)$$

где $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ – «приведенная масса» шаров, $\Delta\vec{v}$ – относительная скорость шаров до удара.

Практический интерес представляет случай, когда масса одного из тел значительно больше массы другого: $m_2 \gg m_1$. Тогда формула (4.100) дает:

$$\vec{v} \approx \left(\frac{m_1}{m_2}\vec{v}_{1_0} + \vec{v}_{2_0}\right)\left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right) \approx \frac{m_1}{m_2}\vec{v}_{1_0}^2 + \vec{v}_{2_0}^2, \quad (4.113)$$

а формула (4.103)

$$\Delta Q = \frac{1}{2}m_1(\vec{v}_{1_0} - \vec{v}_{2_0})^2. \quad (4.114)$$

Если тело с массой m_2 до удара было бы неподвижным $v_{2_0} = 0$, то

$$(a) \vec{v} \approx \frac{m_1}{m_2}\vec{v}_{1_0} \quad (b) \Delta Q = \frac{1}{2}m_1v_{1_0}^2 = T_{1_0}. \quad (4.115)$$

Такая ситуация может реализоваться во многих случаях. Например, при стрельбе неподвижное тело («мишень») получает практически всю первоначальную кинетическую энергию пули или снаряда, скорость которых при этом падает до нуля. Этим явлением пользуются, в частности, при определении скорости пули с помощью «баллистического маятника», который представляет собой подвешенный большой массой M ящик, заполненный землей или песком. Пуля массой $m \ll M$, попадая в маятник, останавливается, и ящик (вместе с пулей) отклоняется от вертикальной оси подвеса на некоторую высоту h . Для вычисления этой высоты следует применить формулу (4.115)

$$v = \frac{m}{M}v_0, \quad (4.116)$$

где v_0 – начальная скорость пули. Высота подъема маятника (точнее говоря, его центра тяжести) определяется выражением:

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left(\frac{m}{M}\right)^2 v_0^2. \quad (4.117)$$

Измеряя высоту h , можно определить скорость пули v_0 .

Рассмотрим теперь абсолютно упругий удар двух абсолютно гладких шаров, при котором оба они испытывают только обратимую упругую деформацию и диссипации механической энергии не происходит (ниже для

краткости слово «абсолютный» будет опускаться). Исследование проведем лишь для случая «центрального» удара, при котором шары до столкновения движутся по линии, соединяющей их центры (случай нецентральности удара будет очень кратко рассмотрен ниже).

После упругого удара шары продолжают двигаться отдельно с различными скоростями $\vec{v}_1 \neq \vec{v}_2$, поэтому теперь одного уравнения (4.100) недостаточно. Необходимо использовать как закон сохранения импульса, так и закон сохранения механической энергии. (Отметим, что такой «энергетический» подход позволяет избежать сложного анализа упругих деформаций и возникающих при этом сил). На основании этих законов можно написать два уравнения:

$$\begin{aligned} m_1 \vec{v}_{1_0} + m_2 \vec{v}_{2_0} &= m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2, \\ \frac{1}{2}(m_1 v_{1_0}^2 + m_2 v_{2_0}^2) &= \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2). \end{aligned} \quad (4.118)$$

Векторы скоростей \vec{v}_1 и \vec{v}_2 после удара остаются на линии, соединяющей центры шаров, поскольку в других направлениях никакие силы не действуют.

Представляя систему уравнений (4.118) в виде

$$\begin{aligned} m_1(\vec{v}_{1_0} - \vec{v}_1) &= m_2(\vec{v}_2 - \vec{v}_{2_0}), \\ m_1(v_{1_0}^2 - v_1^2) &= m_2(v_2^2 - v_{2_0}^2) \end{aligned} \quad (4.119)$$

и разделив второе уравнение на первое, находим:

$$\vec{v}_{1_0} + \vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}_{2_0}. \quad (4.120)$$

Умножая на m_1 и складывая с первым из уравнений (4.119), получим для скорости второго тела после удара соотношение:

$$\vec{v}_2 = \frac{2m_1 \vec{v}_{1_0} - (m_1 - m_2) \vec{v}_{2_0}}{m_1 + m_2}. \quad (4.121)$$

Выражая из (4.120) $\vec{v}_1 = \vec{v}_{2_0} - \vec{v}_{1_0} + \vec{v}_2$ и учитывая (4.121), находим скорость первого тела:

$$\vec{v}_1 = \frac{2m_2 \vec{v}_{2_0} - (m_2 - m_1) \vec{v}_{1_0}}{m_1 + m_2}. \quad (4.122)$$

(Заметим, что это выражение можно сразу получить из (4.121) путем замены индексов $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 1$, так как эти индексы приписаны телам произвольно).

Относительные скорости шаров и после удара связаны соотношением, вытекающим из (4.120):

$$\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = -(\vec{v}_{2_0} - \vec{v}_{1_0}). \quad (4.123)$$

Таким образом, после удара относительная скорость шаров остается неизменной по величине («коэффициент восстановления» = 1), но изменяет знак.

В практически важном случае равенства масс шаров $m_1 = m_2$ имеем:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_{1_0}, \quad \vec{v}_1 = \vec{v}_{2_0}, \quad (4.124)$$

т. е. равные по массе шары обмениваются скоростями при абсолютно упругом ударе.

В другом частном случае, когда масса одного из шаров, например, второго, стремится к бесконечности ($m_2 \rightarrow \infty$), имеем:

$$\vec{v}_2 \rightarrow 2\vec{v}_{2_0} - \vec{v}_{1_0}, \quad \vec{v}_2 \rightarrow 2\vec{v}_{2_0}. \quad (4.125)$$

Если же $\vec{v}_{2_0} = 0$, то $\vec{v}_2 = 0$ и $\vec{v}_1 \rightarrow \vec{v}_{1_0}$. Это соответствует столкновению шара с неподвижной стенкой, при котором происходит «зеркальное отражение» шара с изменением знака вектора скорости на противоположный.

Рассмотрим теперь случай нецентрального удара шаров, при котором векторы начальных скоростей не лежат на линии, соединяющей центры шаров рис. 4.11. При этом векторы \vec{v}_{1_0} и \vec{v}_{2_0} можно разложить на две составляющие – нормальную – (направленную вдоль центральной линии) и тангенциальную (перпендикулярную к указанной линии). В этом случае при ударе, помимо деформации шаров, будет также возникать относительное скольжение их поверхностей. Если шары не будут идеально гладкими, то при скольжении возникает сила трения, которая, как было рассмотрено выше является диссипативной. При этом, естественно, тангенциальные составляющие скоростей шаров после удара изменятся под действием этих сил, а часть кинетической энергии перейдет в тепло. Количественный расчет изменения движения шаров после удара теперь сильно усложняется, поскольку закон сохранения механической энергии становится в данном случае неприменимым. Эта задача существенно, упрощается, если шары считать абсолютно гладкими, т. е. пренебречь силами трения на их поверхностях. Тогда тангенциальные составляющие скоростей шаров в результате удара не изменятся:

$$\vec{v}_{1t} = \vec{v}_{1_0t}, \quad \vec{v}_{2t} = \vec{v}_{2_0t}. \quad (4.126)$$

Закон сохранения импульса записывается теперь для нормальных составляющих скоростей в виде:

$$m_1 \vec{v}_{1_0n} + m_2 \vec{v}_{2_0n} = m_1 \vec{v}_{1n} + m_2 \vec{v}_{2n}. \quad (4.127)$$

Наконец, закон сохранения энергии выражается как:

$$\frac{1}{2} m_1 (v_{1_0n}^2 + v_{1_0t}^2) + \frac{1}{2} m_2 (v_{2_0n}^2 + v_{2_0t}^2) = \frac{1}{2} m_1 (v_{1n}^2 + v_{1t}^2) + \frac{1}{2} m_2 (v_{2n}^2 + v_{2t}^2). \quad (4.128)$$

Система из двух уравнений (4.127) и (4.128) содержит два неизвестных – \vec{v}_{1n} и \vec{v}_{2n} и может быть однозначно решена. Но это решение имеет довольно громоздкий вид и рассматриваться здесь не будет.

Применения законов упругих и неупругих столкновений применительно к атомным и молекулярным процессам будут рассмотрены в следующем параграфе.

4.6 Столкновения молекул в газах

Описанные выше законы ударов используются не только в механике, но и в других областях микромира, включая и ядерную физику при общем рассмотрении столкновений заряженных частиц. Дело в том, что кратко указанная выше картина электрического и гравитационного взаимодействия имеет место при достаточно малых скоростях сталкивающихся частиц. По мере увеличения относительной скорости сближения тел их столкновение все более приобретает характер удара: время сближения становится малым, и состояние движения частиц просто не успевает измениться вплоть до момента непосредственного контакта между частицами (например, для атомов – это сближение их внешних электронных оболочек), а продолжительность этого контакта также мала. Такая ситуация часто имеет место в современных исследованиях ядерных реакций и взаимодействий между элементарными частицами, которые проводятся на мощных ускорителях, разгоняющих частицы до больших скоростей и весьма высоких энергий. В таких условиях в первом приближении применимы излагаемые ниже закономерности упругих и неупругих ударов, полученные для «механических» столкновений тел. Вместе с тем, сразу же необходимо учитывать многие особенности столкновения элементарных частиц.

Заметим, что под неупругим столкновением частиц атомных масштабов (в отличие от рассмотренных выше процессов столкновения твердых тел) подразумевается такое столкновение, при котором их кинетическая энергия частично или полностью превращается во внутреннюю энергию элементарных частиц, в результате чего изменяется их квантовое состояние. Например, при неупругом столкновении электрона с атомом кинетическая энергия электрона частично расходуется на возбуждение и ионизацию атома, т. е. изменение квантового состояния его внутренних электронов (аналогичные явления происходят при бомбардировке атомных ядер элементарными частицами). В этом случае диссипация механической энергии имеет несколько иной смысл, чем в механических системах. Это обусловлено тем, что понятие «тепловой энергии» не применимо к одиночным атомным частицам. Это понятие относится лишь к системам из большого числа частиц, и тепловая энергия таких систем как раз и образуется из кинетических энергий движения этих частиц. Поэтому и понятие «неупругого столкновения» в атомной физике имеет иной смысл, чем в механике (подробнее эти вопросы будут рассмотрены в т. III курса).

В процессе столкновений элементарных частиц (атомов, электронов, нейтронов, протонов, мезонов и др.) много общего с изложенными в п. 4.5 и в то же время много и своих особенностей, обусловленных природой частиц. Здесь же мы ограничимся (как это обозначено в названии параграфа) рассмотрением столкновений между нейтральными частицами – атомами и молекулами, составляющими в совокупности некоторую газовую среду с умеренными параметрами по давлению и температуре.

Прежде чем приступить к анализу процессов столкновений между молекулами и атомами в газах, следует предварительно охарактеризовать их свойства, которые могут оказать влияние на эти процессы. Выше, при рассмотрении процессов столкновения макроскопических тел, было установлено, что на эти процессы влияют в значительной мере не только параметры движения тел, но и их свойства – масса, объем, геометрия, а также упругость и пластичность материала тел. Аналогичное имеет место и при столкновении микрочастиц – молекул и атомов.

По своей геометрической форме молекулы могут быть симметричными относительно центра масс и несимметричными. К первой группе относятся одноатомные молекулы – инертные газы (аргон *Ar*, криптон *Kr*, ксенон *Xe*, радон *Rn*) и пары металлов (например, ртуть *Hg*, широко используемый в газовых смесях которыми наполняются газоразрядные источники света). Модель этих молекул, идеально симметричных по форме, можно представить в виде шара, в центре которого находится ядро (где сосредоточена практически вся масса), а наружная оболочка (отстоящая от ядра на относительно большом, по сравнению с размерами ядра, расстоянии – порядка ангстрем) представляет собой облако электронов. Другая группа почти симметричных молекул, которыми могут быть молекулы двухатомных газов, образованные двумя однотипными атомами, такими как H_2 , O_2 , N_2 , Cl_2 и др. Они имеют несколько отличную от сферы форму (близкую к эллипсоиду) с симметрией относительно общего центра масс (см. рис. 4.12). Группа несимметричных многоатомных молекул весьма многообразна и по форме и по числу атомов, образующих молекулу. Они, как правило, сильно отличаются по форме от одноатомных и двухатомных молекул. Например, молекулы CCl_4 имеют форму тетраэдра, молекулы SF_6 – форму октаэдра и т. п. Форма и свойства электронной оболочки молекул различны и зависят от рода химической связи между составляющими его атомами (гомополярная и гетерополярная связи).

Расстояние между атомами молекул (а следовательно их размеры) также сильно отличаются (примерно на порядок величин). Говоря о размерах молекул, следует подразумевать наибольшее расстояние между их атомами. Так определены расстояния между атомами молекул, например, H_2 – 0,74 Å, Cl_2 – 1,99 Å, Li_2 – 2,67 Å и т. п.

Размеры и массы некоторых молекул указаны в следующей таблице

Свойства молекул	Тип молекул газа												
	<i>H</i>	<i>H₂</i>	<i>CH₄</i>	<i>NH₃</i>	<i>Ne</i>	<i>CO</i>	<i>N</i>	<i>O₂</i>	<i>Ar</i>	<i>CO₂</i>	<i>Cl₂</i>	<i>Kr</i>	<i>Xe</i>
Номинальный диаметр, $\alpha \cdot 10^{-10}$ м	2,75	2,19	4,19	4,48	2,60	3,81	3,78	3,64	3,66	4,64	5,53	4,2	4,94
Масса молекулы, $m = 1,66 \cdot 10^{-27}$ кг	2,016	4,003	16,04	17,03	20,18	28,01	28,01	32,0	39,94	44,01	70,91	83,8	131,3

Кинематические параметры столкновений молекул газа определяются их формой, массой, скоростями и энергиями. Скорости поступательного хаотического движения молекул в равновесном газе с температурой T определяются формулами:

$$\text{Наивероятнейшая} - v_{\text{вер}} = \left(2 kT/m \right)^{1/2} ;$$

$$\text{Среднеквадратичная} - \bar{v}_{\text{кв}} = \left(3 kT/m \right)^{1/2} ;$$

$$\text{Среднеарифметическая} - v_{\text{ар}} = \left(8 kT/\pi m \right)^{1/2} .$$

Сложные молекулы имеют поступательные вращательные и колебательные скорости и обладают соответствующими этим скоростям энергиями. В равновесных газах на каждую степень свободы приходится энергия, равная $\frac{1}{2} kT$. Молекулы одноатомных газов имеют три степени свободы, двухатомных – 5 степеней свободы и многоатомных – 6 степеней свободы. Чем сложнее структура молекул, тем сложнее и параметры движения, характеризующие его состояние. В практических расчетах в качестве модели форм молекул принимаются: для одноатомных молекул – гладкая твердая сфера; для двухатомных (из однотипных атомов) – фигуры в виде гантелей; для многоатомных (из разнотипных атомов) – несимметричные фигуры разных видов.

Вращательная энергия молекул определяется формулой $\omega_{\text{вр}} = 1/2 I \omega^2$,

где I – момент инерции, ω – угловая скорость. Колебательная энергия $\omega_{\text{кол}} = T + U$ (где T – внутренняя кинетическая энергия, U – потенциальная энергии). (Детальный анализ этих процессов требует привлечения квантово-механических представлений и будут рассмотрены в III томе курса).

Важнейшим параметром процессов столкновения является так называемое сечение столкновений молекул, от значения которого существенно зависит вероятность столкновений. Это понятие, в общем, неоднозначно. Оно определяется по-разному, в зависимости от природы сталкивающихся частиц, поскольку и силы их взаимодействия, и расстояния, на которых они становятся существенными, могут быть различными. Все это требует отдельного рассмотрения с привлечением аппарата квантовой и волновой механики. Здесь же мы ограничимся простейшим его определением, используемым обычно при рассмотрении различных газокинетических процессов методами классической механики.

Сечением столкновения двух молекул будем считать площадь круга с диаметром, равным сумме диаметров сталкивающихся молекул, принимая их в виде идеальных гладких сфер, т. е. $S = \frac{\pi}{4} (d_1 + d_2)^2$. Такое представление в реальных условиях, строго говоря, может быть оправдано только для одноатомных молекул. Для двухатомных и многоатомных молекул само понятие «диаметр молекулы» становится условием и требует уточнения, так как линейные размеры молекул в разных направлениях различны. Очевидно, что в этих случаях наибольший его линейный размер, принимаемый за диаметр молекулы в первом приближении, лучше соответствует реальной характеристике. Теоретически строго определить «истинную» форму и значение диаметров «свободных» молекул не представляется возможным. Имеющиеся сведения о них получены на основе экспериментальных исследований различных процессов взаимодействия молекул, как между собой, так и с другими элементарными частицами. Известно, что на относительно больших расстояниях между молекулами действуют силы притяжения, а на малых, наоборот, силы отталкивания, причем, последние очень сильно зависят от расстояния ($\approx r^{-13}$). Расстояние, на котором сила взаимодействия меняет знак, можно принять за начало отсчета момента физического контакта молекул. Это следует иметь в виду при определении диаметров сталкивающихся молекул, следовательно, и сечений их столкновений. На расстояние ближнего взаимодействия, т. е. положение точки $r_{\text{кр}}$, влияет значение относительной скорости молекул (а следовательно температура газа), но незначительно из-за очень сильной зависимости сил отталкивания от расстояния между молекулами.

Для иллюстрации общего (неквантового) подхода к анализу газокинетических процессов приведем простейший и наглядный пример, заимствованный из физики плазмы. В основу такого подхода положены два

фундаментальных закона: закон сохранения энергии и закон сохранения импульса сталкивающихся частиц.

Рассмотрим парные столкновения между молекулами разных типов в равновесной двухкомпонентной газовой смеси. Допустим, что молекулы имеют идеальную шарообразную форму с абсолютно гладкой поверхностью и отличаются друг от друга только своими скоростями и массами. Молекулы одной из компонент обозначены индексом α , молекулы другой – индексом β . Скорости \vec{V} , импульсы \vec{P} и кинетические энергии T после соударения отмечены штрихами. Координаты и скорости центра инерции обозначены индексом 0. С указанными обозначениями можно записать следующие очевидные зависимости. Для импульса системы двух сталкивающихся молекул:

$$\text{до столкновения: } \vec{P} = \vec{P}_\alpha + \vec{P}_\beta = m_\alpha \vec{V}_\alpha + m_\beta \vec{V}_\beta, \quad (4.129)$$

$$\text{после столкновения: } \vec{P}' = \vec{P}'_\alpha + \vec{P}'_\beta = \vec{P}, \quad (4.130)$$

$$\text{т. е.} \quad m_\alpha \vec{V}_\alpha + m_\beta \vec{V}_\beta = m_\alpha \vec{V}'_\alpha + m_\beta \vec{V}'_\beta.$$

Суммарная кинетическая энергия системы сталкивающихся молекул α и β равна:

$$\text{до столкновения: } T = T_\alpha + T_\beta = \frac{m_\alpha \vec{V}_\alpha^2}{2} + \frac{m_\beta \vec{V}_\beta^2}{2} \quad (4.131)$$

$$\text{и после упругого столкновения: } T' = \frac{m_\alpha \vec{V}'_\alpha^2}{2} + \frac{m_\beta \vec{V}'_\beta^2}{2}. \quad (4.132)$$

Если столкновения молекул не являются абсолютно упругими, то часть суммарной кинетической энергии системы переходит во внутреннюю ее энергию, $\Delta U_{\text{вн}}$, причем изменение внутренней энергии может относиться к одной из молекул или к обеим. В этом случае

$$T' = T \pm \Delta U_{\text{вн}}. \quad (4.133)$$

Знак « \pm » в (4.133) относится к случаю, когда первоначальная кинетическая энергия системы уменьшается за счет повышения ее внутренней энергии. (Природа и значения внутренней энергии молекул будут рассмотрены в т. III).

В зависимости от характера изменений суммарной кинетической энергии системы различают неупругие соударения 1-го рода и неупругие соударения 2-го рода. В первом случае суммарная кинетическая энергия уменьшается из-за перехода ее части во внутреннюю энергию системы, а во втором – наоборот, увеличивается за счет «вливания» в нее части внутренней энергии системы. Если кинетическая энергия системы недостаточна для изменения внутренней ее энергии, то столкновения между молекулами могут быть только упругими.

Для удобства анализа зависимостей (4.129-4.133) перейдем к системе отсчета центра инерции, в которой его координаты связаны с координатами сталкивающихся молекул в следующем виде:

$$\vec{r}_0 = \frac{m_\alpha \vec{r}_\alpha + m_\beta \vec{r}_\beta}{(m_\alpha + m_\beta)}, \quad (4.134)$$

где $\vec{r}_\alpha, \vec{r}_\beta$ – радиусы-векторы положения молекул α и β , \vec{r}_0 – радиус-вектор центра инерции.

Скорость движения центра инерции

$$\vec{v}_0 = \frac{d\vec{r}_0}{dt} = \frac{m_\alpha \vec{v}_\alpha + m_\beta \vec{v}_\beta}{(m_\alpha + m_\beta)}, \quad (4.135)$$

Если взять систему отсчета так, чтобы $\vec{v}_0 = 0$ (т. е. центр инерции находится в покое), то из (4.135) будем иметь:

$$\vec{v}_{\beta 0} = -\frac{m_\alpha}{m_\beta} \vec{v}_{\alpha 0}. \quad (4.136)$$

Относительная скорость \vec{v} сталкивающихся молекул:

$$\vec{v} = \vec{v}_\alpha - \vec{v}_\beta = \vec{v}_{\alpha 0} - \vec{v}_{\beta 0}. \quad (4.137)$$

Из (4.136) и (4.137) следует:

$$\vec{v}_{\alpha 0} = \frac{m_\beta \vec{v}}{m_\alpha + m_\beta}, \quad \vec{v}_{\beta 0} = -\frac{m_\alpha \vec{v}}{m_\alpha + m_\beta}. \quad (4.138)$$

Из приведенных соотношений следует:

$$\begin{aligned} \vec{v}_\alpha &= \vec{v}_0 + \vec{v}_{\alpha 0} = \vec{v}_0 + \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \vec{v} \\ \vec{v}_\beta &= \vec{v}_0 + \vec{v}_{\beta 0} = \vec{v}_0 - \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta} \vec{v}. \end{aligned} \quad (4.139)$$

Из (4.131) и (4.139) следует:

$$T = \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} + \frac{m_\beta v_\beta^2}{2} = \frac{m_\alpha + m_\beta}{2} \vec{v}_0^2 + \frac{m_\alpha m_\beta}{2(m_\alpha + m_\beta)} \vec{v}^2. \quad (4.140)$$

После упругого столкновения $T=T'$, а T' определяется:

$$T' = \frac{m_\alpha v_\alpha'^2}{2} + \frac{m_\beta v_\beta'^2}{2} = \frac{m_\alpha + m_\beta}{2} \vec{v}_0'^2 + \frac{m_\alpha m_\beta}{2(m_\alpha + m_\beta)} \vec{v}'^2.$$

Так как после упругого столкновения скорость и кинетическая энергия центра инерции не изменяются (т.е. $\vec{v}_0 = \vec{v}_0'$; $T=T'$), то

$$\frac{\mu \vec{v}^2}{2} = \frac{\mu \vec{v}'^2}{2} \quad \mu = \frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}. \quad (4.141)$$

При неупругом столкновении $T \neq T'$ и $\vec{v}_0 \neq \vec{v}_0'$

$$\Delta U_{\text{вн}} = \pm \frac{\mu}{2} (\vec{v}^2 + \vec{v}'^2). \quad (4.142)$$

(Знак \pm зависит от рода неупругого столкновения).

Как видно из приведенных соотношений, при упругих соударениях молекул абсолютное значение вектора относительной скорости молекул не изменяется, а может измениться его направление.

Рассмотрим случай соударений молекул, когда скорость и масса одной из них заметно отличаются от скорости и массы другой. Например, $\vec{v}_\beta \ll \vec{v}_\alpha, m_\alpha \ll m_\beta$. (В предельном случае можно частицу большей массы типа β считать в покое).

Изменение импульса быстрой частицы α выражается:

$$\Delta \vec{P}_\alpha = m_\alpha v_\alpha' - m_\alpha \vec{v}_\alpha = m_\alpha v_{\alpha 0}' - m_\alpha \vec{v}_{\alpha 0}. \quad (4.143)$$

Учитывая (4.138) можно записать:

$$\Delta \vec{P}_\alpha = \frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} (\vec{v}' - \vec{v}) = \frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \Delta \vec{v}. \quad (4.144)$$

Изменение $\Delta \vec{P}$ по направлению характеризуется некоторым углом рассеяния θ и выражается в виде

$$\Delta \vec{P}_\alpha = -\frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} (\vec{v}_\alpha - \vec{v}_\beta)(1 - \cos\theta). \quad (4.145)$$

При $\vec{v}_\beta \ll \vec{v}_\alpha$ с учетом (4.129)

$$\frac{\Delta \vec{P}_\alpha}{\vec{P}_\alpha} = -\frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} (1 - \cos\theta). \quad (4.146)$$

Угол рассеяния θ может изменяться от 0 до π . Так, при прямом центральном столкновении $\theta = \pi$ и $\cos\theta = -1$. Изменение импульса $\Delta \vec{P}$ максимально.

Из (4.146) следует, изменение импульса определяется отношением масс молекул: при $m_\alpha \ll m_\beta$ импульс \vec{P}_α может изменяться на противоположный; при $m_\alpha \approx m_\beta$ возможна полная потеря импульса.

Опуская громоздкие преобразования предыдущих формул, запишем изменение кинетической энергии молекулы типа α в виде:

$$\Delta T_\alpha = \frac{2m_\alpha m_\beta}{(m_\alpha + m_\beta)^2} (T_\alpha - T_\beta)(1 - \cos\theta). \quad (4.147)$$

$$\text{Коэффициент } \chi = \frac{2m_\alpha m_\beta}{(m_\alpha + m_\beta)^2} \quad (4.148)$$

является характеристикой эффективности обмена энергией при столкновении молекул и называется коэффициентом передачи энергии.

Как видно из приведенных выше соотношений, в процессах столкновения молекул газов, определяющими являются масса, форма (структура) и энергия молекул и силы межмолекулярного взаимодействия (дальнего и ближнего). Ввиду их большой значимости в процессах столкновения кратко еще раз укажем на них.

Полная энергия E молекулы, часть которой может быть передана другой при столкновениях, включает ее внутреннюю энергию и кинетическую энергию поступательного движения.

Для оценки массы газа, состоящего из n молекул с массой m , заключенного в постоянном объеме, теплоемкость C_V , определяется в общем случае выражением вида:

$$C_V = n \left(\frac{dE}{dT} \right)_V = \frac{1}{m} \left(\frac{dE}{dT} \right)_V.$$

Для одноатомных газов, молекулы которых можно принять в виде абсолютно гладких и упругих шариков, если пренебречь энергией межмолекулярных взаимодействий, энергия будет определяться простейшей формулой

$$E = C_V T, \quad C_V = 3/2 R, \quad C_P = 5/2 R,$$

где T – температура газа, R – универсальная газовая постоянная, C_V , C_P – соответственно теплоемкости при постоянном объеме и постоянном давлении.

Для газов, молекулы которых можно принять в виде «гантелей» (линейные молекулы), в общей энергии необходимо учитывать вращательную энергию всех n -молекул, т. е.

$$E = E_{\text{пост}} + E_{\text{вращ}} + E_{\text{кол}}, \quad C_V = \frac{3}{2}R + R + (3n - 5)R, \quad C_P = \frac{9}{2}R.$$

Для общего случая, когда молекулы газа не могут уподобляться указанным двум видам молекул, теплоемкости C_V , C_P выражаются в виде:

$$C_V = 3(n - 1)R, \quad C_P = (3n - 2)R.$$

Силы межмолекулярного взаимодействия проявляются по-разному, в зависимости от расстояния между молекулами, и разделяются на силы притяжения, которые быстро уменьшаются с расстоянием ($\sim 1/r^7$), и силы отталкивания, проявляющиеся на очень близких расстояниях между центрами масс молекул, соизмеримых с размерами самих молекул. Природа межмолекулярных сил притяжения различна. Они разделяются на следующие типы: электростатические, индукционные, дисперсионные и резонансные. Подробно их рассмотрение выходит за рамки данной книги.

ГЛАВА 5 ЗАКОНЫ ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ

5.1 Гравитационное взаимодействие тел

Гравитационное взаимодействие между материальными телами — является универсальным видом взаимодействия в природе. Оно определяется только массами тел, независимо от их природы и физико-химических свойств. Носителями этого вида взаимодействия являются содержащиеся в этих телах элементарные частицы — электроны, протоны и другие, как заряженные, так и нейтральные. Наиболее общей классификацией этих частиц является классификация по массам (подробнее о «спектре масс» элементарных частиц см. в т. III).

Исследования показали, что физическое свойство как «масса» присуща всем элементарным частицам, в том числе и тем, которые не могут находиться в состоянии покоя (примером является «частица света» — фотон, см. т. III). Таким образом, масса является универсальной физической характеристикой материи.

Согласно данным многочисленных экспериментов, сила гравитационного взаимодействия между материальными точками обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними: $F_g \sim \frac{1}{r^2}$. Таким образом, это взаимодействие является «дальнодействующим», как «кулоновское» взаимодействие между электрическими зарядами противоположного знака и выражается аналогичной зависимостью ($F_g \sim \frac{1}{r^2}$, см. т. II). Это наводит на мысль о глубокой взаимосвязи между этими видами взаимодействия, хотя она и до настоящего времени еще не раскрыта.

Определяющая роль гравитационного взаимодействия в масштабах Вселенной, при огромных расстояниях, разделяющих небесные тела, очевидна, но не объяснена до конца.

Опыты и астрономические наблюдения показали, что сила взаимодействия между материальными телами является всеобщим инвариантом, носит характер взаимного притяжения и пропорциональна массам взаимодействующих тел. Обобщением всех этих экспериментальных фактов является закон всемирного тяготения, впервые сформулированный Ньютоном в виде:

$$F_g = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} . \quad (5.1)$$

Величина γ называется «постоянной тяготения» или «гравитационной постоянной» и является одной из фундаментальных мировых констант, отражающих глубинные свойства материального мира (здесь заметим, что к их числу относятся также элементарный электрический заряд e , скорость света в вакууме c и постоянная Планка h , которые будут рассмотрены более подробно в т. III). Поэтому точному измерению этой величины были посвящены многочисленные экспериментальные работы. Так, в методе

Кевендиша используются «крутильные весы» – два легких шарика, соединенных коромыслом, подвешенным горизонтально на упругой нити. При взаимодействии этих шариков с большими массами коромысло поворачивается на определенный угол, пропорциональный силе взаимодействия. В методе Жолли используются рычажные весы, на одной из чашек которых помещается грузик, взаимодействующий с телом большой массы. Изменение положения равновесия весов, обусловленное этим взаимодействием, компенсируется помещением гири на другую чашку весов. По весу этих гирь определяется сила взаимодействия. Существуют и другие методы. В общем, в настоящее время гравитационная постоянная измерена с очень высокой точностью, что необходимо, поскольку эта величина очень мала (пример, два тела с массами 1 кг на расстоянии 1 м взаимодействуют с силой $\approx 6,67 \cdot 10^{-11}$ Н). Отсюда ясно, что при взаимодействии элементарных частиц между собой гравитационные силы могут играть заметную роль лишь на очень малых расстояниях, соизмеримых с размерами самих этих частиц. Поэтому при образовании атомных ядер, атомов вещества и молекул основную роль играют другие виды взаимодействий («сильное» и «электромагнитное», см. т. III).

Силы тяготения заметно проявляются лишь в том случае, если хотя бы одно из взаимодействующих тел имеет «астрономические» размеры и массу. Именно такая ситуация имеет место для тел на поверхности Земли. Огромные массы небесных тел, в сочетании с упомянутым выше «дальнодействующим» характером сил всемирного тяготения, обуславливают главенствующую роль этих сил в явлениях космического масштаба.

Законы движения космических тел («законы небесной механики») могут быть строго выведены на основе закона всемирного тяготения (см. п. 5-3).

Согласно (5.1) ускорение любого тела с массой m_2 под действием силы тяготения со стороны тела с массой m_1 (которое при этом считается «силовым центром») не зависит от массы тела:

$$a = \frac{F_g}{m_2}. \quad (5.2)$$

Например, вблизи поверхности Земли все свободные тела должны падать по направлению к центру Земли с радиусом r_3 («вниз», по обыденной терминологии) с одним и тем же ускорением:

$$g_0 = \frac{\gamma m_3}{r_3^2}. \quad (5.3)$$

Однако такой вывод справедлив лишь при условии, что «инертная» масса, о которой идет речь во 2-м законе Ньютона, равна (или пропорциональна, что не имеет принципиального значения ввиду произвольного выбора единицы измерения массы) «гравитационной» массе, входящей в закон всемирного тяготения. Действительно, если бы эти массы были различными (не пропорциональными друг другу), то вместо (5.2)

следовало бы написать для силы, действующей на тело у поверхности Земли:

$$F_g = m_2^{(i)} a = m_2^{(g)} g_0. \quad (5.4)$$

Откуда:

$$a = \frac{m_2^{(g)}}{m_2^{(i)}} g_0, \quad (5.5)$$

где индекс i относится к инертной, g – гравитационной массе. Поскольку g согласно (5.3), является вполне определенной величиной, то при различии масс $m^{(g)}$ и $m^{(i)}$ ускорения свободного падения у поверхности Земли оказались бы различными. Точные опыты показали, однако, что эти ускорения одинаковы с высокой точностью (в настоящее время равенство инертной и гравитационных масс установлено с точностью до 10^{-12}). Это подтверждено, в частности, и для самих элементарных частиц. Опыты с падением нейтронов в вакууме подтвердили факт постоянства ускорения под действием сил тяготения для любых материальных тел. Равенство гравитационной и инертной масс является фундаментальным физическим фактом, лежащим в основе общей теории относительности (см. п. 5.5).

Еще раз следует подчеркнуть, что природа сил всемирного тяготения является одним из наиболее сложных проблем современной физики. Имеются взгляды, что взаимодействие тел, в отличие от классической концепции «дальнодействия» (действия на расстоянии) объясняется существованием «полей» – особого вида материи. Любое материальное тело создает в окружающем пространстве поле, существование которого проявляется в наличии силы, действующей на помещенное в это поле «пробное» тело. Способность тел создавать поле объясняется тем, что они состоят из элементарных частиц, которые обладают условно «зарядами» того или иного вида. Например, электромагнитные поля создаются электрическими зарядами (вообще говоря, движущимися), которые действуют на помещенные в них заряды. Аналогичным образом, гравитационное взаимодействие можно объяснить тем, что все элементарные частицы создают гравитационное поле, поскольку они обладают «гравитационным зарядом». Этот «заряд» и является «гравитационной массой» частицы. Все частицы, образующие тела, создают свои поля независимо друг от друга, и результирующее поле тела представляет собой наложение полей отдельных частиц (это положение называется «принципом суперпозиции»). При этом, поскольку поле проявляется действием силы, являющейся векторной величиной, то ясно, что и сложение полей носит векторный характер.

Рассмотрим основные характеристики гравитационного поля. Пусть материальная частица с массой M создает гравитационное поле, в которое на расстоянии r помещено «пробное» тело с массой m (рис. 5.1). Согласно закону всемирного тяготения, на пробное тело действует сила притяжения

$$F = -\gamma \frac{Mm}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}. \quad (5.6)$$

Эта сила пропорциональна массе пробного тела и не является характеристикой поля. Векторная величина

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = \gamma \frac{M}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (5.7)$$

напротив, определяется только «зарядом», создающим поле, и «точкой наблюдения», выбранной в этом поле, и может служить «силовой характеристикой» гравитационного поля в данной точке. Она называется «напряженностью гравитационного поля» и по смыслу совпадает с ускорением силы тяготения для любого тела в рассматриваемом поле. Направление вектора \vec{g} совпадает с направлением силы \vec{F} .

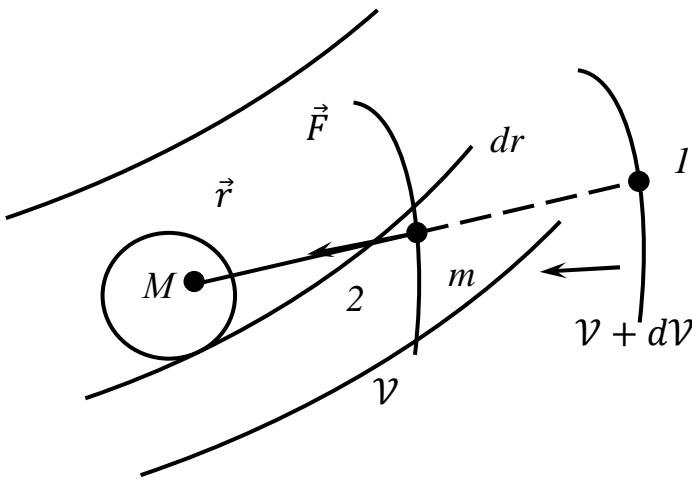


Рис. 5.1

Если пробное тело не закреплено, то под действием сил поля оно придет в движение по направлению к силовому центру. Через некоторое время мы обнаружим, что тело переместилось на некоторое расстояние $d\vec{r}$; при этом силы поля совершили работу $dA = \vec{F}d\vec{r}$.

С другой стороны, как было установлено выше (в гл. 4) работа сил поля совершается за счет изменения потенциальной энергии в этом поле: $dA = -dU$.

Отсюда находим: $dU = -\vec{F}d\vec{r}$. При перемещении на конечное расстояние от точки 1 до точки 2 будет совершена работа $\Delta A = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r}$ и потенциальная энергия изменится на

$$\Delta U = - \int_1^2 \vec{F}d\vec{r}. \quad (5.8)$$

Переходя к скалярным величинам и используя (5.6), после выполнения интегрирования найдем, что

$$\Delta U = U_2 - U_1 = - \left(\frac{\gamma M m}{r_2} - \frac{\gamma M m}{r_1} \right). \quad (5.9)$$

Отсюда следует, что, находясь в гравитационном поле, материальная точка обладает потенциальной энергией

$$U = -\gamma \frac{M m}{r} \quad (5.10)$$

(знак минус соответствует полю сил притяжения). Эта величина зависит от массы пробного тела m .

Введем величину, равную

$$\varphi_g = \frac{U}{m} = -\frac{\gamma M}{r}. \quad (5.11)$$

Эта величина уже зависит только от свойств поля и называется «гравитационным потенциалом». Она, в отличие от \vec{g} (5.7), является «энергетической» характеристикой поля.

По абсолютной величине гравитационный потенциал представляет собой работу, которую необходимо совершить против сил поля, чтобы удалить пробное тело единичной массы от силового центра на бесконечность, где $F \rightarrow 0$, и, следовательно, величины U и φ_g также можно положить равными нулю.

Согласно (5.6) и (5.10), гравитационное поле является «центральной», т.е. его характеристики зависят от одной координаты r (радиальной координаты). Поэтому совокупность точек, в которых величина U (и, следовательно, φ_g) одинакова, является сферой радиуса r (см. рис. 5.1). Она может быть названа «экипотенциальной поверхностью», а линия 1-2, проходящая через силовой центр, может быть названа «силовой линией» поля.

Согласно (5.9) при перемещении вдоль экипотенциальной поверхности работа сил поля равна нулю. Отсюда следует, что силовая линия и экипотенциальная поверхность во всех точках полей взаимноперпендикулярны. При переходе с одной экипотенциальной поверхности U на другую $U + dU$ – совершается работа перемещения вдоль силовой линии Fdr . Поскольку $F = -\frac{dU}{dr}$ то, учитывая, что $F=mg$ и $U=m\varphi_g$, имеем

$$g = -\frac{d\varphi_g}{dr}. \quad (5.12)$$

В векторной форме это выражение принимает вид:

$$\vec{g} = -\frac{d\varphi_g}{d\vec{r}}. \quad (5.13)$$

Величина $\frac{d\varphi_g}{d\vec{r}}$, характеризующая быстроту изменения величины потенциала φ при перемещении перпендикулярно экипотенциальной поверхности, $\varphi_g = \text{const}$ называется «градиентом потенциала» и обозначается $\text{grad } \varphi_g$ или $\nabla \varphi_g$. Тогда формулу (5.13) можно записать в виде:

$$\vec{g} = -\text{grad } \varphi_g. \quad (5.14)$$

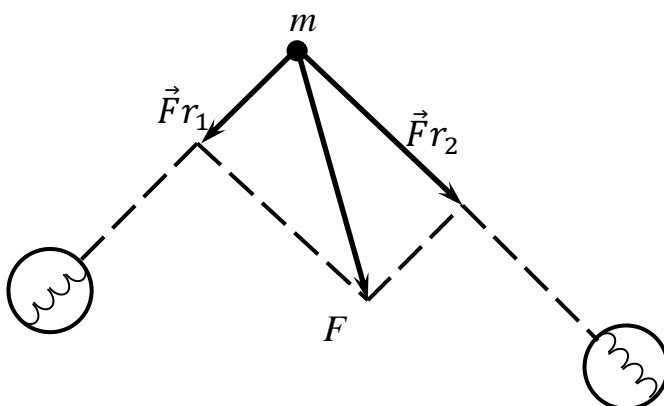


Рис. 5.2

Все приведенные соотношения сохраняют свою математическую форму в общей теории силовых полей, для которых можно ввести силовую и энергетическую характеристики – напряженность и потенциал, соответственно. В случае центростремительного поля эти

величины зависят только от одной (радиальной) координаты r .

Рассмотрим теперь гравитационное поле, созданное двумя «силовыми центрами» – материальными телами с массами M_1 и M_2 (рис. 5.2). Поместим «пробное» тело с массой m в некоторую точку поля. Теперь на тело m

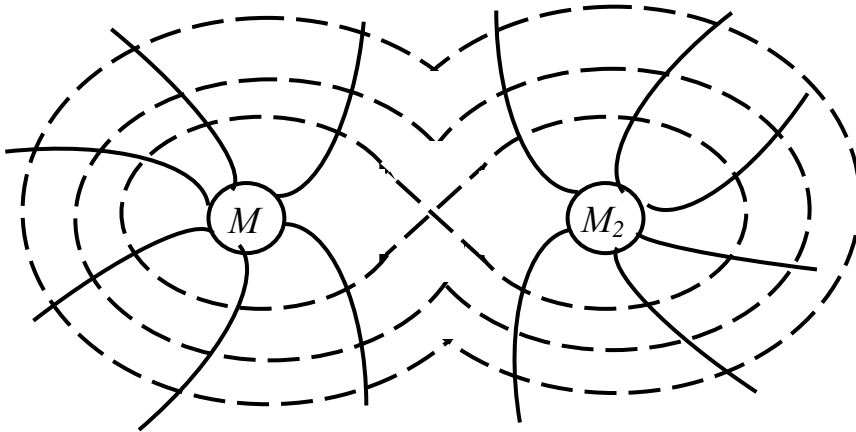


Рис. 5.3

действуют две силы – \vec{F}_1 и \vec{F}_2 . Их результирующая образуется по правилам векторного сложения: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Отсюда ясно, что и напряженность гравитационного поля в этом случае будет векторной суммой $\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$.

Осуществляя такое сложение, отражающее принцип суперпозиции гравитационных полей, можно найти характеристики поля, созданного двумя массами M_1 и M_2 , для всех точек поля. Результат такого сложения удобно представить картиной силовых линий, касательные к которым в каждой точке определяют направление вектора \vec{g} , а «густота» их соответствует численной величине $|\vec{g}|$. Затем, используя свойство взаимной перпендикулярности силовых линий эквипотенциальных поверхностей, можно провести и эти поверхности, характеризующие распределение гравитационного потенциала поля. В результате получится «графическое изображение» поля, для случая $M_1 = M_2$, показанного на рис. 5.3 (сплошные кривые – силовые линии, пунктирные линии – следы сечения эквипотенциальных поверхностей плоского чертежа). Такое наглядное представление характера поля, созданного несколькими телами («зарядами») в пространстве, применяется и при рассмотрении полей иной природы, например, электростатических полей (см. т. II).

Принцип суперпозиции гравитационных полей, создаваемых «точечными» массами, можно применить и для расчета полей от «протяженных» тел, размеры которых не могут считаться малыми по сравнению с расстояниями до исследуемых точек поля. Одной из

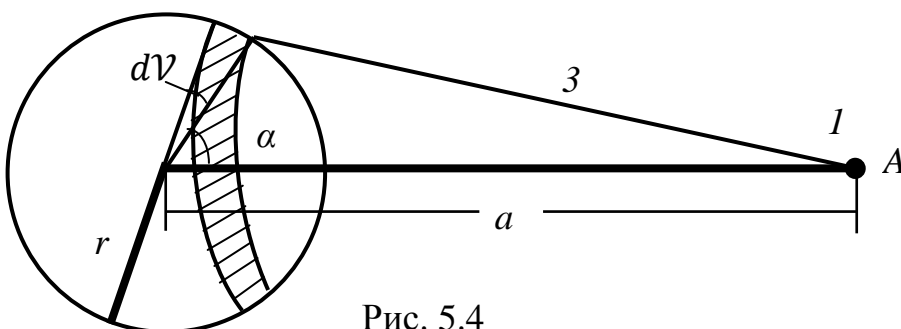


Рис. 5.4

простейших задач этого типа является расчет гравитационного поля, создаваемого поллой тонкой сферой радиуса r с

массой M вне и внутри сферы. Для этой цели следует разрезать поверхность сферы на кольцевые «пояски» с площадью $dS=2\pi r^2 \sin\theta d\theta$, как показано на рис. 5.4. Отношение массы этого пояса к массе всей сферы равно $dM/M=dS/4\pi r^2$, откуда $dM = M \frac{1}{2} \sin\theta d\theta$. Все точки «пояса» равноудалены от точки А, и потенциал поля в этой точке, создаваемый «пояском», равен $d\varphi_g = -\gamma M \frac{1}{2} \sin\theta d\theta$. Величина этого удаления $\rho = (R^2 + r^2 - 2Rr \cos\theta)^{1/2}$, как следует из теоремы косинусов. Дифференцируя, находим, что $\rho d\rho = Rr \sin\theta d\theta$. Отсюда $d\varphi_g = -\gamma M / 2rR d\rho$, и полный гравитационный потенциал в точке А определяется путем интегрирования:

$$U_g = -\frac{\gamma M}{2Rr} \int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} d\rho. \quad (5.15)$$

Если рассматриваемая точка находится вне сферы, то $\rho_{max}=R+r$ и $\rho_{min}=R-r$, как видно из рис. 5.4. Тогда

$$U_g = -\frac{\gamma M}{R}. \quad (5.16)$$

По формуле (5.14) можно вычислить и напряженность гравитационного поля вне сферы, которая будет равна

$$g = -grad\varphi_g = -\frac{d\varphi_g}{dR} = -\frac{\gamma M}{R^2}. \quad (5.17)$$

Таким образом, поле, создаваемое полой сферой, является центростремительным и совпадает с полем материальной точки, помещенной в центре сферы и имеющей массу, равную массе сферы. По 3-ему закону Ньютона сила, с которой сферическая поверхность притягивает некоторую точечную материальную массу, помещенную в ее поле, равна силе, с которой эта точечная масса притягивает сферу, причем эта вторая равна силе, с которой эта точечная масса притягивает сферу, причем эта вторая сила должна быть приложена в центре сферы («источник» первой силы). Итак, точечная масса и полая сфера, (а также, очевидно, две полые сферы) взаимодействуют как две точечные массы.

Если рассматриваемая точка поля находится внутри сферы, то $\rho_{max}=R+r$, $\rho_{min}=R-r$, и формула (5.15) дает:

$$\varphi_g = -\frac{\gamma M}{r} = const \quad (5.18)$$

(на границе сферы $r=R$ и формула (5.18) переходит в (5.16)). В этом случае, согласно формуле (5.14), $g = -\frac{d\varphi_g}{dR} = 0$, т. е. внутри сферы поле отсутствует.

Пользуясь этими результатами, нетрудно показать, что две сплошные сферы, в которых плотность материала $\rho=const$ или же $\rho=\rho(r)$ (т. е. она постоянна или распределена сферически симметричным образом) взаимодействуют как точечные массы, помещенные в центре шаров и имеющие массы, равные массам шаров. Действительно, сплошной шар можно представить, состоящим из концентрических сфер бесконечно малой толщины, и для каждой из них будут иметь место выведенные выше закономерности. Согласно принципу суперпозиции, их суммарное поле будет

обладать теми же свойствами. В частности, если внутри шара (при $\rho = \text{const}$ или $\rho = \rho(r)$) имеется полость, то внутреннее гравитационное поле отсутствует.

Поле внутри однородного шара радиуса r с плотностью вещества ρ можно рассчитать на основании приведенных выше результатов, если учесть что поле в точках, расположенных на расстоянии R от центра (т. е. на глубине $h = r - R$), создается только массой сферы радиуса R («внешние» слои шара не создают поле внутри себя). Так что напряженность поля g равна $g_R = \frac{g M_R}{R^2}$, поскольку $M_R = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$, то для g получается выражение

$$g_R = \frac{4}{3} \pi \rho R = \frac{4}{3} \pi \rho (r - h). \quad (5.19)$$

Таким образом, поле внутри однородного шара линейно убывает с глубиной и в центре шара обращается в ноль. Это последнее обстоятельство нетрудно установить и без всяких расчетов, если учесть, что на точечную массу, помещенную в центр шара, будут действовать силы, распределенные сферически симметричным образом, и их равнодействующая будет равна нулю.

Гравитационные силы, действующие между слоями шара, стремятся сжать его до минимальных размеров. Этому препятствует, развиваемое в глубинных слоях шара «противодавление». Если шар твердый, то существует равновесный радиус, при котором гравитационные силы и «противодавление» взаимно уравниваются. Внутри больших масс могут устанавливаться огромные давления, (данные для Земли см. ниже). Однако звезды, представляющие собой «горячие» газовые шары огромной массы, могут испытывать сжатие под действием гравитационных сил. При этом энергия гравитационного поля будет переходить в тепло. (Гипотезе о гравитационном сжатии Солнца как «источника» его колоссальной мощности излучения была выдвинута еще Гельмгольцем и Томсоном. Однако расчеты не подтверждают эту гипотезу). Рассмотрим расчет гравитационной энергии U шара радиуса R с равномерной плотностью ρ . Она равна работе внешних сил, которую необходимо совершить для разделения шара на бесконечно удаленные друг от друга частицы. Аналогично изложенному выше, можно разбить шар на концентрические (бесконечно тонкие) полые сферы радиуса r с массой dm . На этот слой действуют силы тяготения со стороны расположенного под ним сплошного шара с массой $m = M \left(\frac{r}{R}\right)^3$ (M – полная масса шара). Потенциальная энергия этой сферы будет равна $dU = -\gamma m/r dm = 3\gamma M^2/R^6 r^4 dr$. Тогда полная потенциальная энергия всех этих полых сфер и будет равна гравитационной энергии шара (а также работе внешних сил, необходимых для полного «разрушения» шара):

$$U = -3 \frac{\gamma M^2}{R^6} \int_0^R r^4 dr = -\frac{3}{5} \cdot \frac{\gamma M^2}{R}. \quad (5.20)$$

Принимая, что плотность материи распределена по объему Солнца равномерно (что является, конечно, грубым приближением), и, полагая $R \approx 7 \cdot 10^8$ м и $M = 2 \cdot 10^{30}$ кг, можно получить оценку: $U \approx 2,3 \cdot 10^{41}$ Дж. По данным измерений в настоящее время Солнце излучает энергию со скоростью $\frac{dU}{dt} = \frac{U}{t} \approx 3,9 \cdot 10^{26}$ Вт.

Если принять, что мощность излучения во все эпохи неизменна, то получается, что «возраст» Солнца не превышает $2 \cdot 10^7$ лет. Более точные расчеты дают $6 \cdot 10^7$ лет. Однако и это время слишком мало по современным данным, возраст Земли – не менее $4,5 \cdot 10^9$ лет, и Солнце, разумеется, не может быть «моложе». Таким образом, гравитационное сжатие не является основным источником энергии Солнца. Истинная причина, по-видимому, термоядерные реакции с выгоранием водорода в гелий (это будет рассмотрена в т. III). Однако после полного «выгорания» термоядерного горючего гравитационное сжатие может вызвать крупномасштабные эффекты в звездах, что будут рассмотрены ниже, в п. 5.5.

С помощью закона Всемирного тяготения можно сравнительно просто оценить массу Солнца, Земли и др. планет. Действительно, сила притяжения Земли к Солнцу $F_T = \frac{\gamma m_3 m_c}{r^2}$ создает центростремительную силу $F_g = \frac{m_3 v^2}{r}$, обеспечивающую вращательное движение Земли вокруг Солнца со скоростью $v \approx 30$ км/с, где r – среднее расстояние от Земли до Солнца ($r \approx 149,5 \cdot 10^6$ км). Эту зависимость можно использовать ввиду того, что эксцентриситет эллиптической орбиты Земли очень мал, как уже отмечено выше ($e \approx 0,0167$).

Поскольку период обращения, т. е. продолжительность года, $T = \frac{2\pi r}{v}$, то из приведенного равенства следует:

$$\gamma \frac{m_c}{r^2} = \frac{4\pi^4 r}{T^2}, \quad m_c = \frac{4\pi^2 r^3}{\gamma T^2}. \quad (5.21)$$

Подстановка известных значений величин дает $m_c \approx 2 \cdot 10^{30}$ кг. (Подробнее о движении небесных тел по орбитам см. в п. 5.3).

Массу Земли можно определить аналогичным способом, подставляя в эту формулу $r \approx 384000$ км (среднее расстояние от Луны до Земли) и $T = 29$ суток. Однако это можно осуществить и иным способом, используя значения ускорения силы тяготения (или напряженности гравитационного поля) на поверхности Земли g_n ; при этом, чтобы не учитывать влияние центростремительной силы, обусловленной суточным вращением Земли (см. выше), следует взять значение g_n на полюсе ($\varphi = 90^\circ$, $E_y = 0$):

$$g_n = \gamma \frac{m_3}{R^2}. \quad (5.22)$$

Подставляя значения $g_n \approx 983,2$ см/с и $R \approx 6370$ км, можно определить: $m_3 = 6 \cdot 10^{24}$ кг. Из формулы $\rho = \frac{m_3}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ можно оценить среднюю плотность Земли, которая оказывается равной $\rho = 5,5$ г/см³. Поскольку плотность минералов в земной коре составляет лишь $2,5 \div 3$ г/см³ (гранитные породы –

2,7 г/см³, базальтовые – 2,9 г/см³ и т. д.), то ясно, что плотность в глубинных слоях должна значительно превышать среднюю плотность $\bar{\rho}$. По некоторым данным, плотность внутренних слоев Земли приблизительно равномерно возрастает до 15-18 г/см³. В центральных областях (на глубине 3000 км) плотность достигает 6-9 г/см³. Это означает, что давление в глубинных слоях Земли достигает огромных значений. Предполагается, что уже на глубине около 100 км давление достигает 20 000 атм, а в центральных областях – ядра – $(1,5-3,5) \cdot 10^6$ атм. При этом и температура должна быстро возрастать с глубиной. Так что в центре Земли температура может достигать 6000°К. В приповерхностных слоях (в шахтах и буровых скважинах) температура возрастает в среднем на 3°К на 100 м и уже на глубине 40 км достигает 1000°С.

Таким образом, на основе изучения поля тяготения можно получить ценную информацию о массах планет и их внутреннем строении. Следует иметь в виду, что во всех задачах указанного типа для получения точных результатов необходимо учитывать и гравитационные поля других небесных тел. Поэтому точное «взвешивание» небесных тел представляет собой более тонкую и сложную математическую проблему (см. п. 5.3).

Переходим теперь к рассмотрению конкретных приложений теории тяготения в «земных» и «космических» условиях. Особый интерес представляют эти вопросы в связи с развитием космонавтики и созданием космологических моделей Вселенной (см. п. 5.4. и 5.5).

5.2 Гравитационное поле Земли. Гравиметрия

Поле тяготения Земли играет огромную роль в природе и технике. Наличием большой силы тяготения объясняется существование плотной атмосферы вокруг Земли, т. е., по существу, возможность жизни на ней. Известно, что малые небесные тела (Луна, малые планеты) не в состоянии удерживать сколь-нибудь значительную атмосферу и являются совершенно безжизненными мирами. Сила тяготения удерживает Землю на приблизительно постоянном расстоянии от Солнца и предоставляет нам возможность пользоваться его живительным излучением, создающим тепло и свет. Удерживая силой тяготения все предметы на своей поверхности, Земля сообщает устойчивость строительным сооружениям, машинам и механизмам, людям и животным и т.д. Кроме того, при этом «прижатие» к Земле создает силу нормального давления предметов на поверхность (Земли и др. тел), от которой, в свою очередь зависит сила трения, удерживающая незакрепленные предметы в состоянии покоя. При отсутствии тяготения во многих случаях не было бы и трения.

За миллионы лет эволюции все живое на Земле приспособилось к земной силе тяжести. Многие физиологические функции организмов неразрывно связаны с наличием тяготения. Так, при движении крови по кровеносным сосудам, удержании влаги в растительных тканях и т. д. силы

тяжести играют значительную роль. Ходьба, бег и другие механические движения неразрывно связаны с наличием поля тяготения. Известно, что переход к состоянию невесомости у космонавтов может сопровождаться неприятными ощущениями, исчезающими лишь постепенно в ходе специальной тренировки. Обратный переход – к условиям земной силы тяжести – также требует определенного периода акклиматизации. Силы тяготения играют большую роль и в явлениях, протекающих в атмосфере и в земной коре. Типичным примером являются приливы и отливы, вызываемые притяжением воды морей и океанов Луной и Солнцем. Гравитационную природу имеют «длинные» волны на поверхности воды (см. гл. 7). Конвекция в атмосфере и в толще воды морей, как и озер также имеет гравитационную природу: более плотные холодные слои опускаются вниз, а нагретые поднимаются вверх. Эти процессы играют очень важную роль в установлении теплового баланса воздушной и водной оболочки Земли.

Силы тяготения очень широко используются в технике и в повседневной человеческой практике. Простейшим примером является определение массы тел по их весу – взвешивание чрезвычайно распространенное во многих областях человеческой деятельности. Другим простым примером является использование молотков: тяжелых молотов, «баб» и т. п. При ударе молотом, при ударе молотком по наковальне к мускульной силе рабочего добавляется и сила веса самого молота. Силы тяжести используются и во многих более сложных технологических процессах. В качестве примера рассмотрим, так называемое, «гравитационное обогащение» руд, т. е. отделение полезных минералов и металлов от «пустой» породы, применявшееся уже несколько тысяч лет назад, особенно при выделении крупниц и самородков золота на золотых приисках. (Научные основы этой технологии были разработаны М. В. Ломоносовым). Метод основан на том, что частицы ценных полезных ископаемых, например, золота, обычно имеют значительно большую плотность, чем «пустая» порода (песок). При промывке породы струей воды в специальных устройствах – драчах (прообразом драчи были корыта и ковши золотоискателей-одиночек в прошлом веке) порода уносится водой, а частицы с плотностью более 3 (золота, олова, алмазов и т. д.) оседают на дно и могут быть отделены (например, просеиванием). Принципиальные достоинства этого метода – сравнительная дешевизна и возможность отделения широкого спектра минералов по размерам частиц – от 0,1 до 300 мм – обусловили его широкое применение в горно-обогатительных системах и в настоящее время.

Наряду с указанным выше «водным» гравитационным обогащением, обладающим высокой эффективностью, применяется также и «сухой» («пневматический») метод – в воздушном потоке. Многие полезные ископаемые залегают в районах Севера и Сибири с суровым климатом. При «водном» обогащении частицы выделенных минералов смочены водой и при низких температурах смерзаются, что сильно затрудняет их

транспортировку, поэтому частицы после выделения необходимо обезвоживать. Метод пневматического обогащения свободен от этого недостатка.

Построение количественной теории процесса гравитационного обогащения представляет определенные трудности. Разделение частиц различной плотности не может быть объяснено простым различием скоростей падения одиночных частиц в поле силы тяжести, поскольку при этом частицы близкого веса, но различные по плотности, не разделялись бы с достаточной эффективностью, что противоречит опытным данным. Поэтому современная теория основана на представлении о статическом процессе расслоения взвесей частиц, который носит «коллективный» характер и должен рассматриваться методами термодинамики и статистики.

Существуют различные разновидности метода гравитационного обогащения, например, обогащение в тяжелых суспензиях. При этом методе руда погружается в «утяжеленную» суспензию, содержащую зерна тяжелых минералов и сплавов (плотность суспензии достигает 3 г/см^3). Куски тяжелой породы опускаются на дно, а «пустой» породы – всплывают на поверхность и легко отделяются. Этим достигается повышенная эффективность разделения (поэтому метод широко используется в угольной и рудной промышленности (например, при обогащении алмазных руд)). На современных обогатительных рудниках часто применяются комбинированные методы, в которых сочетаются различные разновидности гравитационного обогащения. Кроме этого «чисто гравитационного» способа, известны также методы обогащения руд с использованием центробежных и электромагнитных сил, которые часто сочетают с гравитационным методом. Так, в гидроциклопах, винтовых сепараторах и других подобных машинах используется совместное действие центробежных и гравитационных сил. Разделение осуществляют также в центрифугах с жидкостями повышенной плотности и в магнитогидродинамических сепараторах с одновременным действием электрических и магнитных полей.

Выше уже упоминалось о том, что сила трения F_T проявляется обычно благодаря силе веса, создающей нормальное давление стоящего предмета P_n на его опору ($F_T \sim P_n$ согласно закону Амонтона). Если вес тела велик, и велика его площадь контакта с опорой, то сила трения может достигать, огромных значений. Этот принцип используется в строительстве гидроэлектростанций при сооружении гравитационных плотин, которые оказывают сопротивление сдвигающим силам в основном благодаря большой силе трения между основанием и грунтом, которая пропорциональна весу плотины. При этом плотина является достаточно устойчивой как на скальных грунтах (что имеет место, например, на Красноярской ГЭС), так и на других (например, глинистых) породах. Такие плотины обладают большим запасом прочности, что позволяет создавать облегченные конструкции уменьшенной стоимости. Отношение толщины основания плотины к ее высоте находится в интервале от 0,6 (для скальных

пород) до 1,2 (для глин). При этом рациональной формой профиля плотины является трапеция или треугольник. Высоты современных гравитационных плотин близки к 300 м.

Рассмотрим некоторые количественные характеристики гравитационного поля Земли. Согласно закону Всемирного тяготения Ньютона на материальное тело m (которое обычно можно считать «точкой» в виду больших размеров и массы Земли), находящееся на расстоянии R от центра Земли, действует сила:

$$F = \gamma \frac{m_3 m}{R^2}. \quad (5.23)$$

Ускорение силы тяжести g при этом равно:

$$g = \frac{F}{m} = \frac{\gamma m_3 m}{R^2}. \quad (5.24)$$

Эта величина характеризует «гравитационный потенциал» поля тяготения Земли. У поверхности Земли (на высоте h) потенциальная энергия тела, согласно изложенному в п. 4.1, определяется выражением:

$$U(h) = -\frac{\gamma m_3 m}{R_3 + h} = U_0 + mgh, \quad (U_0 = \frac{\gamma m_3 m}{R_3}). \quad (5.25)$$

В частности, центростремительное ускорение Луны, сообщаемое ей в результате притяжения к Земле, равно

$$a_{\text{л}} = \frac{\gamma m_3}{r^2} \quad (5.26)$$

(где $r \approx 384000$ км – среднее расстояние от Земли до Луны). Величина $a_{\text{л}}$ вычисляется по данным астрономических наблюдений, исходя из периода обращения T Луны по орбите ($T=27,3$ сут.) в системе отсчета, связанной с неподвижными звездами), по формуле:

$$a_{\text{л}} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} \approx 0,272 \text{ см/с}^2. \quad (5.27)$$

Отношение $a_{\text{л}}$ к ускорению силы тяжести и поверхности Земли $g = \frac{\gamma m_3}{R_3^2}$ должно быть равно:

$$\frac{a_{\text{л}}}{g} = \left(\frac{R_3}{r}\right)^2 \approx (0,016)^2 \approx 2,6 \cdot 10^{-4}, \quad (5.28)$$

что хорошо согласуется с измеренной величиной $\frac{0,272}{981} = 2,8 \cdot 10^{-4}$. Находясь в состоянии равновесия на опоре у поверхности Земли, тело с массой m должно оказывать на опору силу давления

$$P_0 = mg_0 \quad (5.29)$$

(которая называется «весом» тела). Очевидно, что с увеличением высоты над Землей вес тела должен уменьшаться в

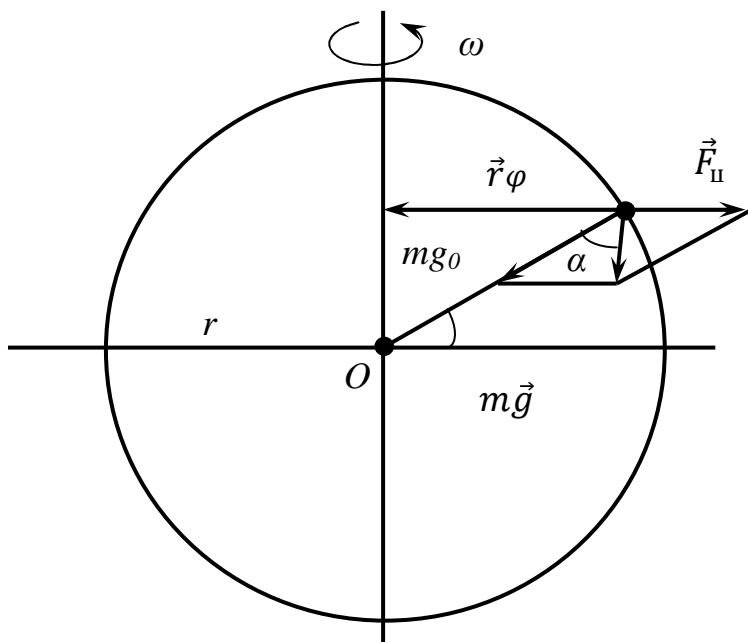


Рис. 5.5

связи с возможным уменьшением ускорения силы тяжести g . Однако в повседневной практике, при $h \ll R_z$, этим изменением можно пренебречь.

Эти количественные соотношения, основанные только на учете силы тяготения при сферической форме Земли, являются приближенными: измерения веса тела на различных географических широтах и в различных точках поверхности Земли дают существенно различные результаты. Это объясняется двумя важными эффектами: суточным вращением Земли и отклонением ее формы от сферической – «сплюснутостью» Земли у полюсов. Рассмотрим кратко учет этих эффектов. Согласно векторной схеме, показанной на рис. 5.5, сила веса $m\vec{g}$ тела, находясь на географической широте θ , определяется векторной суммой «истинной» силы тяготения $m\vec{g}_0$ и инерционной центробежной силы $\vec{F}_ц$, обусловленной суточным вращением Земли:

$$\vec{P} = m\vec{g} = m\vec{g}_0 + m\omega^2 r_\phi \quad (5.30)$$

(ω – угловая скорость вращения Земли, равна $\frac{2\pi}{86164}$ рад/с). В результате вектор \vec{P} образует некоторый угол α с «истинным» вертикальным направлением вектора $m\vec{g}_0$ (к центру Земли). Этот угол, будет равен нулю только на экваторе ($\theta=0$) и на полюсе ($\theta=90^\circ$). Если пренебречь сплюснутостью Земли, то для α имеем выражение:

$$\sin\alpha = \frac{\omega^2 r_\phi}{g} \sin\theta = \frac{1}{2} \frac{\omega^2 r}{g} \sin 2\theta. \quad (5.31)$$

Ввиду малости угла α связь между величинами (g и g_0 можно представить в виде:

$$g = g_0 - \omega^2 r_\phi \cos\theta = g_0 - \omega^2 r \cos\theta. \quad (5.32)$$

Если бы Земля была строго сферической, то различие между величинами g на экваторе и на полюсе должно было составить $g_{\text{пол}} - g_{\text{экв}} = \omega^2 r$ или в относительной мере:

$$\frac{g_{\text{пол}} - g_{\text{экв}}}{g_{\text{пол}}} = \frac{\omega^2 r}{g_0} \approx \frac{1}{290}. \quad (5.33)$$

В результате сплюснутости Земли у полюсов она имеет приблизительно «эллипсоидальную» форму с относительным небольшим сжатием.

Поэтому величины g_0 , вычисленные по данным измерений на полюсе и на экваторе, отличаются примерно на 0,2 %, (на полюсе – $g_0 \approx 983,2$ см/с², на экваторе – $g_0 \approx 981,4$ см/с²). В результате этого зависимость гравитационного потенциала γ от географической широты местности оказывается более сложной, чем следует по формуле (5.32) (см. ниже).

Влияние суточного вращения Земли проявляется в ряде эффектов (отклонения падающих тел к востоку и экватору от направления отвеса, повороте плоскости качения математического маятника и др.), которые могут служить доказательством неинерциальности геоцентрической системы отсчета (см. выше, п. 3.2).

Точные измерения напряжения силы тяготения (гравитационного потенциала) g у поверхности Земли дают ценную информацию для решения задач геодезии, геологии и географии. Вообще говоря, сила тяжести Земли является равнодействующей силы тяготения и инерционной центробежной силы, вызванной суточным вращением Земли (см. выше). Однако максимальный вклад центробежной силы (на экваторе) не превышает 1:290, (см. выше), поэтому во многих случаях можно принять, что ускорение силы тяжести совпадает с гравитационным потенциалом. Оно измеряется с помощью маятниковых приборов (путем измерения периода колебаний математического маятника) или гравиметров (действующих по принципу пружинных весов). Гравиметрические измерения с помощью маятниковых приборов проводятся относительным методом: по измеренной величине T рассматривается величина g в данной точке по формуле:

$$g = g_0 \frac{T_0^2}{T^2}, \quad (5.34)$$

где g_0 и T_0 – величины для какой-то определенной точки, где g_0 измерено с высокой степенью точности (например, в так называемой «потсдамской» системе значение g_0 для Потсдама (под Берлином) принимается значение $g_0 = 981,274 \text{ см/с}^2$. Точность таких относительных измерений – порядка 10^{-3} см/с^2 (единица 1 см/с^2 в гравиметрии обычно именуется «галл»). Проведение абсолютных измерений g представляет значительные технические трудности. Обычно при этом используется наблюдение свободного падения тела, с последующим расчетом по известной формуле $h = \frac{gt^2}{2}$. Измерения с помощью пружинных гравиметров обеспечивают точность до $0,05 \cdot 10^{-3} \text{ см/с}^2$. Столь высокая точность связана с необходимостью фиксации исключительно малых изменений длины пружины (в соответствии изменением веса груза mg), измеряемых долями микрометра. Для этой цели применяются прецизионные оптические и электрические методы измерения смещений. Поскольку точные гравиметры очень чувствительны к внешним условиям, то для обеспечения высокой точности используются схемы компенсации изменений температур и атмосферного давления (с поддержанием температуры с точностью до $0,01^\circ\text{C}$). Чувствительность показаний гравиметра к атмосферному давлению используется для одновременного определения высоты барометрическим методом в гравиметрах-высотомерах. Показания гравиметра постоянно приводятся к некоторому опорному пункту, для которого установлен ноль прибора.

С помощью указанных приборов осуществляется гравитационная съемка – определение распределения гравитационного потенциала на поверхности Земли. Величина g изменяется с высотой ($0,3086 \cdot 10^{-3} \text{ см/с}^2$ на 1 м высоты) и зависит от географической широты местности φ . Нормальный закон распределения $g_n(\varphi)$ рассматривается для идеализированной формы Земли – «земного эллипсоида» с относительным сжатием 1:297 (форма Кассилиса):

$$g_n(\varphi) = 978,049(1 + 0,0052834\sin^2\varphi - 0,0000059\sin^2 2\varphi). \quad (5.35)$$

Отклонения истинной формы Земли от идеализированной вызывает соответственно отклонение измеренной величины g_u от нормальной g_n . Более точным приближением к истинной форме Земли является геоид – «поверхность уровня», которая на океанах совпадает с невозмущенной поверхностью воды, а на континентах представляет собой продолжение этой поверхности. Именно эта фигура принимается за земную поверхность в геодезии, и к ней относят все геодезические (и картографические) измерения. Связь высоты ξ геоида над земным эллипсоидом с аномалиями силы тяжести $\Delta g = g_n - g$, определяется так называемой формулой Стокса:

$$\xi = \frac{1}{4\pi g_n R} \int_{(\sigma)} \Delta g S(\psi) d\sigma, \quad (5.36)$$

где R – радиус Земли, $S(\psi)$ – функция расстояния от полюса ψ .

Интегрирование проводится по всей площади поверхности Земли. Следовательно, для определения высоты геоида в данном месте Земли необходимо знать распределение аномалий Δg по всей ее поверхности. В измерении этого распределения и заключается задача геодезической гравиметрии. В настоящее время это распределение полностью еще не изучено, что создает определенные трудности при практическом применении формулы Стокса для целей практической геодезии. В принципе задание определенным образом ориентированного эллипсоида, высот геоида над эллипсоидом и высот точек земной поверхности над геоидом практически полностью определяют форму Земли, что составляет одну из основных целей геодезических съемок.

Если между точкой наблюдения на некоторой высоте H и поверхностью «уровня» (геоида) нет никаких масс, оказывающих гравитационное воздействие, то изменение ускорения силы тяжести $\frac{\Delta g}{H}$, как уже указывалось выше, равно $(-0,03086 \cdot 10^{-3} \text{ см/с}^2)$ на 1 м высоты (аномалия Фая, или аномалия в свободном воздухе). Если же в земной коре имеются плоские неоднородности с плотностью ρ , то аномалия изменяется и принимает вид:

$$\frac{\Delta g}{H} \approx (-0,3086 + 0,0418\rho) \cdot 10^{-3} \text{ см/с}^2 \quad (5.37)$$

(величина Δg в этом случае называется «аномалией Буге»). Эти аномалии создаются наличием в земной коре пород, отличающихся по плотности от характерных для геологического строения коры в данном районе. Эти породы называют «аномальными массами». Восстановление распределения аномальных масс в земной коре до данным измерений гравитационных аномалий является основной целью «гравитационной разведки», встречающей широкое применение в геологии для целей поиска полезных ископаемых и ценных пород, в частности, для разведки газо- и нефтеносных пластов, установления глубины залегания и размеров рудных залежей – железистых кварцитов, хромитов, сульфидов и т. д.

При изучении геологических процессов в земной коре, наряду с данными гравиметрической разведки, привлекают также исследования периодических и вековых вариаций силы тяжести в данном месте Земли с течением времени. Вековые вариации силы тяжести вызываются геологическими и геофизическими процессами в толще Земли. Их непосредственное исследование сопряжено со значительными трудностями. Периодические изменения силы тяжести, напротив, уже исследуются и учитываются с достаточной точностью. Они связаны с приливными явлениями в упругой (но не абсолютно твердой) оболочке Земли под действием гравитационных полей Солнца и Луны, причем влияние Луны приблизительно в 4-5 сильнее. В течении суток максимальные суммарные вариации ускорения g достигают $0,1-0,15 \cdot 10^{-3} \text{ см/с}^2$. По этим данным, которые необходимо учитывать в современных прецизионных гравиметрических измерениях, можно делать количественные выводы об упругих свойствах Земли. Помимо этих «краткосрочных» вариаций силы тяжести, существуют также «долгопериодические» вариации, вызываемые движением полюсов Земли и вариациями угловой скорости (периода) ее суточного вращения. Эти вариации имеют малую амплитуду и потому количественно исследованы еще недостаточно.

5.3 Элементы небесной механики

Небесная механика рассматривает закономерности движения тел Солнечной системы. Ее законы, сложившиеся исторически, в принципе применимы и к более крупномасштабным объектам Вселенной (см. ниже). В масштабах Космоса материальные тела – звезды, планеты, кометы и др. – можно считать «точками» поскольку расстояния между ними велики по сравнению с размерами тел. Кроме того, основным видом взаимодействия в этих масштабах является гравитационное. Таким образом, задача о движении небесных тел сводится к задаче о гравитационном взаимодействии n тел ($n \geq 2$). Ее точное и полное решение невозможно, и приходится ограничиваться различными приближениями и частными случаями.

Относительно точное решение возможно для «задачи двух тел». В первом приближении такое решение определяет поведение планет в поле тяготения Солнца, Луны в поле Земли и т. д. В этих условиях действие других тел является малым «возмущением» и сводится к некоторым поправкам к решению задач двух тел, которое будет рассмотрено ниже.

Следующим частным случаем является «задача трех тел», которая формально решена Судманом (1912 г.) в виде бесконечных рядов. Для обеспечения удовлетворительной точности приходится брать огромное количество членов ряда, так что решение Судмана не имеет большого практического значения. Но в некоторых случаях решение этой задачи упрощается и решается приближенно численными методами, с использованием современной вычислительной техники.

В настоящее время проблемы небесной механики приобрели особую актуальность в связи с вступлением в эру освоения Космоса, так как на пассивном участке полета законы движения космических летательных аппаратов, в общем, соответствуют законам небесной механики.

Выше, в п. 4.3, была рассмотрена задача о движении в центральносимметричном поле, в котором потенциальная энергия зависит только от расстояния до силового центра r . Частным случаем такого поля является поле тяготения, в котором, согласно изложенному выше, $U = -\frac{\alpha}{r}$, где постоянная $\alpha = \gamma M$ положительна. Скорость небесного тела, например, планеты, в полярной системе координат равна $\mathcal{V} = \sqrt{\mathcal{V}_r^2 + \mathcal{V}_\phi^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2}$, а полная энергия (на единицу массы планеты):

$$E = -\gamma \frac{M}{r} + \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2), \quad (5.38)$$

если масса планеты пренебрежимо мала, по сравнению с массой Солнца, то M – масса Солнца. В более точном решении M – приведенная масса системы. Площадь, описываемая радиус-вектором планеты при ее движении по орбите в единицу времени, называется секторальной скоростью:

$$\sigma = \frac{1}{2} r^2 \dot{\phi}. \quad (5.39)$$

Поскольку, согласно изложенному выше, величина $mr^2\dot{\phi}$ (m – масса планеты) определяет величину момента импульса планеты в поле тяготения Солнца, который при движении в центростремительном поле сохраняется, то и величина σ остается неизменной при движении планеты по орбите ($\sigma = \text{const}$). Это утверждение называется вторым законом Кеплера. Поскольку $r = r(\phi)$ и $\dot{r} = \frac{dr}{d\phi} \dot{\phi}$, то из уравнений (5.38) и (5.39) следует:

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{\sigma^2} \left(\varepsilon + \frac{\gamma M}{r}\right) \quad (5.40)$$

или, вводя новую переменную $\rho = -\frac{1}{r} + \frac{1}{P}$ (ρ – константа, см. ниже):

$$\left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2 + \left(\rho - 1/\rho\right)^2 = \frac{\varepsilon}{2\sigma^2} + \frac{\gamma M}{2\sigma^2} \left(-\rho + \frac{1}{P}\right). \quad (5.41)$$

Если положить $P = \frac{4\sigma^2}{\gamma M}$, то в уравнении (5.41) остаются только квадратичные члены по ρ :

$$\left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2 = \frac{\varepsilon}{2\sigma^2} + \frac{1}{P^2} - \rho^2. \quad (5.42)$$

Величина $\frac{\varepsilon}{2\sigma^2} + \frac{1}{P^2} \geq 0$, т.к. $\left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2 \geq 0$, а $-\rho^2 < 0$. Поэтому можно ввести обозначение:

$$\frac{\varepsilon}{2\sigma^2} + \frac{1}{P^2} \equiv A^2. \quad (5.43)$$

Тогда (5.42) принимает вид:

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = A^2 - \rho^2. \quad (5.44)$$

Причем $A^2 \geq \rho^2$. Подстановка $\frac{\rho}{A} = \cos\theta$ приводит (5.44) к виду:

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \pm 1. \quad (5.45)$$

Его решение имеет вид:

$$\theta = \pm\varphi + \varphi_0, \quad (5.46)$$

где φ_0 – постоянная интегрирования.

Отсюда $\rho = A \cos(\varphi \pm \varphi_0) = A \cos(\varphi + \varphi_0)$ или

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{P} [1 - e \cos(\varphi + \varphi_0)], \quad (5.47)$$

где

$$e = PA. \quad (5.48)$$

Постоянная φ_0 зависит от начала отсчета угла φ поэтому ее можно положить равной нулю. Окончательно решение «кеплеровой задачи» принимает вид:

$$r = \frac{P}{1 - e \cos\varphi}. \quad (5.49)$$

Это означает, что движение планеты или любого другого небесного тела в поле тяготения Солнца происходит по траектории, имеющей форму конического сечения, с параметрами R и эксцентриситетом e . Конкретный тип траектории зависит от запаса полной энергии небесного тела ε . При $\varepsilon < 0$, $e < 1$, и траектория является гиперболической. Утверждение об эллиптическом виде замкнутой орбиты обращения вокруг Солнца называется 1-ым законом Кеплера.

Период обращения по орбите T проще всего определить с помощью формулы (5.39) для секторальной скорости. Согласно известным формулам аналитической геометрии, большая (а) и малая (в) полуоси эллипса (5.49) определяются выражениями ($\varepsilon < 0$):

$$a = \frac{P}{1 - e^2} = \frac{\gamma M}{2|\varepsilon|}, \quad b = \frac{P}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{2\sigma}{\sqrt{2|\varepsilon|}}. \quad (5.50)$$

Поскольку площадь эллипса $S = \pi ab$, то интегрирование формулы (5.39) для σ от нуля до T дает:

$$T = \frac{S}{\sigma} = \pi \gamma M \sqrt{\frac{1}{2|\varepsilon|^3}} = 2\pi a^{3/2} \frac{1}{\sqrt{\gamma M}}. \quad (5.51)$$

Отсюда $T^2 \sim a^3$, т. е. квадрат периода обращения пропорционален кубу линейного размера орбиты; это утверждение составляет 3-й закон Кеплера.

Итак, на основе закона всемирного тяготения Ньютона выводятся 3 закона Кеплера для движения планет – основные законы небесной механики, установленные первоначально на базе астрономических наблюдений: 1) каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце; 2) площадь, покрываемая движущимся радиус-вектором планеты в единицу времени, постоянна; 3) квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших осей их эллиптических орбит.

Однако значение законов Кеплера выходит далеко за пределы описания движения планет солнечной системы. Им подчиняются также «искусственные планеты» - автоматические орбитальные исследовательские станции на околосолнечных орбитах, естественные и искусственные спутники Земли и планет, (В этом, случае в законах Кеплера следует заменить слово «планета» на слово «спутник», а «Солнце» - «планетой»), также кометы – малые небесные тела, движущиеся вокруг Солнца по чрезвычайно вытянутым орбитам, и другие тела – члены Солнечной системы. Эти же законы используются в современной теории космонавтики, элементы которой изложены в п. 5.4.

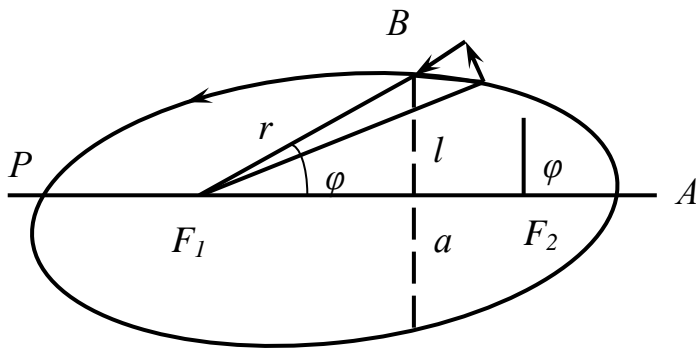


Рис. 5.6

Зная траекторию движения небесного тела в виде (5.49) и второй закон Кеплера ($\sigma = \text{const}$), можно вычислить скорость и ускорение небесного тела в любой точке его орбиты. Для этой цели удобно ввести полярную систему координат (r, φ) так, как показано на рис. 5.6. В этой системе радиальная

и азимутальная составляющие скорости записываются в виде:

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi}, \quad v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}, \quad (5.52)$$

а для ускорения имеем:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad a_\varphi = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}. \quad (5.53)$$

Из постоянства величины $\sigma = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}$ сразу следует, что

$$a_\varphi = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(2\sigma) = 0, \quad (5.54)$$

т. е. ускорение имеет только радиальную составляющую. Далее, из (5.39) следует, что $\varphi = \frac{2\sigma}{r^2}$, а $e \cos \varphi = 1 - \frac{P}{r}$. Дифференцирование (5.49) по времени дает:

$$\dot{r} = (1 - e \cos \varphi) + e r \dot{\varphi} \sin \varphi = 0, \quad (5.55)$$

а повторное дифференцирование:

$$P\ddot{r} + 2\sigma e \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}, \quad (5.56)$$

откуда с учетом приведенных выше соотношений можно получить:

$$\ddot{r} = -\frac{4\sigma^2}{Pr^2} + \frac{4\sigma^2}{r^3} = -\frac{4\sigma^2}{Pr^2} + r\dot{\varphi}^2. \quad (5.57)$$

Отсюда для радиальной составляющей ускорения a_r получается выражение:

$$a_r = -\frac{4\sigma^2}{Pr^2}. \quad (5.58)$$

Из 3-го закона Кеплера следует, что $\sigma = \frac{\pi_{ав}}{T}$, как было показано выше. Так для $P = \frac{v^2}{a}$, то (5.58) принимает вид:

$$a_r = -\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \frac{1}{r^2}. \quad (5.59)$$

Если орбита близка к круговой, то получается обычная формула для центростремительного ускорения при движении по окружности:

$$a_r = -\frac{4\pi r}{T^2}. \quad (5.60)$$

Величина $K = \frac{a^3}{T^2}$ одинакова для всех планет и называется «постоянной Кеплера». Формула (5.59) может быть переписана в виде:

$$a_r = -\frac{4\pi^2 K}{r^2}, \quad K = \frac{\gamma m_c}{4\pi^2}. \quad (5.61)$$

Итак, ускорение небесного тела в Солнечной системе обратно пропорционально квадрату его расстояния от Солнца.

Дифференцируя выражение (5.49) и учитывая 2-й закон Кеплера, для составляющих скорости находим:

$$\mathcal{V}_r = \dot{r} = -\frac{2\sigma}{p} e \sin \varphi, \quad \mathcal{V}_\varphi = r\dot{\varphi} = \frac{2\sigma}{r}. \quad (5.62)$$

Отсюда видно, что при изменении полярного угла φ от 0 до π (см. рис. 5.6) радиальная скорость принимает отрицательное значение (что соответствует приближению планеты к Солнцу) и равна нулю в двух точках: наиболее удаленной от Солнца и называемой афелием ($\varphi=0$) и наиболее близкой к Солнцу и называемой перигелием ($\varphi=\pi$). В то же время величина азимутальной составляющей, не обращается в нуль, принимая максимальное значение в перигелии и минимальное – в афелии. Эти же выводы справедливы для движения комет и других членов Солнечной системы. Кроме того, эти же количественные характеристики справедливы для Луны и спутников, если пренебречь влиянием других небесных тел (характерные точки орбиты Луны, в частности, называются апогеем и перигеем).

Знание законов Кеплера позволяет вычислить элементы орбит планет и других небесных тел, движущихся по эллиптическим траекториям. Форма траектории зависит от полной энергии небесного тела (параметр ε в формуле (5.48)), как было пояснено выше. Если $\varepsilon < 0$, то это означает, что тело «захвачено» полем тяготения и совершает в нем финитное движение по эллипсу. Если $\varepsilon \geq 0$, то тело «освобождается» от поля тяготения, и его движение становится инфинитным (по параболе, если $\varepsilon = 0$, и по гиперболе, если $\varepsilon > 0$). Уравнение сохранения полной механической энергии в поле тяготения может быть представлено в виде:

$$\frac{1}{2} \mathcal{V}_r^2 - \frac{\gamma m_c}{r} + \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}^2 = \varepsilon = const \quad (5.63)$$

или

$$\frac{1}{2} \mathcal{V}_r^2 - \frac{\gamma M_c}{r} + \frac{M}{2m^2 r^2} = \varepsilon = const, \quad (5.64)$$

где m_c – масса силового центра (например, Солнца), m – масса тела, M – момент количества движения тела на орбите. Как было установлено выше, в

афелии А перигелии Р (см. рис. 5.6), $\mathcal{V}_r=0$, и тогда (5.64) после соответствующего преобразования принимает вид:

$$r^2 + \frac{\gamma m_c}{\varepsilon} r - \frac{M}{2m^2\varepsilon} = 0. \quad (5.65)$$

При $\varepsilon < 0$ решение этого квадратного уравнения дает 2 вещественных корня r_p и r_A , которые и определяют расстояния от фокуса эллипса F_1 до перигелия и афелия. Согласно теореме Виета, можно вычислить сумму корней, которая, как видно из рисунка определяет длину большой оси эллипса:

$$r_p + r_A = -\frac{\gamma m_c}{\varepsilon} = 2a. \quad (5.66)$$

Таким образом, большая ось эллипса однозначно определяется полной энергией планеты.

В частности «вырождения» эллиптической траектории в круговую $r_A=r_p=R$, и тогда (5.65) дает: $\varepsilon = -\frac{1}{2}\gamma \frac{m_c}{R}$. Для полной энергии тела имеем:

$$E = -\gamma \frac{Mm_c}{2R} = \frac{1}{2}U. \quad (5.67)$$

Поскольку $E=U=T$, то кинетическая энергия тела T в этом случае равна $T=-E$. Отсюда определяется «круговая скорость» движения тела ($T = \frac{m\mathcal{V}^2}{2}$):

$$\mathcal{V}_k = \sqrt{\gamma \frac{m_c}{R}}. \quad (5.68)$$

Для вычисления второго основного параметра эллиптической орбиты – малой оси эллипса $2b$ (или малой полуоси b), можно воспользоваться значением секториальной скорости тела σ (5.39). Эта величина в точке В равна $1/2 \mathcal{V}_s$.

Для определения скорости в точке В следует воспользоваться законом сохранения энергии при финитном движении ($\varepsilon < 0$) $\frac{m_c}{a}$ и соотношением (5.66) для a . Тогда для скорости \mathcal{V} имеем:

$$\mathcal{V} = \sqrt{-2\varepsilon}. \quad (5.69)$$

Для малой полуоси получается выражение:

$$b = 2\sigma \sqrt{\frac{a}{\gamma m_c}}. \quad (5.70)$$

Для нахождения расстояний r_p и r_A можно выписать решение уравнения (5.65) в явном виде ($\varepsilon < 0$):

$$r_A = -\frac{\gamma m_c}{2\varepsilon} + \sqrt{\left(\frac{\gamma m_c}{2\varepsilon}\right)^2 + \frac{M^2}{2m^2\varepsilon}}, \quad r_p = -\frac{\gamma m_c}{2\varepsilon} - \sqrt{\left(\frac{\gamma m_c}{2\varepsilon}\right)^2 + \frac{M^2}{2m^2\varepsilon}}. \quad (5.71)$$

Согласно известной формуле аналитической геометрии, для фокального параметра p имеем: $p = \frac{b^2}{a}$.

Используя полученные выше формулы, находим:

$$p = \frac{4\sigma^2}{\gamma m_c}. \quad (5.72)$$

Наконец, эксцентриситет эллипса e можно вычислить по формуле:

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{8\varepsilon\sigma^2}{\gamma^2 m_c^2}}. \quad (5.73)$$

Тем самым полностью определены все параметры эллиптической орбиты через полную энергию и секториальную скорость небесного тела.

Все эти результаты естественным образом обобщаются на случай инфинитного движения небесного тела, например, по гиперболической орбите с положительной полной энергией $E > 0$. Соответствующие вычисления приводятся, например, в упомянутой выше книге Д.И. Сивухина.

Все предыдущие формулы содержали массу силового центра m_c и массу тела m , причем предполагалось, что $m \ll m_c$. При более точных расчетах движения спутников планет, двойных звезд и т. д., когда масса движущегося тела сравнима с массой «силового центра», приведенные формулы нуждаются в уточнении. Согласно законам динамики Ньютона, уравнения движений материальных точек с массами m_1 и m_2 взаимодействующих с силой $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, имеют вид:

$$\ddot{\vec{r}}_1 = \frac{\vec{F}_1}{m_1}, \quad \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{\vec{F}_2}{m_2} = -\frac{\vec{F}_1}{m_2}. \quad (5.74)$$

Из этих 2 уравнений следует:

$$(\ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1) = \frac{\vec{F}_2}{m_2} - \frac{\vec{F}_1}{m_1} = \vec{F}_2 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \quad (5.75)$$

или

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_2, \quad (5.76)$$

где $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ – вектор, характеризующий относительное расположение материальных точек, $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ – приведенная масса данной механической системы. Таким образом, введение понятия приведенной массы позволяет вновь свести задачу о взаимодействии тел со сравнимыми массами к задаче, о движении тела с массой μ – в силовом поле \vec{F}_2 . Для системы «планета (m_n) – Солнце (m_c)» приведенная масса

$$\mu = \frac{m_c m_n}{m_c + m_n} = \frac{m_n}{1 + \frac{m_n}{m_c}}. \quad (5.77)$$

Следовательно, в приведенных выше выражениях следует уменьшить массу планеты в $1 + \frac{m_n}{m_c}$ раз или же соответственно увеличить гравитационную постоянную

$$\gamma' = \gamma \left(1 + \frac{m_n}{m_c} \right). \quad (5.78)$$

При этом 1-й и 2-й законы Кеплера остаются в силе, а в выражение 3-го закона следует внести коррекцию. Для этой цели в выражении (5.78) следует заменить постоянную γ на $\gamma \left(1 + \frac{m_n}{m_c} \right)$, и тогда 3-й закон Кеплера примет вид:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\gamma'}{4\pi^2} (m_c + m_n). \quad (5.79)$$

Значение законов небесной механики выходит далеко за пределы «кеплеровой» задачи о движении планет вокруг Солнца. Эти законы применимы для расчетов движения любых небесных тел в поле тяготения не

только естественных, но и искусственных, например, космических кораблей на «пассивном» участке полета (см. ниже, п. 5.4). Кроме того, измеряя периоды обращения спутников планет, звезд, входящих в «двойные» системы, и т. д., можно вычислять массы этих удаленных небесных тел (примеры простейших расчетов этого типа см. выше, в п. 5.1). Эта информация имеет большое значение для современной астрономии, космологии и космогонии (см. п. 5.5). На основе законов Кеплера можно проводить различные расчеты маневров в космосе, например, управляемого перевода искусственных спутников земли на другие орбиты. Рассмотрим задачу такого типа из книги Д.И. Сивухина; другие примеры расчетов из области космонавтики будут приведены в п. 5.5. Пусть требуется перевести спутник с круговой орбиты радиуса R и периодом T_1 на эллиптическую орбиту с новым периодом обращения T_2 , путем кратковременного включения двигателя, что приводит к увеличению линейной орбитальной скорости спутника в α раз. Согласно (5.67), полная энергия спутника по круговой орбите $E_k = -T$, $U = -2T$. После увеличения скорости в α раз кинетическая энергия возрастает пропорционально U^2 , т. е. в α^2 раз, а потенциальная энергия изменится незначительно при кратковременной работе двигателей и малом перемещении спутника за это время. Тогда полная энергия спутника на эллиптической орбите станет равной $E_s = \alpha^2 T + U = (\alpha^2 - 2)T = (2 - \alpha^2)E_k$, и поскольку, согласно формуле (5.66), большая полуось эллиптической орбиты $a > 0$, и необходимо, чтобы $\alpha^2 \ll 2$; при большем увеличении скорости орбита спутника станет параболической, и он «освободится» из поля тяготения Земли. Положение точки апогея спутника (максимальное расстояние от центра Земли) будет равно $R_a = 2a - R = \alpha^2 R / (2 - \alpha^2)$, а период обращения T_2 по новой орбите, согласно 3-му закону Кеплера станет равным

$$T_2 = T_1 / (2 - \alpha^2)^{3/2}.$$

Все изложенные выше результаты относятся к «задаче двух тел». Как уже упоминалось выше, в современной небесной механике необходимость получения точных результатов приводит к задачам n тел, о чем уже упоминалось выше. Значительный прогресс в области вычислительной математики, и техники за последний годы позволил учесть возмущающее действие других небесных тел на движение заданного тела по орбите. В частности, такие расчеты имеют большое прикладное значение для обеспечения рациональных схем космических полетов (подробнее см. п. 5.5).

5.4 Элементы космонавтики

Запуск в Советском Союзе 4 октября 1957 г. первого искусственного спутника Земли (ИСЗ) знаменовал вступление человечества в эру освоения Космоса – околоземного, межпланетного, а в будущем – и межзвездного пространства. Второй великой вехой стал первый полет человека в Космос – этот полет совершил Ю.А. Гагарин 12 апреля 1961 г. на корабле – спутнике «Восток-1». В дальнейшем освоение Космоса велось широким фронтом по многим направлениям: создание длительно функционирующих орбитальных космических станций, запуск автоматических космических летательных аппаратов к Луне и планетам Солнечной системы, высадка людей на Луне (программа «Аполлон», осуществленная в США, привела к появлению первых людей на Луне в июле 1969 г.), посадка автоматических исследовательских станций на поверхность Луны и планет, проведение технологических, физических, биологических и медицинских исследований в Космосе, выход человека в открытый Космос и т. д. В настоящее время в Космосе находятся уже тысячи ИСЗ, функционируют автоматические и пилотируемые космические корабли и орбитальные станции, совершают полет межпланетные космические станции – исследователи далеких планет и т. д.

Эти великие достижения человечества стали возможными благодаря большим достижениям «земных» наук, прежде всего фундаментальной и прикладной физики и ракетной техники. В свою очередь, бурное развитие космических исследований привело к созданию новой науки – космонавтики, изучающей чрезвычайно обширный комплекс проблем, связанный с освоением Космоса. К ним относятся, в частности, проблемы динамики космических полетов, например, расчет оптимальных траекторий движения космических кораблей и ИСЗ, вопросы конструирования космических кораблей с решением проблем защиты от радиации, перегрева и т. д. Существуют проблемы управления полетом и передачи информации телеметрическими системами, медико-биологические проблемы – создание бортовых систем обеспечения жизнедеятельности космонавтов, устранение неблагоприятных последствий воздействия перегрузок и невесомости на организм космонавтов, и целый ряд других проблем. Здесь рассмотрим главным образом вопросы динамики космических полетов и некоторые другие, связанные с применением теории тяготения.

Современная теория космических полетов, основоположником которой является К. Э. Циолковский, использует изложенные выше законы небесной механики и включает теорию управления движением ИСЗ и космических кораблей. На «пассивном» участке (при включенных двигателях) движение космического корабля подчиняется законам небесной механики, основанной на применении закона всемирного тяготения. На «активном» участке двигатели сообщают кораблю нужное ускорение для обеспечения старта, мягкой посадки, перехода с одной орбиты на другую. Необходимость

маневрирования в Космосе обусловлена значительными затратами топлива для ракетных двигателей на активных участках. По этой причине зачастую выбирают довольно сложные траектории с целью использовать гравитационные поля небесных тел (например, при полете на Луну возможность возвращения на Землю без пуска двигателя обеспечивается соответствующим искривлением траектории под действием притяжения к ближайшим планетам). Далее стремятся создать значительные перерывы в работе двигателей ракеты-носителя (например, при полете к Марсу или Венере космический корабль выводится вначале на орбиту ИСЗ и только затем – на расчетную траекторию полета к планете).

Характер траектории космического летательного аппарата на пассивном участке полета определяется конечным значением и направлением вектора скорости, достигнутом на участке. Удобно рассматривать траекторию полета в геоцентрической или гелиоцентрической системе отсчета, в зависимости от его характерного поперечного размера. Вид траектории, находящейся в «сфере действия» Земли, определяется главным образом ее гравитационным полем, а влияние других небесных тел, в частности Солнца, можно учесть как малое возмущение. Сфера действия Земли (по отношению к Солнцу) определяется как область околоземного пространства, в которой выполняется неравенство:

$$\frac{\Delta a_c}{a_3} \ll \frac{\Delta a_3}{a_c}, \quad (5.80)$$

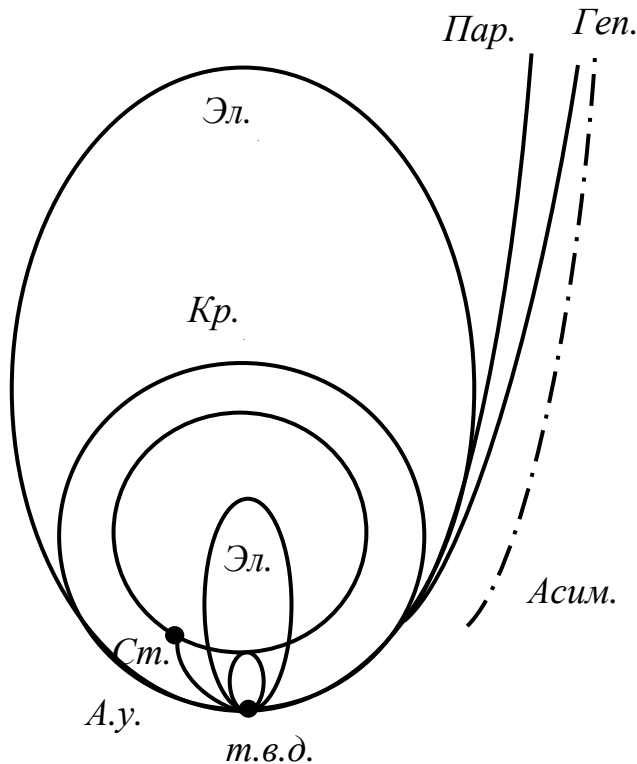


Рис. 5.7

где a_3 – ускорение, сообщаемое небесному телу притяжением Земли, Δa_c – ускорение возмущения со стороны Солнца при рассмотрении движения в геоцентрической системе координат, a_c – ускорение, сообщаемое телу Солнцем, Δa_3 – «возмущающее» ускорение со стороны Земли при рассмотрении движения в гелиоцентрической системе. За пределами сферы действия Земли движение космического тела, т. е. форма его траектории, определяется в основном гравитационным полем Солнца. Радиус сферы действия Земли составляет примерно 930 тыс. км. Аналогичным образом можно ввести сферу действия

Луны по отношению к Земле, для этого заменить в (5.80) индекс С на 3, а индекс 3 на Л. Радиус этой сферы составляет 66 тыс. км.

Траектория космического тела, рассматриваемая в соответствующей сфере действия, представляет собой коническое сечение того или иного типа, в зависимости от величины скорости тела относительно центра соответствующей сферы действия (Земли или Солнца). Этот вопрос был подробно рассмотрен выше. Поэтому тип траектории космического корабля определяется конечным значением скорости в точке выключения двигателей, как показано на рис. 5.7 (для случая геоцентрической системы отсчета). При малых начальных скоростях тело, запущенное в точке старта (Ст), упадет обратно на Землю по кривой, являющейся частью эллиптической траектории (показана пунктиром). По этому эллипсу двигалось бы тело, если бы Земля была материальной точкой с массой, сосредоточенной в ее центре (причем точка выключения двигателей – т.в.д. была бы «апогеем» орбиты, а центр Земли – одним из фокусов эллипса. При уменьшении скорости ниже 1 км/с эллипс, показанный пунктиром, становится все более узким, вытянутым, т. е. примыкающие к т.в.д. часть траектории приближается к параболической. Это соответствует известному факту, что тело, брошенное под углом к горизонту с малой скоростью при пренебрежимой малости сил сопротивления воздуха движется по параболической траектории. Однако не следует забывать, что эта траектория на самом деле – участок эллипса, в отличие от «истинно параболической» траектории при больших скоростях, рассматриваемой ниже.

С увеличением скорости в т.в.д. траектория представляет собой все менее вытянутый эллипс, и, наконец, при некоторой критической скорости (иногда ее называют «минимальной эллиптической») тело совершает замкнутое круговое движение, т. е. уже не падает обратно на Землю. Вблизи поверхности Земли (т. е. на высотах малых по сравнению с радиусом Земли R_3 , что практически всегда имеет место в современной космонавтике), эта «первая космическая» скорость определяется из условия равенства центростремительной силы и силы притяжения к Земле:

$$\frac{mv_1^2}{R_3} = \gamma \frac{mM_3}{R_3^2}, \quad (5.81)$$

откуда:

$$v_1 = \sqrt{\gamma \frac{M_3}{R_3}} = \sqrt{gR_3}. \quad (5.82)$$

Подстановка значений дает $v_1 \approx 7,9$ км/с. Разумеется, эта же формула в принципе справедлива и для старта с других планет. Однако следует учитывать, что в земных условиях влиянием сопротивления воздуха уже на сравнительно небольших высотах можно пренебречь. На планетах гигантах (Юпитере, Сатурне) имеется чрезвычайно плотная атмосфера, и на них условия старта исследовательских космических кораблей практически могут оказаться иными.

При дальнейшем увеличении $V > V_1$ (скорости в точке выключения двигателей) траектория корабля приобретает форму все более вытянутого эллипса. При некотором критическом значении скорости полная механическая энергия корабля

$$E = T + U = \frac{mV^2}{2} - \gamma \frac{M_3 m}{R_3} \quad (5.83)$$

(по-прежнему полагаем $h \ll R_3$) становится равной нулю. Согласно изложенному выше, в п. 5.3, соответствующая скорость (иногда называемая «параболической») является «пограничной» между ограниченным (финитным) и неограниченным (инфинитным) движением тела в силовом поле: его траектория становится незамкнутой – параболической. При отсутствии значительного искривления тела под действием гравитационного поля других небесных тел тело, с такой скоростью, называемой «второй космической», удалилось бы по параболической траектории от Земли в бесконечность. При еще больших скоростях тело удаляется от Земли по гиперболе с некоторой асимптотой (а.2 на рис. 5.7). Из формулы (5.81) следует, что вторая космическая скорость равна

$$V_2 = \sqrt{2\gamma \frac{m_3}{M_3}} = \sqrt{2gR_3} = V_1 \sqrt{2},$$

т. е. в 1,4 раза больше 1-й космической скорости и составляет приблизительно 11,2 км/с.

Вне сферы действия Земли космический корабль находится главным образом под действием гравитационного поля Солнца, и его движение следует рассматривать в гелиоцентрической системе отсчета. Такое рассмотрение можно провести совершенно аналогично изложенному выше. Начальная скорость космического корабля, запущенного к Земле, определяется результатом векторного сложения геоцентрической скорости корабля со скоростью орбитального движения Земли ($V_0 \approx 29,9$ км/с), которая представляет собой круговую («первую космическую») гелиоцентрическую скорость на расстоянии Земли от Солнца (≈ 150 млн. км). Параболическая гелиоцентрическая скорость на этом же расстоянии равна примерно 42,1 км/с (это – «вторая космическая скорость» в гелиоцентрической системе). Таким образом, для того, чтобы космический корабль, запущенный с Земли в направлении ее движения по околосолнечной орбите, навсегда покинул Солнечную систему, двигаясь по параболе в гелиоцентрической системе отсчета, он должен был бы иметь скорость в этом направлении около 12,2 км/с при отсутствии земного притяжения. Учет этого притяжения дает для указанной скорости, называемой «третьей космической», величину около 16,5 км/с. Если же космический корабль был бы запущен в направлении, противоположном вращению Земли вокруг Солнца, то 3-я космическая скорость, как показывает расчет, составляет примерно 72,7 км/с. Таким образом, в различных условиях старта космических кораблей будущего, направляющихся к далеким звездам, стартовая скорость будет составлять от 16,5 до 72,7 км/с.

Для осуществления полета к Луне корабль должен иметь минимальную геоцентрическую скорость (вблизи поверхности Земли), приблизительно на 1% меньшую указанной выше второй космической скорости. При этом полет протекает по очень вытянутому эллипсу с $e \approx 1$, и длительность перелета составляет около 5 суток. Если же увеличить скорость до величины второй космической скорости, то время полета резко уменьшится (примерно 2 суток). Соответственно, для достижения планет Солнечной системы необходимо минимальные геоцентрические скорости, превышающие вторую космическую скорость. Следует учесть, что увеличение скорости ракеты сопровождается значительным увеличением расхода ракетного топлива, а это означает неизбежное уменьшение полезного веса космического корабля. Поэтому выбор оптимальной траектории полета весьма важен, особенно при межпланетных перелетах. Оптимальные перелеты с минимальными скоростями имеют вид эллипсов, касательных к орбитам Земли и соответствующей планеты, как показано на рис. 5.8. Эти энергетически

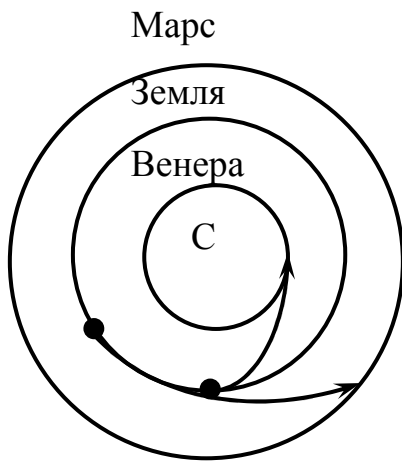


Рис. 5.8

выгодные траектории могут быть реализованы

лишь в подходящие периоды времени (имеющие место не в каждом году). Если же запуск осуществляется не в оптимальный момент времени, то угол между вектором стартовой скорости и касательной к орбите Земли существенно возрастает, что приводит к росту минимальных необходимых скоростей (для начальных скоростей) и резкому увеличению расхода топлива. На участке свободного («пассивного») полета все тела, участвующие в полете космического корабля, (а также космонавты) находятся в состоянии невесомости, при котором они оказывают давления друг на друга и на корпус корабля. Такое состояние возникает, вообще говоря, всегда, если на механическую систему действуют только массовые силы (силы тяготения), причем поле этих сил однородно (всем телам сообщаются одинаковые ускорения), и начальное движение тела является поступательным (вращение корабля создает силы инерции и «весомость» тел). В условиях невесомости на первый план выступают физические явления, в обычных условиях «весомости» играющие второстепенную роль из-за «маскирующего» действия силы тяжести. Например, эффекты смачивания обычно приводят к искривлению свободной поверхности жидкости только непосредственно вблизи стенок сосуда, содержащего жидкости; основная часть поверхности под действием сил тяжести становится горизонтальной. В условиях невесомости смачивающая жидкость беспрепятственно «расползается» по стенкам сосуда, а несмачивающая жидкость не удерживается в сосуде и самопроизвольно принимает сферическую форму. Отсутствие «весомости» отражается на характере

теплообмена между телами. Например, в обычных земных условиях редко наблюдается значительный перегрев тех или иных тел, поскольку в атмосфере всегда имеются конвекционные потоки воздуха, выравнивающие температуры тел. В условиях невесомости эти потоки отсутствуют, потому нагретое тело окружается слоем нагретого воздуха, который не рассасывается, что может привести к перегреву при отсутствии принудительной вентиляции. Условия невесомости могут существенно отразиться и на работе различных приборов и устройств; например, очевидно, что часы с маятником и гирями вообще работать не будут. Состояние невесомости может заметно повлиять и на физиологические функции и общий жизненный тонус космонавта; в частности, весьма чувствителен к этому состоянию вестибулярный аппарат, управляющий «ощущением равновесия» у человека (в результате длительной эволюции человека в земных условиях). В условиях невесомости при отсутствии длительной предварительной тренировки у космонавта может возникнуть расстройство вестибулярного аппарата, сопровождаемое целым рядом неприятных последствий. Помимо специальной тренировки, при длительных полетах человека в Космосе (на орбитальных станциях и межпланетных кораблях) предусматривается создание искусственной силы тяжести путем вращения корабля.

Рассмотрим теперь активные участки полета управляемого космического корабля, на котором работают реактивные двигатели, создающие тягу и сообщаящие кораблю соответствующее ускорение. Это осуществляется при старте корабля, мягкой посадке космического летательного аппарата в заданном районе планеты, а также при маневрировании в космосе с целью обеспечения оптимальной траектории полета.

Управление полетом осуществляется с Земли по специальной программе, рассчитанной с учетом требований минимального расхода топлива, сокращения продолжительности полета, возможности точной стыковки двух или более космических кораблей.

При этом большую роль играет проблема «обратной связи» с космическим кораблем, т. е. получение от него информации и ее обработка с целью внесения коррекции в курс корабля для обеспечения оптимизации траектории, а также и часто в научных целях. Таким образом, возникает сложная задача поддержания устойчивой связи с космическим кораблем на огромных расстояниях – сотни миллионов и миллиарды километров. В настоящее время эти проблемы решаются преимущественно радиотехническими средствами, однако большие перспективы открывает внедрение новых методов связи, в особенности оптической связи с помощью оптических квантовых генераторов (лазеров).

Расчет необходимых средств осуществления космических маневров производится на основе изложенных выше законов небесной механики. Так, выше в качестве иллюстративного примера, уже приведен расчет,

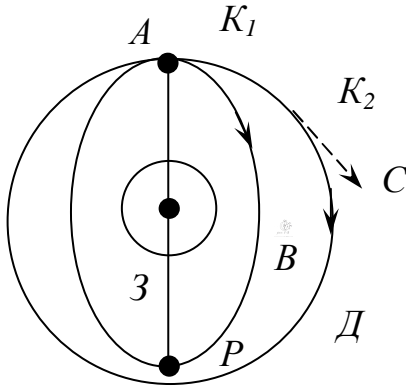


Рис. 5.9

показывающий, на основе законов Кеплера, что для перехода космического корабля – спутника с более «медленной» орбиты (с большим периодом обращения вокруг Земли) на более «быструю» (с меньшим периодом) необходимо затормозить корабль. При этом высота перигея уменьшается, а скорость в перигее возрастает, что и приводит к требуемому эффекту. Этот маневр можно применить и при необходимости стыковки двух космических кораблей на одной орбите Д; это иллюстрирует рис. 5.9, взятым из книги Л.В. Маковецкого (указанной в списке

литературы в конце книги). Пусть необходимо выполнить стыковку 2-х кораблей К1 и К2, выведенных на одну круговую орбиту, причем корабль К1 запущен позже и отстает от корабля К2. Для того, чтобы догнать корабль К2 необходимо с помощью двигателя затормозить движение корабля К1, например в точке А, которая будет апогеем для новой орбиты В, на которую перейдет корабль в результате маневра. Перигей новой орбиты Р будет ближе к Земле, чем орбита Д, и скорость в нем будет больше, а потому и весь период обращения по орбите Р будет меньше, чем по орбите Д. Расчет новой орбиты В производится так, чтобы период обращения по ней был меньше на время, на которое корабль К1, отстает от корабля К2. Аналогичного эффекта можно достигнуть и путем увеличения скорости корабля К2, который при этом перейдет на орбиту С с большим периодом обращения вокруг Земли. Такой способ осуществления стыковки является самым экономичным с точки зрения расхода топлива. Однако при необходимости (например, в аварийной ситуации) можно достигнуть нужного эффекта и путем ускорения корабля К1. При этом корабль будет иметь тенденцию перейти на более «высокую» орбиту. Однако этого можно избежать, если применить ракетные двигатели, создающие тягу в направлении к Земле, компенсирующую центробежную силу инерции $m\omega^2 r$ на орбите. Тогда, естественно, можно увеличить скорость движения при сохранении прежней орбиты (Д) и таким путем догнать корабль К2. Однако такой маневр связан с очень большим увеличением расхода топлива, т. е. возрастанием «бесполезной» массы корабля. Некоторые другие маневры, связанные с изменением орбиты космического летательного аппарата, уже упоминались выше.

Активный участок космического полета обычно составляет сравнительно небольшую часть всей его траектории. Однако условия на этом участке существенно отличаются от имеющих место на «пассивном участке», что приводит к возникновению ряда сложных специфических проблем: сообщению кораблю с экипажем на борту значительных ускорений, к созданию значительных перегрузок для космонавтов. Грубая оценка величины этих перегрузок может быть получена с помощью простой формулы:

$$\delta = \frac{P-P_0}{P_0} = \frac{ma}{mg} = \frac{a}{g} = \frac{1}{g} \frac{\Delta V}{\Delta \tau} = \frac{\alpha V_1}{g \Delta \tau}, \quad (5.84)$$

где P_0 – вес космонавта на Земле, P – нагрузка на космонавта на активном участке полета (эта нагрузка может быть измерена с помощью пружинных весов), a – ускорение, ΔV – приращение скорости ΔV за время $\Delta \tau$, выраженное в долях первой космической скорости. Даже при $\alpha=0,03$ и $\Delta \tau=4$ с оценка дает $\delta \approx \frac{903 \cdot 8000}{10 \cdot 4} \approx 6$. Поэтому приходится принимать, специальные меры для защиты космонавтов от перегрузок и ограничения их безопасными пределами. На активном участке могут возникнуть большие вибрации корпуса корабля и шум от работающих двигателей. Эти явления также могут отрицательно сказаться на здоровье и самочувствии экипажа космического корабля.

Особые проблемы возникают при взлете и посадке космических летательных аппаратов на небесных телах, имеющих плотную атмосферу, к которым относится и Земля. Ускорение аппарата при взлете и торможение в атмосфере при возвращении аппарата на Землю вызывают сильный нагрев обшивки корабля. При этом перегрузки космонавтов еще больше возрастают, а температура наружной поверхности может превышать 1000 К. Перегрузки необходимо регулировать с помощью специальных двигателей, а эффект нагрева – ослаблять с помощью теплообменных систем (кроме того, необходимо использование особых конструкционных материалов).

Как уже упоминалось выше, основной проблемой при осуществлении космических полетов является создание больших скоростей космических летательных аппаратов. При типичных современных скоростях осуществление дальних перелетов (например, к большим планетам Солнечной системы и за ее пределы) требует многих лет и даже десятилетий. Согласно изложенному выше (гл. 3), формула Циолковского ($V = c \ln \frac{M_0}{M}$) показывает, что максимальная скорость движения ракеты определяется достижимой скоростью истечения продуктов сгорания топлива из сопла ракеты и минимальной «полезной массой» ракеты без топлива M . При реалистичных величинах отношения $\frac{M_0}{M}$ современные скорости истечения газов из ракетного двигателя (для РДТТ – до 2,5 км/с, для ЖРД – до 3,5 км/с, в зависимости от используемого твердого или жидкого химического топлива – см. гл. 10) недостаточны для достижения требуемых космических скоростей, при которых продолжительность полета будет реальной. Одним из путей улучшения этой ситуации является применение многоступенчатых (составных ракет, также предложенных впервые К. Э. Циолковским. Такие ракеты содержат несколько ступеней, каждая из которых используется для разгона всей остальной массы (др. ступеней и самого корабля) и после «выгорания» топлива отбрасывается другим перспективным направлением обеспечения возможности дальних космических перелетов, использование реактивных двигателей на иных, «нехимических» видах топлива. В

частности, в двигателях на ядерном горючем могут быть достигнуты скорости истечения в несколько десятков км/с, в ионных или плазменных двигателях (ЭРД) – более 100 км/с. Эти возможности будут более подробно рассмотрены при изучении вопросов термодинамики реактивных двигателей в гл. 10. Особенностью электрореактивных двигателей является сравнительно малая величина силы реактивной тяги, поэтому космические корабли с такими двигателями будут стартовать с промежуточных космических станций на околоземных орбитах. Современные большие ракеты-носители для космических кораблей имеют стартовую массу до 3000 т и длину свыше 100 м, причем запасы топлива занимают до 90% от общей массы, количество ступеней – обычно от 2 до 4. Мощности двигательных установок таких ракет-носителей составляют десятки миллионов кВт; обычно установка состоит из нескольких двигателей, работа которых синхронизируется с помощью управляющей системы.

Значение достижений космонавтики для человечества весьма велико. Научные исследования, проводимые на ИСЗ и автоматических межпланетных станциях, дают огромную информацию, которую невозможно получить с Земли из-за влияния атмосферы, ее электрического и магнитного полей и т. д. Это в недалеком будущем должно привести к фундаментальным научным открытиям, которые дадут возможность проникнуть в неисследованные до сих пор глубины материи. Однако многие типы космических летательных аппаратов уже дают прямую пользу для народного хозяйства. Так, спутники связи, на которых функционируют ретрансляционные пункты, находясь на больших высотах, способны передавать сообщения на расстояния в тысячи километров, при хорошем качестве сигнала. Они используются для транслирования радиовещательных и телевизионных программ и осуществления телефонной и телеграфной связи. ИСЗ дают обширную метеорологическую информацию о глобальных процессах, протекающих в земной атмосфере, что имеет огромное значение для службы погоды (следует отметить, что наземные пункты службы погоды охватывают всего лишь около 15% всей площади поверхности Земли, что существенно сказывается на точности особенно краткосрочных прогнозов погоды). Специальные ИСЗ с точно определенными стабильными орбитами используются в морской и авиационной службе навигации для уточнения координат самолетов и кораблей. Детальная информация о состоянии поверхности Земли, предоставляемая ИСЗ, имеет чрезвычайно большие значения для океанологии и гидрологии, геодезии и топографии, а также для изучения биологических процессов в растительном мире, контроля сельскохозяйственных работ, обнаружения лесных пожаров и т. д. Особое значение имеют космические исследования в области технологий ряда производственных процессов. Специфические условия космического полета, (невесомость, наличие сверхвысокого вакуума, воздействие радиации) позволяет усовершенствовать ряд технологических процессов обработки материалов, которые в будущем будет рационально осуществлять только на

космических станциях – «заводах» и «цехах», с периодическим доставлением на них сырья и оборудования. В настоящее время уже существуют долговременные пилотируемые космические комплексы (например, советская станция «Салют», на которой уже поставлен рекорд продолжительности работы экипажа без смены. Кроме того, в околоземном пространстве находится большое число – несколько тысяч – специализированных ИСЗ (астрономических, метеорологических, геодезических и т.д.). В дальнейшем роль космических исследований должна стать определяющей в обеспечении наилучших условий существования высокоразвитой земной цивилизации, о чем мечтал основоположник космонавтики К. Э. Циолковский.

5.5 Понятие об общей теории относительности

Согласно изложенному выше, в большинстве практических приложений в «околоземных» условиях теория тяготения Ньютона является вполне достаточной и обеспечивает необходимую для расчетов точность, в частности, в области космонавтики. Однако с принципиальной стороны «классическая» теория Ньютона не согласуется с положениями релятивистской механики (теории относительности Эйнштейна), что проявляется в некоторых уже исследованных в настоящее время эффектах (см. ниже).

«Классическая» механика и теория тяготения относятся к объектам, движущимся с малыми (по сравнению со скоростью света) скоростями. Это означает, что в рамках «классической» теории скорость распространения любых взаимодействий считается бесконечно большой. Это вполне четко проявляется уже в выражении второго закона Ньютона: $a = F/m$. Эта формула означает, что тело, помещенное в силовое поле и испытывающее действие силы F , «мгновенно» приобретает ускорение a . Изменение силы должно привести к «мгновенной» реакции тела, т. е. изменению его ускорения. Применительно к гравитационному полю второй закон Ньютона (закон всемирного тяготения) означает, что при изменении положения тела с массой m_2 (расстояния r) относительно тела с массой m_1 сила взаимодействия должна измениться мгновенно. На расстояниях «земных» масштабов это допущение не может привести к серьезным ошибкам: например, передача сигнала на расстояние порядка 13 тыс. км (диаметра земного шара) со скоростью света (например, радиосигнала точного времени) занимает время $\approx 0,04$ с, и им вполне можно пренебречь во многих случаях, в особенности в обыденной жизни.

Однако при переходе к космическим масштабам конечная скорость распространения любых взаимодействий и сигналов, максимальная величина которой равна $3 \cdot 10^5$ км/с (в вакууме), согласно теории относительности начинает проявляться все более заметно. Так, например, восход и заход Солнца на Земле наблюдаются с временной задержкой порядка

$$\frac{150 \cdot 10^2 \text{ км}}{3 \cdot 10^5 \text{ км/с}} = 500 \text{ с} \approx 8 \text{ мин}, \text{ что является уже вполне заметной величиной.}$$

Поэтому при рассмотрении процессов в галактических масштабах, в частности, эволюции галактик и вселенной в целом, закон тяготения Ньютона, в котором «заложена» бесконечно большая скорость гравитационного взаимодействия, оказывается, естественно, неудовлетворительным.

Более общий подход к проблеме тяготения был осуществлен Эйнштейном в рамках общей теории относительности (1916 г.). Поскольку эта теория является неотъемлемой частью всей релятивистской теории и органически связана со «специальной» теорией относительности, которая рассматривается подробно в т. III курса, то здесь мы обратим внимание лишь на самые общие понятия релятивистской теории тяготения.

Основные идеи этой теории могут быть поняты на основе «принципа эквивалентности», который устанавливает глубокую аналогию между движением тел в гравитационном поле и в неинерциальной системе отсчета (при отсутствии внешних сил). При сообщении некоторой системе ускорения \vec{a} (относительно «инерциальной» системы отсчета) на все тела в этой системе действует сила инерции $\vec{F} = m\vec{a}$, пропорциональная массе тела («массовая» сила). В гравитационном поле на все тела действует сила $\vec{F} = m\vec{g}$, также носящая «массовый» характер в указанном смысле. Ускорения всех тел, независимо от их масс, в обоих случаях одинаковы. Таким образом, движение тел в гравитационном поле обладает аналогией с движением в неинерциальных системах отсчета, в чем и заключается сущность «принципа эквивалентности»: оба вида движения принципиально неразличимы. Все явления, протекающие в системе отсчета, связанной с телом, свободно движущимся в гравитационном поле, происходят так, как будто это поле отсутствует (типичным примером является состояние невесомости в космическом корабле, см. выше). Однако такая эквивалентность носит локальный, приближенный характер. Действительно, истинное гравитационное поле нельзя исключить никаким выбором системы отсчета. Оно существует и в инерциальных системах отсчета. Это сразу видно из различного поведения инерционных и гравитационных сил при удалении от «силового центра». Действительно, инерционная центробежная сила во вращающейся системе отсчета $F_{\text{ц}} = m\omega^2 r$ неограниченно возрастает с увеличением расстояния r от их оси вращения; в то же время «истинное» гравитационное поле ($F_{\text{г}} = \gamma \frac{mM}{r^2}$ в теории тяготения Ньютона) на бесконечном удалении всегда обращается в нуль.

Эквивалентность гравитационного поля и неинерциальности системы отсчета (понимаемая в указанном выше смысле) означает, что и математическое описание физических явлений в обоих случаях должно быть аналогичным. На этой основе А. Эйнштейн в 1916 г. построил теорию всемирного тяготения как «общую теорию относительности» (т. е.

обобщение «специальной» теории относительности, разработанной им для инерционных систем отсчета и рассматриваемой подробнее в т. III курса). Математический аппарат этой общей теории тяготения весьма сложен и далеко выходит за рамки данной книги. Уравнение Эйнштейна связывают геометрические свойства пространства и времени («4-мерного пространства») с распределением материальных тел – масс – в пространстве. Движение тела в гравитационном поле по-прежнему описывается на основе принципа наименьшего действия, канонических уравнений и уравнения Гамильтона-Якоби, как и в классической («нерелятивистской») механике. Однако вид этих уравнений, разумеется, существенно иной. В предельном случае слабого гравитационного поля и малых скоростей движения тел уравнения общей теории относительности дают закон тяготения Ньютона и обычные уравнения классической динамики.

Экспериментальная проверка теории тяготения Эйнштейна представляет значительные трудности ввиду малости отклонений ее предсказаний от результатов теории Ньютона даже в масштабах нашей Солнечной системы. Однако в настоящее время эта проверка уже возможна благодаря появлению чрезвычайно тонких методов физического исследования (например, основанных на эффекте Мёссбауэра, см. т. III) и совершенствованию методов наблюдательной астрономии. Прежде всего, необходимо было проверить факт независимости ускорения тел в гравитационном поле от их физических свойств. К настоящему времени достоверность этого факта установлена с точностью порядка 10^{-10} . Далее согласно теории Эйнштейна, должно существовать «вековое смещение» орбит небесных тел – поворот эллиптической орбиты, по которой движется тело согласно закону Ньютона (например, планета вокруг Солнца), на некоторый угол, который за время одного периода обращения тела равен

$$\Delta\theta = 6\pi m/c^2 a(1 - e^2), \quad (5.85)$$

где a – большая полуось, e – эксцентриситет орбиты, m – масса «силового центра» Солнца. Эта величина для всех планет Солнечной системы, кроме Меркурия, очень мала и лежит на пределе возможностей астрономических измерений из-за большой величины a , т. е. расстояния от планет до Солнца. Для Меркурия, обладающего наименьшей величиной a расчетная величина $\Delta\theta$ равна $43,03''$ за столетие и может быть легко обнаружена и точно измерена (наблюдения дали $\Delta\theta = 42,56'' \pm 0,94''$, т. е. полное согласие с общей теорией относительности). Для Земли эффект меньше приблизительно в 11 раз, однако все же поддается измерению, результат которого также согласуется с теорией.

Еще одно следствие общей теории относительности – заключается в отклонении луча света от прямолинейного пути при прохождении мимо источника гравитационного поля на расстоянии ρ от его центра на угол

$$\Delta\psi = 4\pi m/c^2 \rho. \quad (5.86)$$

Этот эффект должен наблюдаться и согласно теории тяготения Ньютона, однако величина отклонения получается существенно иной. Так,

для луча света, прошедшего мимо края Солнца, $\Delta\psi$ составляет $1,75''$ согласно теории Эйнштейна и $0,64''$ по теории Ньютона. Измерение обнаружило полное согласие с первой из этих теорий. Наконец, в гравитационном поле должно иметь место изменение частоты излучения ω под влиянием гравитационного потенциала:

$$\Delta\omega = \frac{\omega}{c^2} \Delta\varphi \quad (5.87)$$

(где $\varphi = -\gamma \frac{M}{r}$ в теории Ньютона). Этот эффект должен проявляться в красном, (т. е. «длинноволновом») смещении спектральных линий, наблюдаемого с Земли излучения от источника сильного гравитационного поля. Наиболее удобно проверять существование этого эффекта путем исследования излучения «белых карликов» – звезд с большим гравитационным потенциалом $\varphi = -\gamma \frac{M}{r}$ на их поверхности (из-за больших M и их малых радиусов r) и большой интенсивностью излучения (см. ниже). Такие наблюдения были проведены и полностью подтвердили предсказания общей теории относительности.

Как уже указывалось выше, роль сил тяготения возрастает с увеличением масштаба рассматриваемой области Вселенной. Для всех количественных расчетов в масштабах Солнечной системы теория тяготения Ньютона оказывается вполне достаточной. Это обстоятельство объясняется тем, что «гравитационный радиус» небесных тел (см. ниже, формула (5.88)), обычно ничтожно мал по сравнению с их истинными размерами. По мере роста объема рассматриваемой части вселенной ее масса возрастает примерно пропорционально кубу радиуса, и гравитационный радиус становится сравнимым с размерами этой области. В этих условиях для описания гравитационных эффектов следует пользоваться общей теорией относительности. В этом заключается ведущая роль этой теории в современной космологии, рассматривающей проблемы строения и эволюции Вселенной в целом и ее геометрических свойств пространства-времени.

Основным постулатом является возможность распространения открытых в «земных» условиях физических законов на огромные космические области пространства и даже на всю Вселенную в целом. При этом на различных этапах космологии предлагались разные модели строения и эволюции Вселенной, которые впоследствии вступали в противоречие с новыми данными астрономических наблюдений. В настоящее время наиболее непротиворечивой и плодотворной в научном отношении является модель «однородной изотропной нестационарной» Вселенной, математически разработанная на основе теории тяготения Эйнштейна.

Наряду с теорией тяготения, все большую роль в космологии теперь играют представления термодинамики и физики элементарных частиц, позволяющие объяснить физическое состояние материи во Вселенной в настоящее время и его эволюцию с момента «начала» Вселенной (теория «горячей Вселенной»).

Указанная модель Вселенной основана на представлении о равноправности всех точек, и направлений во Вселенной (в смысле распределения масс). Согласно уравнениям теории тяготения Эйнштейна, при этом возможны «открытая» модель, в которой кривизна пространства отрицательна или равна нулю, т.е. пространство бесконечно, и «замкнутая» модель, в которой кривизна пространства положительна, и пространство конечно (но, разумеется, безгранично, как и в «открытой» модели). Эволюция Вселенной в обеих моделях начинается с начального «сверхплотного» (с бесконечной плотностью) горячего спуска материи с последующим расширением «взрывного» характера. Однако в «открытой» модели Вселенная со временем должна неограниченно расширяться, а в «замкнутой» модели расширение неизбежно должно смениться сжатием. Предположение о высокой начальной температуре Вселенной (постулат «горячей» Вселенной) означает, что упомянутый выше сгусток «праматерии» мог состоять лишь из нескольких сортов элементарных частиц (фотонов и др., см. т. III). Ввиду «взрывного» характера расширения Вселенной это начальное состояние с очень высокой температурой и плотностью могло существовать лишь весьма непродолжительное время при $\tau \approx 0,01$ с. плотность материи уже должна упасть от бесконечности до 10^{14} кг/м³. В дальнейшем начинается формирование «тяжелых» элементарных частиц (нуклонов) и атомных ядер (водорода и гелия), а первичные фотоны, оставшиеся от начального спуска материи, ввиду слабого взаимодействия с веществом должны оставаться и в настоящее время, образуя «реликтовое» («ископаемое») излучение. Все эти выводы, сделанные главным образом на основе общей теории относительности, допускают наблюдательную проверку.

В настоящее время основной вывод – о нестационарности Вселенной подтвержден астрономическими наблюдениями. Установлено, что наблюдаемая нами область Вселенной с размерами порядка нескольких миллиардов парсек (1 парсек = $30,8 \cdot 10^{12}$ км) расширяется уже по меньшей мере несколько миллиардов лет (объекты на удалении 10^9 пс наблюдаются такими, какими они были примерно $3 \cdot 10^9$ лет назад). Этот факт был установлен по «красному» (длинноволновому) смещению линий излучения от всех далеких звездных систем (квазаров, галактик), которое является одним из проявлений эффекта Допплера (см. т. III курса). Это смещение линейно возрастает с расстоянием ($V \frac{dR}{dt} = HR$ закон Хаббла), где $\frac{dR}{dt}$ – скорость изменения расстояния R между космическими объектами, H – постоянная Хаббла ($H \approx 53 \frac{\text{км}}{\text{с}} / \text{Мпс}$). Наличие этого эффекта свидетельствует о расширении всей наблюдаемой нами области Вселенной, причем величина, обратная постоянной Хаббла $-T = H^{-1} \approx 18 \cdot 10^9$ лет – дает оценку продолжительности этого расширения, т. е. возраста Вселенной. Наличие второго важного постулата – существование реликтового излучения – также было подтверждено данными радиоастрономии в 1965 г., и свойства этого

излучения оказались близкими к предсказанным теорией. Кроме того, распределение реликтового излучения, проходящего на Землю по разным направлениям, оказалось в высокой степени изотропным, что согласуется с моделью однородной и изотропной Вселенной. Наряду с этим, в современной космологии существуют и нерешенные проблемы. К их числу относится, например, вопрос выбора между упомянутыми выше «открытой» и «замкнутой» моделями Вселенной, что существенно, например, для определения возраста Вселенной и установления хода ее дальнейшей «истории». Решение этого вопроса зависит от возможности точного определения усредненной плотности материи во Вселенной. Критическая плотность, при которой ожидается «смена» этих моделей, составляет примерно $6 \cdot 10^{-30}$ кг/см³, а фактическая плотность Вселенной может быть установлена астрономическими наблюдениями лишь с низкой степенью точности ($10^{-31} < \rho < 10^{-29}$ г/см³) из-за наличия темного (несветящегося) вещества и элементарных частиц во Вселенной. Указанная выше оценка возраста Вселенной также является весьма приближенной (Т может быть увеличена до нескольких десятков млрд. лет). Существует и еще ряд нерешенных проблем в современной космологии, однако общая теория относительности по-прежнему остается ее наиболее надежной на сегодня теоретической основой.

Исключительно велика роль теории тяготения в современной космогонии, т. е. учении об эволюции объектов Вселенной. Развитие современной астрофизики позволяет представить себе общую картину эволюции планет и звезд. Считается, что первичной стадией процесса образования звезды является конденсация (уплотнение) облака газопылевой среды, весьма широко распространенной в пространстве Вселенной. Действие сил тяготения приводит к постоянному образованию плотного «холодного» газового шара, который еще не является звездой, поскольку температура еще недостаточна для возникновения термоядерных реакций. Эти реакции начинаются при температурах в десятки миллионов градусов и в основном сводятся к синтезу ядер гелия из протонов (ядер водорода), т. е. к «выгоранию» водородного горючего (подробнее они будут рассмотрены в т. III курса). Эти реакции являются очень мощными и «долгосрочными» источником энергии. Если предположить, что Солнце первоначально состояло только из водорода, который в результате термоядерных реакций целиком превращается в гелий, то выделяющееся при этом количество энергии составляет около 10^{45} Дж. Поскольку Солнце каждую секунду излучает примерно $4 \cdot 10^{26}$ Дж (т. е. $4 \cdot 10^{43}$ Дж за 3 млрд. лет), то получается, что за миллиард лет Солнце расходует не более 5% своего первоначального запаса «водородного горючего».

С течением времени газовая «протозвезда» продолжает сжиматься и уплотняться под действием сил тяготения. Уже на этом раннем этапе вокруг нее могут образоваться меньшие газовые сгустки – зародыши будущих планет. Их масса недостаточна для сжатия до таких температур, при которых начнутся термоядерные реакции, поэтому они остаются «холодными,

несамосветящимися небесными телами. В результате сжатия протозвезды ее температура повышается, особенно в центральных слоях, а нагрев поверхностных слоев приводит к появлению заметного собственного излучения. Когда в недрах протозвезды начинаются термоядерные реакции, давление в них резко повышается и уравнивает силы тяготения. При этом размеры этого объекта стабилизируются, и образуется «звезда».

В дальнейшем звезда довольно длительное время существует в устойчивом состоянии, постепенно расходуя свое «водородное горючее». Продолжительность этого состояния определяется первоначальной массой звезды. Излучение звезды имеет большую мощность и «горючее» расходуется очень быстро. При $m \sim m_c$ (масса Солнца) стабильное излучение может продолжаться 10-15 млрд. лет (см. выше), а при $m \sim 30 - 50 m_c$ эта продолжительность всего лишь порядка 10 лет. В конце концов водородное «топливо» звезды «выгорает». Этот процесс происходит лишь в центральных областях звезды с огромными температурами, а в поверхностных слоях относительное содержание водорода мало изменяется. После «выгорания» водорода температура и давление в ядре звезды снижаются, и силы тяготения вновь сжимают звезду, что приводит к новому повышению температуры ядра. Ядро будет состоять из плотного «вырожденного газа», содержащего в основном гелий с примесью некоторых других элементов. Теперь термоядерные реакции будут протекать преимущественно на периферии ядра, где имеется достаточное количество водорода. В результате светимость и размеры звезды начинают возрастать (звезда переходит в режим «красных гигантов»). Дальнейшая судьба звезды после полного выгорания «ядерного горючего» зависит от ее массы. Если $m < 1,2 m_c$, то наружная оболочка звезды «сбрасывается», постепенно удаляясь от звезды, а оставшееся горючее ядро звезды постепенно остывает, превращаясь в «белый карлик». Дальнейшее остывание приводит к образованию ненаблюдаемого оптически способом «черного карлика» - плотного холодного тела ($\rho \sim 10^9$ кг/м³) малых размеров (менее r_z). Так заканчивает свой путь эволюции большинство звезд Вселенной по современным представлениям.

Однако судьба более массивных звезд рассматривается существенно иной. Если $m \approx 1,2 \div 2,5 m_c$, то после выгорания ядерного горючего звезда достигает устойчивой конфигурации белого карлика, сжимается до очень малых размеров, достигая плотности порядка 10^{18} кг/м³ (т. е. больше плотности атомных ядер). Вещество таких, так называемых «нейтронных» звезд, состоит из чрезвычайно плотно упакованных нейтронов. Первоначальная температура такой звезды составляет $\sim 10^9$ К, однако затем нейтронная звезда очень быстро остывает, и обнаружить ее по видимому или рентгеновскому излучению практически невозможно. Однако в 1967 г. были открыты «пульсары», излучающие короткие импульсы радиоизлучения, повторяющиеся через строго определенные промежутки времени (от нескольких секунд до 33 мс). Причина этой «пульсации», излучения является

быстрое вращение «пульсаров», линейные размеры которых составляют десятки километров, что характерно для нейтронных звезд. Быстрое вращение возникает при сжатии массивных звезд до размеров нейтронной звезды, согласно закону сохранения момента импульса. Так, при сжатии в 10^5 раз скорость на экваторе звезды может достигнуть половины скорости света, а период вращения имеет порядок величины 1 мс. Таким образом, изучение пульсаров дает информацию о свойствах нейтронных звезд.

Если масса звезды превышает некоторую критическую – примерно 2,5-3,0 m_{\odot} , то после выгорания в ней ядерного горючего начинается катастрофически быстрое сжатие под действием сил тяготения – «гравитационный коллапс». За весьма короткое время звезда достигает гравитационного радиуса

$$r_g = \frac{2\gamma m}{c^2} \quad (5.88)$$

(иногда полагают $r_g = \frac{\gamma m}{c^2}$). Это совершенно ничтожная величина по сравнению с реальными размерами небесных тел; так для Солнца = 1,48 км (для Земли – 0,443 см), для Луны – 0,0053 см. Скорость «старта» воображаемого космического корабля с небесного тела («параболическая» скорость, см. выше) возрастает со временем как $V_2 \sim r^{-1/2}$ (r – радиус звезды). При $r=r_c$ $V_2 \approx 700$ км/с. Если бы Солнце сжалось до $r \sim 3$ км, то его плотность достигла бы 10^{19} кг/м³, а скорость V_2 достигает скорости света c . Такой «сколлапсировавший» объект с радиусом r_g (радиусом «сферы Шварцшильда») называется «черной дырой». Основное его свойство заключается в том, что за пределы «сферы Шварцшильда» не может никакая информация (в том числе световые сигналы) о протекающих внутри нее процессах. При подходе к «черной дыре» время по часам «земного» наблюдения будет протекать все медленнее и, наконец, остановится совсем при достижении сферы Шварцшильда (если воображаемый космонавт будет посылать сигналы на Землю через равные промежутки времени, то при приближении к «черной дыре», промежутки между поступающими на Землю сигналами будут возрастать до бесконечности). Существование «черных дыр» является одним из самых удивительных и поражающих воображение следствий современной теории тяготения.

Существование черной дыры может быть установлено косвенным путем, по некоторым специфическим эффектам в ее окрестности. В частности, на больших расстояниях «черная дыра» создает гравитационное поле, мало отличающееся от «ньютоновского». В этом поле возможно рождение элементарных частиц (фотонов, нейтронов и др.); вследствие этого возникает излучение по закону Стефана-Больцмана (см. т. III). Температура и, следовательно, интенсивность излучения возрастают с уменьшением массы «черной дыры». Отсюда следует, что при малых массах излучение должно приводить к «взрывному испарению» больших энергий (порядка 10^{23} Дж) за малое время (порядка 0,1 с при массах около $3 \cdot 10^6$ кг). На ранних

стадиях развития Вселенной из «сверхплотного» сгустка материи могли образоваться первичные «черные дыры» с различными массами. При массах менее 10^{12} кг «черные дыры» должны были «испариться» за время существования Вселенной, в то время как при больших массах эти объекты могли сохраниться и на данном этапе ее эволюций. Поэтому обнаружение «первичных черных дыр» должно дать ценную информацию об «истории» Вселенной и является весьма актуальной задачей астрономии. Решение этой задачи может быть получено путем исследования рентгеновского излучения систем двойных звезд. Если один из партнеров «двойной звезды» является «черной дырой», то имеет место перетекание к нему вещества от второго, «обычного» партнера. Этот эффект должен приводить к интенсивному нагреву вещества вблизи «черной дыры» (до 10^7 К), что проявляется в испускании рентгеновского электромагнитного излучения, которое может быть зарегистрировано методами рентгеновской астрономии (см. т. III курса). Аналогичные эффекты возможны и вблизи нейтронной звезды, однако ее масса меньше массы «черной дыры», что дает возможность различать эти объекты. В настоящее время уже обнаружены компоненты двойных звезд, которые с большой вероятностью являются «черными дырами».

Современная теория тяготения является научной основой планетной космогонии, рассматривающей возможные пути образования Солнечной системы и галактической космогонии учения об эволюции звездных систем-галактик. Связанные с этим проблемы являются предметом интенсивного научного поиска.

ГЛАВА 6 МЕХАНИКА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

6.1 Законы гидро- и аэростатики. Плавание тел

Законы статики для жидкостей и газов существенно отличаются от изложенных в п. 3.1 законов равновесия твердых тел. Основное различие заключается в том, что в то время, как на поверхности любого сечения твердого тела в состоянии равновесия могут действовать как нормальные, так и касательные напряжения, в жидкостях и газах передача касательных усилий от одних элементов к другим невозможна. Это означает, что жидкости и газы практически не сопротивляются деформации сдвига под действием касательных усилий. Например, тело, плавающее на поверхности жидкости, может быть сдвинуто любым, сколь угодно малым усилием. Как мы увидим ниже, в гл. 7, это обстоятельство является также причиной того, что в жидкостях и газах могут распространяться только продольные волны («волны давления»), в то время как в твердых телах могут распространяться также и поперечные волны («волны сдвига»). Другим характерным отличием статики жидкостей и газов от статики твердых тел является то, что нормальные усилия, действующие в газах и в жидкостях в состоянии равновесия, почти всегда (для газов – всегда) являются силами сжатия, поскольку – жидкости слабо сопротивляются растяжению. Таким образом, в состоянии равновесия жидкости и газы могут передавать только оказываемое на них давление: в каждом сечении на единицу площади в окрестности данной точки действует сжимающее напряжение, называемое давлением жидкости или газа. Этим по существу определяются все законы гидро- и аэростатики, т. е. законы равновесия жидкостей и газов, которые можно вывести, исходя из указанного положения о возможности существования только нормальных напряжений.

Приведем вывод некоторых из этих законов, ограничиваясь вначале рассмотрением жидкостей (гидростатика). Отличие законов статики газов

(аэростатики) заключается в том, что газы, в отличие от жидкости, являются сжимаемыми, т. е. их плотность существенно зависит от давления. Жидкости же практически несжимаемы; так объем некоторой массы воды при изменении давления на 1000 атм (что примерно соответствует наибольшей глубине в Мировом океане) изменяется всего лишь на 5%. Таким изменением плотности во всех практических расчетах можно пренебречь.

Выделим теперь в жидкости в окрестности некоторой точки O малый

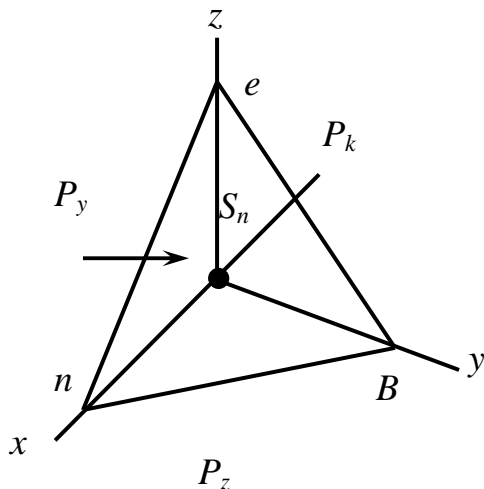


Рис. 6.1

объём (в форме тетраэдра, см. рис. 6.1) ОАВС, находящийся в равновесии под действием сил давления со стороны остальной части жидкости. Обозначим проекции наклонной площадки S на плоскости (yOz , (xOz) и (xOy) через S_x , S_y , S_z , а давления на все эти площадки $-P_S$, P_x , P_y , P_z , соответственно. Условия равновесия жидкости с плотностью ρ в объеме ОАВС для координатных осей x , y , z соответственно, имеют вид:

$$P_S S_x = \frac{bc}{2} P_x, \quad P_S S_y = \frac{ac}{2} P_y, \quad P_S + \rho g \frac{abc}{6} = \frac{ab}{2} P_z. \quad (6.1)$$

При малых размерах тетраэдра величина $авс$ является малой по сравнению с $ав$ и ею можно пренебречь. Тогда, учитывая, что $S_x = \frac{bc}{2}$, $S_y = \frac{ac}{2}$, $S_z = \frac{ab}{2}$, находим

$$P_S = P_x = P_y = P_z. \quad (6.2)$$

Поскольку ориентация выбранного объема жидкости совершенно произвольна, то (6.2) выражает закон Паскаля: давление в любой точке жидкости (или газа) в состоянии равновесия одинаково по всем направлениям. Внешнее давление на жидкость (газ) равномерно передается

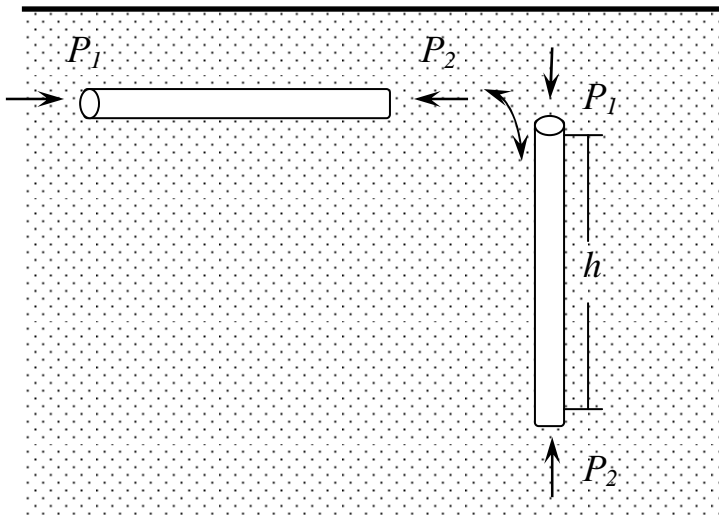


Рис. 6.2

по всему объему жидкости (газа). Закон Паскаля определяет равновесное состояние жидкости (или газа) и имеет большое практическое значение. Например, при различных механических испытаниях оболочек (например, резервуаров высокого давления, см. п. 3.5) необходимо создать для них равномерный режим нагружения, что достигается с помощью создания

гидростатического давления изнутри или снаружи оболочки.

Рассмотрим теперь равновесие некоторого малого объема жидкости в виде тонкого цилиндра в каком-либо резервуаре (рис. 6.2) при наличии массовых сил (сил тяжести). Если этот цилиндрический объем расположен горизонтально, то условием равновесия является равенство давлений на торцы цилиндра. Таким образом, давление во всех точках покоящейся жидкости, находящихся на одном горизонтальном уровне, одинаково.

Рассмотрим теперь равновесие того же цилиндрического объема, ориентированного вертикально. Теперь условие равновесия имеет вид:

$$SP_1 + P = SP_2, \quad (6.3)$$

где P – вес жидкости в выделенном объеме, S – площадь основания цилиндра.

Отсюда $P_1 + \frac{P}{S} = P_2$, или:

$$P_2 - P_1 = \frac{P}{S} = P_0, \quad (6.4)$$

где P_0 – гидростатическое давление, создаваемое столбом жидкости высотой h :

$$P_0 = \frac{\rho Shg}{S} = \rho gh. \quad (6.5)$$

Если теперь представить себе, что жидкость из этого объема удалена, и в образовавшуюся полость помещено какое-то тело того же объема, то на него будет действовать равнодействующая сил P_2S и P_1S , направленная вверх и равная

$$F = P_2S - P_1S = P. \quad (6.6)$$

Это является выражением закона Архимеда: на тело, полностью погруженное в жидкость (или газ), действует выталкивающая сила, численно равная весу жидкости в объеме, занятом этим телом.

Если тело находится в равновесии, то это значит, что его вес равен выталкивающей силе. Поскольку сила веса (сила тяжести) приложена в центре тяжести (центре масс) тела, то ясно, что и выталкивающая (архимедова) сила приложена в центре масс или центре инерции тела (см. п. 2-2), если оно полностью погружено в жидкость.

На законе Архимеда основано действие приборов для измерения плотности жидкостей – ареометров. Шкала ареометров постоянного веса (денсиметров) градуируется в единицах плотности. Их показания определяются по глубине погружения (до определенного деления шкалы) в исследуемую жидкость. Некоторые денсиметры специального назначения носят особые названия: лактоденсиметры (лактометры) для определения жирности молока, спиртометры для определения содержания спирта в воде, сахарометры для определения содержания сахара в сиропах и т. п. Точность измерения плотности этими приборами достигает 10^{-4} г/см³ (у эталонных приборов), концентрации -0,1%. Эти приборы широко используются в пищевой промышленности. Несколько меньшее распространение получили ареометры постоянного объема, которые погружаются в различные жидкости на фиксированную глубину путем изменения веса прибора, а плотность отсчитывается по массе необходимых для этого гирь.

Закон Архимеда лежит в основе действия некоторых систем автоматического регулирования, в частности, с использованием принципа поплавкового регулятора, предложенного еще в 1763 г. выдающимся русским изобретателем и теплотехником И.И. Ползуновым. Этот принцип поясняется рис. 6.3. Объясним его, поскольку он не потерял своего значения.

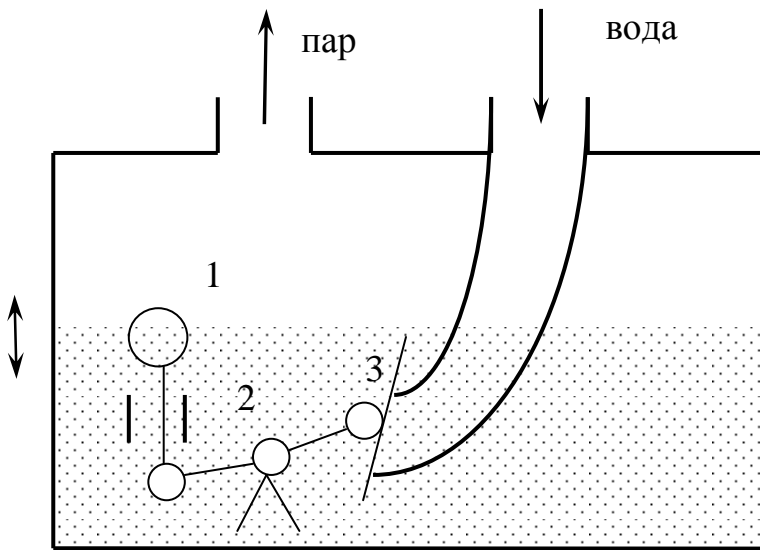


Рис. 6.3

В паровой машине в результате превращения воды в пар уровень воды в котле понижается, что рано или поздно должно привести к падению давления в котле и отказу паровой машины. Во избежание недопустимого снижения уровня воды в нее помещается поплавок 1, соединенный рычажным механизмом 2 с заслонкой 3. При снижении уровня воды поплавок опускается, перемещая заслонку, которая при определенной высоте

поплавок открывает доступ воде в котел. Напротив, при повышении уровня поплавок поднимается, и заслонка закрывает трубу подачи воды. Этот принцип используется и в современных автоматических устройствах для систем питания котельных установок водой, воздухом, топливом и т. д.

Следствием закона Архимеда является закон давления в покоящейся жидкости. Из отмеченного выше факта равенства давлений в жидкости на одном горизонтальном уровне следует, что свободная поверхность покоящейся жидкости всегда горизонтальна (за исключением непосредственной окрестности стенок сосуда, содержащего жидкость ввиду наличия искривления поверхности жидкости под действием сил смачивания (см. п. 8.3)). По вертикали давление возрастает с глубиной согласно формуле (6.5). Этим объясняется так называемый «гидростатический парадокс», впервые отмеченный Паскалем: сила давления на дно сосуда с площадью S при высоте уровня жидкости h всегда равна $F = \rho ghS$, независимо от формы сосуда, т. е. может быть больше или меньше веса жидкости в сосуде.

На основе формулы (6.5) давление (или разности давлений) часто измеряют с помощью U -образных манометров. Такой манометр представляет собой два сообщающихся сосуда, содержащих рабочую жидкость. Если внешнее давление одинаково над жидкостью в обоих сосудах, то уровень жидкости в обоих сосудах одинаков. Если же в сосудах создана разность внешних давлений $P_1 - P_2$, то уровни жидкости изменятся и станут такими, что разность уровней h будет равна $h = \frac{P_1 - P_2}{\rho g}$, согласно формуле (6.4).

При практическом использовании таких манометров часто выражают разность давлений непосредственно величиной h с указанием рода рабочей жидкости (мм рт. ст., мм вод. ст., и т. д.; для ртутных манометров: 1 мм рт. ст. = 133,3 Па; для водяных манометров: 1 см вод. ст. = 98,1 Па, и т. д.).

Рассмотрим теперь условия плавания тел в жидкости. Из закона Архимеда следует, что твердое тело, объем которого не зависит от давления (разумеется, в определенных пределах), будет всплывать на поверхность, если его вес меньше вытесненной им жидкости, или же опустится на дно в противоположном случае. Если вес тела с точностью равен весу вытесненной им жидкости, то тело будет находиться в состоянии безразличного, равновесия внутри жидкости. Однако следует иметь в виду, что такую ситуацию можно реализовать лишь в специальных опытах («подгоняя» плотность жидкости к плотности тела). Реальные тела, плотность которых близка к плотности воды, не бывают абсолютно жесткими и их равновесие в жидкости является неустойчивым. При опускании на небольшую добавочную глубину давление на тело возрастает, объем его в результате сжатия несколько уменьшается, и подъемная (архимедова) сила уменьшается, поэтому тело будет продолжать опускаться до самого дна сосуда с жидкостью (при подъеме тела будет иметь место обратная ситуация). Подобная ситуация имеет место для человека находящегося в воде. Поскольку его организм на 75% по весу состоит из воды, заключенной в тканях, то плотность тела человека лишь незначительно меньше плотности воды. В результате человек, находясь в неподвижном состоянии, должен плавать в воде, над поверхностью воды будет видна лишь его небольшая часть. Однако при неумелых движениях это равновесие нарушается, и человек уходит под воду. Если при этом в его легкие попадет вода, вытеснившая часть воздуха, то этого небольшого увеличения веса уже достаточно для погружения человека на дно. Глубоководные морские животные и рыбы умеют целенаправленно управлять этим процессом всплывания и погружения (плотность их организмов также весьма близка к плотности воды) с помощью специальных органов (например, воздушного пузыря у рыб).

Опыт показывает, что тело, плавающее по поверхности воды, занимает вовсе не безразлично равновесное положение. Например, деревянный брусок плавает устойчиво в воде лишь в положении, показанном за рис. 6.4а; если его поместить в положение рис. 6.4б, то он немедленно опрокинется и вскоре

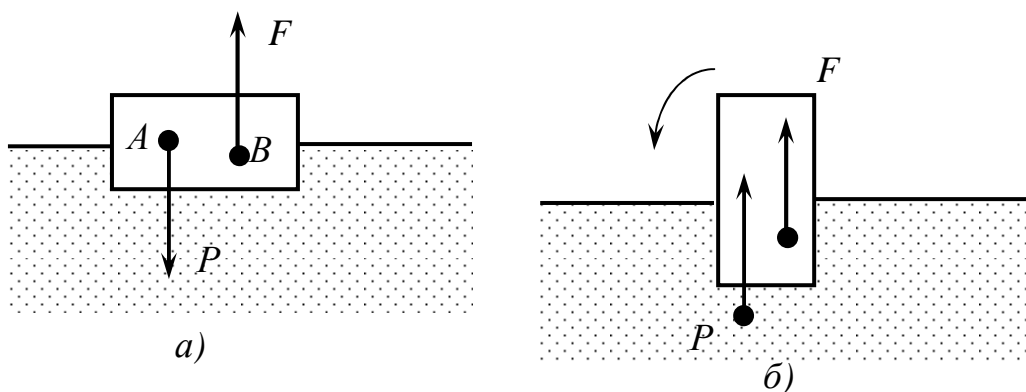


Рис. 6.4

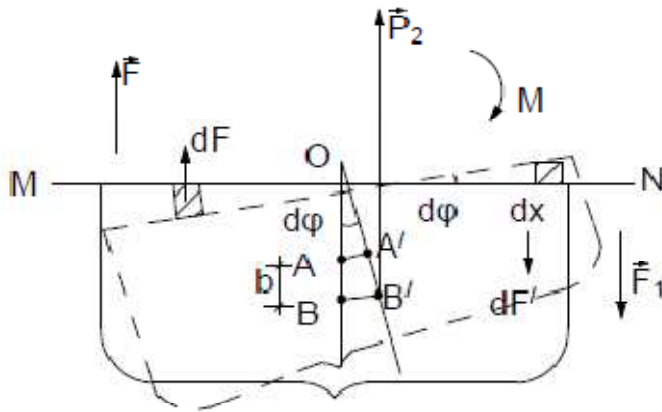


Рис. 6.5

характерной для судов А, показанной на рисунке (в точке А приложен вес тела, точке В - выталкивающая сила). Для наглядности изображения эти точки смещены по горизонтали в противоположные стороны. Если тело полностью погрузилось в жидкость, то эти точки совпадают, как уже указывалось выше. Условия устойчивого плавания кораблей требуют особого рассмотрения.

Рассмотрим плавающий в воде корабль, центр тяжести которого лежит в точке А, а центр тяжести вытесненной воды лежит в точке В (ниже точки

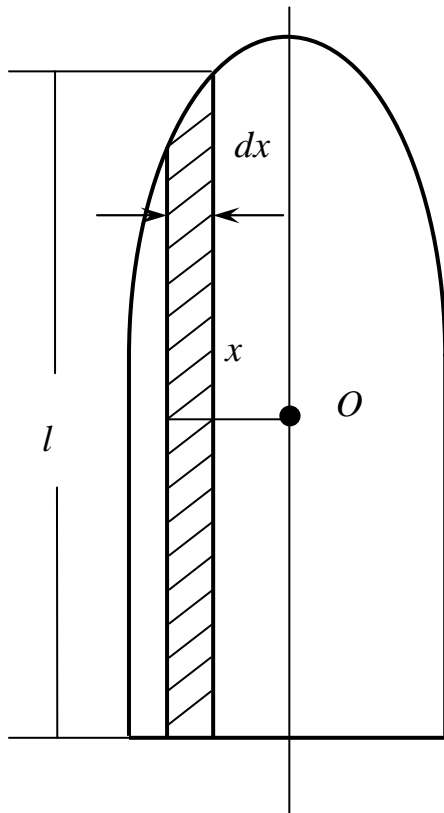


Рис. 6.6

А), и выталкивающая сила P_2 , приложенная в точке 3, равна весу корабля, приложенному в точке А (рис. 6.5). Пусть корабль получил крен на один борт на малый угол $d\varphi$. Тогда одна половина корабля погрузится в воду, а вторая его половина выйдет из воды, в результате чего выталкивающая сила на одной стороне увеличится, а на другой – уменьшится. Общая величина этой силы не изменится, но точка ее приложения В сместится и займет положение B' , как показано на рис. 6.5. Одновременно занимает новое положение A' и центр тяжести корабля А. Указанное изменение в результате крена можно описать как появление пары сил \bar{F} и \bar{F}' , момент которой M стремится вернуть корабль в исходное положение. В то же время, как видно из рис. 6.5, «смещенная» выталкивающая сила P_2 создает «опрокидывающий» момент, равный $P_2 b d\varphi$, где b – расстояние между центрами масс А и В.

Таким образом, условие возвращения корабля в исходное положение, т. е. условие устойчивого плавания корабля, имеет вид:

примет устойчивое положение а). Этот факт имеет чрезвычайно важное практическое значение для теории судостроения: он показывает, что для устойчивого плавания судна нет необходимости в том, чтобы центр тяжести тела (А) был расположен ниже центра тяжести вытесненной жидкости (В). Устойчивое плавание судов возможно и в обратной ситуации,

$$M > P_2 v d\varphi. \quad (6.7)$$

Для приближенного вычисления момента M используется тот факт, что каждый малый участок dx сечения корабля на расстоянии x от средней линии (проходящей через 0 перпендикулярно плоскости чертежа) создает увеличение подъемной силы на $d\bar{F}$ слева от 0 и уменьшение подъемной силы на $d\bar{F}'$ справа от 0, причем (см. рис. 6.5):

$$dF = df' - \rho g x d\varphi \cdot l dx \quad (6.8)$$

(l – длина корабля вдоль средней линии, ρ – плотность воды). Момент этой пары сил равен

$$dM = 2x dF, \quad (6.9)$$

а полный момент пары сил \bar{F} и \bar{F}' равен:

$$M = \int 2x dF = \rho g d\varphi \int 2lx^2 dx = \rho g d\varphi I, \quad (6.10)$$

где $I = \int 2lx^2 dx$ – момент инерции сечения корабля по ватерлинии, показанного на рис. 6.6. Эту величину можно вычислить, исходя из конкретной геометрии данного типа корабля.

Подставляя (6.10) в условие равновесия (6.7), получим:

$$I\rho g > P_2 b, \quad I\rho g / P_2 > b. \quad (6.11)$$

Учитывая, наконец, что $P_2 = \rho g V$ (V – объем вытесненной судном воды), окончательно имеем:

$$l_0 = \frac{I}{V} > b. \quad (6.12)$$

Величина l_0 (метацентрическая величина судна) зависит только от геометрических форм корабля, а величина b – также и от распределения масс внутри корабля, т. е. от всех его параметров (в том числе и от загрузки). Теперь ясно, почему тонущее судно часто переворачивается перед погружением: при попадании воды внутрь корабля условие устойчивости (6.11) может нарушиться. Ясно также, что восстановление равновесия корабля носит «инерционный» характер: при возвращении в исходное положение корабль будет иметь некоторую угловую скорость и пройдет по инерции это положение, после чего возникает восстанавливающий момент в противоположном направлении, и т. д. Этим объясняется явление «качки корабля» даже при плавании в сравнительно спокойной воде.

Рассмотрим теперь особенности законов аэростатики, т. е. равновесия газов. Как уже указывалось выше, основной особенностью является их сжимаемость, т. е. зависимость плотности газа от давления. Согласно уравнению Менделеева-Клапейрона (см. ниже, гл. 8):

$$PV = \frac{M}{\mu} RT \quad (6.13)$$

(P – давление, V – объем газа; M – масса; μ – молекулярная масса, T – абсолютная температура, R – универсальная газовая постоянная). Плотность газа $\rho = \frac{M}{V}$ определяется выражением:

$$\rho = \frac{P\mu}{RT}. \quad (6.14)$$

Таким образом, при постоянной температуре плотность газа прямо пропорционально его давлению. Одним из следствий этого является изменение атмосферного давления P с высотой h над поверхностью Земли по экспоненциальному закону («барометрическая формула»). Эта зависимость может быть получена согласно формуле (6.5) для гидростатического давления, которую можно представить в виде:

$$dP = -\rho g dh \quad (6.15)$$

(знак минус соответствует уменьшению давления с высотой). Если обозначить давление у поверхности Земли ($h=0$) через P_0 , то для давления P_h на высоте h имеем с учетом (6.14):

$$\int_0^{P_h} \frac{dP}{P} = -\frac{\mu g}{RT} \int_0^h dh \quad (6.16)$$

или

$$P = P_0 \exp\left(-\frac{\mu g h}{RT}\right). \quad (6.17)$$

При расчетах по этой формуле принимается $\mu=29$ кг/кмоль для воздуха, а в качестве величины T берется некоторая усредненная температура, соответствующая так называемой «изотермической» атмосфере. Исследования показали, что температура воздуха понижается с высотой (примерно до -55°C при $h=11$ км), а затем остается примерно постоянной до 25 км, после чего начинается повышение температуры до $h \approx 45$ км (440°C) с дальнейшим ее снижением (ниже нуля при $h > 60$ км). Этот сложный, характер изменения температуры объясняется особенностями теплового баланса атмосферы Земли, которые будут более подробно рассмотрены позже.

Коротко рассмотрим некоторые особенности плавания тел в атмосфере с учетом зависимости плотности воздуха от давления. Закон Архимеда может применяться и в этом случае, и если вес тела равен весу вытесненного им газа, то тело, объем которого не зависит от давления, будет находиться в устойчивом равновесии на некоторой высоте (а не в безграничном равновесии на любой глубине, как в случае жидкости). Действительно, вес воздуха в объеме, вытесненном, телом, с возрастанием высоты уменьшается из-за снижения плотности, и выталкивающая сила также уменьшается. Поэтому тело, случайно поднявшееся на большую высоту, затем опустится до равновесной высоты (аналогичные явления имеют место и на высоте ниже равновесной).

Более сложным является случай плавания в воздухе тела, объем которого V изменяется с изменением внешнего давления воздуха. Такая ситуация (уменьшение V с ростом P) имеет место, например, для аэростата или воздушного шара. У поверхности Земли оболочка аэростата имеет вытянутую форму, давление наружного воздуха препятствует ее расширению. При подъеме аэростата при неизменном весе газа P_g вследствие уменьшения наружного давления форма оболочки начинает приближаться к сферической, и ее объем возрастает, а плотность газа уменьшается. Подъемная сила аэростата равна

$$P_{\pi} = (\rho - \rho_r)gV. \quad (6.18)$$

Если эта сила больше веса груженого аэростата, то он будет подниматься.

При некоторой высоте h_g , на которой оболочка становится сферической («высота наполнения»), плотность газа становится минимальной (ρ_{rmin}), а объем оболочки – максимальным (V_m). Если зависимость $\rho_r(h)$ известна, то можно определить и величину h_g , зная ρ_{rmin} . После этого во избежание опасности разрыва оболочки аэростата газ выпускается через клапан в нижней части оболочки, и разность $\rho - \rho_0$ и, следовательно, подъемная сила уменьшаются, а объем газа остается неизменным. При дальнейшем подъеме потеря части газа приводит к тому, что на некоторой высоте h_{π} подъемная сила

$$P_{\pi} = (\rho - \rho_r)gV_m \quad (6.19)$$

становится равной весу аэростата, и его подъем прекращается. На этой высоте равновесие аэростата будет устойчивым ввиду постоянства объема оболочки аэростата, согласно изложенному выше. Разумеется, представленная картина явлений подъема аэростата является лишь упрощением реальной ситуации, которая зависит от метеорологических условий полета и ряда других факторов.

6.2 Законы гидро- и аэродинамики

Как было указано в п. 6.1, жидкости и газы, в отличие от твердых тел, могут передавать только нормальные усилия (давления). Это означает, что при любом, сколь угодно малом, касательном усилии жидкость (газ) приходит в движение – «течет». Это течение можно рассматривать как некоторую «сдвиговую деформацию», развивающуюся со скоростью V под действием касательного («сдвигового») напряжения (усилия на ед. площади слоя жидкости). При этом жидкость или газ рассматриваются как сплошная среда с непрерывным «полем скоростей», без учета истинного молекулярного строения вещества. Законы гидро- и аэростатики обладают большой общностью и могут рассматриваться совместно, как это будет осуществляться ниже в этой главе. При небольших внешних усилиях сжимаемостью газа можно пренебречь, как это обычно делается для жидкости. Однако в некоторых условиях, например, при сверхзвуковом течении, сжимаемость газа необходимо учитывать (эти вопросы будут рассмотрены особо в п. 6.4).

При возникновении течения в жидкости между ее слоями возникают «силы вязкости», оказывающие сопротивление движению и стремящиеся выровнять поле скоростей в жидкости. Вязкость относится к «явлениям переноса» (более подробно рассмотренным ниже, в гл. 8). Ее физическая сущность заключается в «переносе импульса» согласно 2-му закону Ньютона. Механизм этого переноса в жидкостях и газах, вообще говоря, различен: в жидкостях причиной вязкости является наличие интенсивного

молекулярного взаимодействия ввиду большой «плотности» расположения молекул, в то время как в газах вязкость возникает в результате хаотического перемещения молекул движущегося газа из одних слоев в другие. Это различие проявляется, например, в различном характере зависимости вязкости от температуры (см. гл. 8). Однако при исследовании вопросов гидро- и аэродинамики от этого различия можно отвлечься, поскольку как для жидкостей, так и для газов имеет место приближенный закон Ньютона:

$$\tau = \mu \frac{dv}{dt} = \gamma \mu, \quad (6.20)$$

где $\frac{dv}{dt}$ – «градиент скорости», характеризующий быстроту изменения скорости при переходе от одного слоя жидкости к другому, γ – скорость сдвиговой деформации, τ – сдвиговое (касательное) напряжение (сила вязкости, действующая на ед. площади слоя). Коэффициент пропорциональности μ называется «коэффициентом динамической вязкости» или просто «вязкостью» жидкости (газа). Наряду с величиной μ , используется также «кинематическая вязкость» $\nu = \frac{\mu}{\rho}$.

Существует значительное количество экспериментальных методов определения вязкости жидкости (их комплекс образует так называемую «вискозиметрию»). Жидкости, подчиняющиеся закону течения (6.20), называют «ньютоновскими».

Вязкость различных пластичных масс, к которым относятся многочисленные пластично-вязкие материалы с дисперсной (в частности, коллоидной) структурой, например, строительные материалы, глиняные пасты, торф, лаки и краски, пищевые продукты и т.п., не является константой материала, в отличие от «ньютоновских» жидкостей, рассмотренных выше. Особенностью этих материалов является наличие «предела текучести» σ_k , т. е. минимального сдвигового напряжения, при котором начинается течение материала (обычно это течение изучается в условиях однородного сдвига, создаваемых например, в узком зазоре между двумя цилиндрами в так называемом ротационном вискозиметре). Простейшим законом течения таких «структурированных» жидкостей является формула Бингема-Шведова:

$$\gamma = \frac{\sigma - \sigma_k}{\eta^*}, \quad (6.21)$$

где γ – градиент скорости сдвига, т.е. скорость сдвигов деформации $\gamma = \frac{d\varepsilon}{dt}$, η^* – пластическая вязкость. Согласно формуле (6.21), переписанной в виде $\sigma = \sigma_k + \eta^* \gamma$, напряжение сдвига при установившемся, течении материала складывается из двух членов: наибольшего упругого напряжения, при превышении которого деформация становится неупругой, и вязкого сопротивления течению согласно обычному закону Ньютона. Если определить из этой формулы вязкость η обычным способом («по Ньютону») как $\eta = \frac{\sigma}{\gamma}$, то получим

$$\eta = \eta^* + \frac{\sigma_k}{\gamma} = \eta^* \frac{\sigma}{\sigma - \sigma_k}. \quad (6.22)$$

Таким образом, для рассматриваемых материалов («неньютоновских жидкостей») вязкость оказывается зависящей от сдвигового напряжения, т. е. является константой материала. В этом случае она называется структурной вязкостью (для отличия от обычной пластической вязкости).

Уравнение Бингема-Шведова является лишь весьма приближенным, и не описывает течение с очень мелкими или с очень большими скоростями. Однако ввиду его простоты и возможности аналитического решения в ряде случаев оно широко используется в реологии, изучающей законы течения пластических масс, вязкость которых зависит от их структуры. Законы реологии применяются к строительным материалам, пищевым массам (например, в кондитерском производстве) и т. д.

Вязкость многих жидкостей, в частности воды, сравнительно мала. Поэтому при приближенном рассмотрении закономерностей течения жидкостей (и тем более газов) широко используется понятие «идеальной» жидкости, не обладающей вязкостью. Для такой жидкости уравнения, описывающие ее течение, оказываются, естественно, наиболее простыми.

Характер установившегося (стационарного) течения жидкости зависит, прежде всего, от его скорости. При сравнительно низких скоростях течение любой жидкости является «ламинарным» (слоистым), при котором все частицы жидкости движутся по близким траекториям. При этом весь объем движущейся жидкости можно условно подразделить на «трубки тока», ограниченные траекториями «крайних» частиц из выделенного малого объема жидкости. Движение идеальной жидкости всегда является ламинарным. При больших скоростях течения вязкой жидкости (а также при наличии препятствий на ее пути, см. ниже) оно может принять «турбулентный» (вихревой) характер. При этом в отдельных местах возникают движения частиц по замкнутым траекториям – «вихри». При наличии турбулентности количественное описание картины течения резко усложняется.

Рассмотрим вначале основные законы стационарного течения идеальной жидкости. Для каждой выделенной трубки тока (она может быть ограничена твердыми стенками, например, при течении жидкости в трубе) должен выполняться закон сохранения массы: масса жидкости, проходящая через любое сечение трубки, площадью S в единицу времени, остается неизменной:

$$\rho v S = \text{const.} \quad (6.23)$$

Поскольку при этом течение является «сплошным», т. е. не содержит пустот, то выражение (6.23) можно считать также условием «неразрывности» струи. Если пренебречь малой сжимаемостью жидкости (или газа), то ее плотность можно считать одинаковой по всей длине тока ($\rho = \text{const.}$). Тогда (6.23) принимает вид

$$v S = \text{const.} \quad (6.24)$$

Это означает, что в местах сужения скорость течения возрастает, а в местах расширения – снижается. Это явление постоянно наблюдается в природе: в местах сужения русла реки образует стремительный поток.

Течение в трубе осуществляется под действием давления (напора), указываемого на жидкость извне (в наклонных по отношению к горизонту трубах следует учитывать и силы тяжести, см. ниже). Поскольку жидкость в месте сужения трубы ускоряется, то ясно, что на нее действует сила,

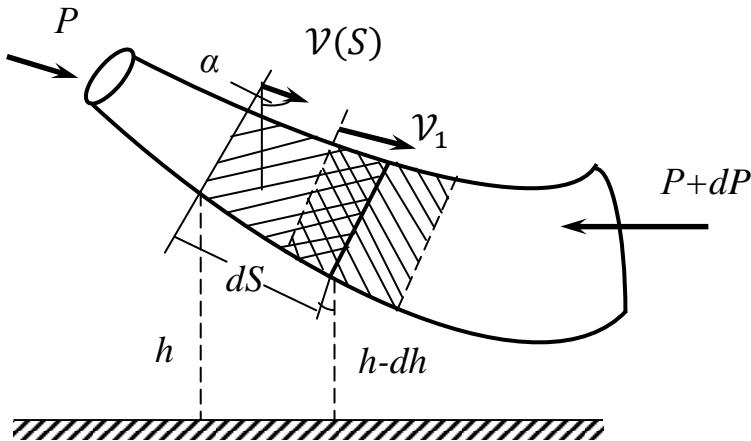


Рис. 6.7

возникающая в результате разности давлений между широкой и узкой частями трубы. Отсюда можно уже сделать важный качественный вывод: давление в широких местах течения больше, чем в узких. Для исследования общего случая наклонной трубки тока обратимся к схеме рис. 6.7 и используем закон сохранения энергии для элементарного объема

жидкости, движущейся вместе с потоком со скоростью V . Применение закона сохранения механической энергии возможно для идеальной жидкости, поскольку при отсутствии сил вязкого трения диссипация механической энергии отсутствует.

Рассмотрим некоторый малый объем жидкости dQ ; при перемещении его в новое положение (штриховка рис. 6.7) потенциальная энергия этого объема жидкости изменится на $\rho g dQ dh = -\rho g dQ dS \cos \alpha$. В то же время кинетическая энергия этого объема жидкости изменится на

$$\frac{\rho}{2} (V_1^2 - V_2^2) dQ = \frac{d}{dS} \left(\frac{\rho V^2}{2} \right) dQ dS. \quad (6.24)$$

Работа внешних сил за счет разности давлений на торцах трубки ΔP будет равна $-dP dQ$. Согласно закону сохранения энергии, работа внешних сил по перемещению выделенного объема жидкости равна полному изменению механической энергии (суммы кинетической и потенциальной энергий) этой части жидкости.

$$\rho g dQ dh + \frac{d}{dS} \left(\frac{\rho V^2}{2} \right) dQ dS = -dP dQ. \quad (6.25)$$

После сокращения на $dQ dS$ имеем:

$$\frac{d}{dS} \left(P + \rho g h + \frac{\rho V^2}{2} \right) = 0. \quad (6.26)$$

Отсюда следует, что

$$P + \rho g h + \frac{\rho V^2}{2} = \text{const}. \quad (6.27)$$

Эта формула выражает закон Бернулли для стационарного течения несжимаемой идеальной жидкости. Величина P представляет собой статическое давление в жидкости, обусловленное действием внешних сил, величина $\frac{\rho v^2}{2}$ определяет давление движущейся жидкости – «гидродинамический напор», величина ρgh определяет «гидростатическое» давление жидкости, зависящее от высоты трубки тока над Землей. Для горизонтальной трубки тока имеем:

$$P + \frac{\rho v^2}{2} = \text{const.} \quad (6.28)$$

Из этой формулы следуют качественные выводы о соотношении давления в жидкости и скорости ее течения, которые были сделаны выше. Однако уравнение Бернулли позволяет проводить количественные расчеты в многочисленных практических приложениях гидродинамики.

Одним из примеров применения закона Бернулли является задача об истечении жидкости из сосуда с отверстием. В этом случае давление снаружи жидкости равно P_0 , а отверстие находится на глубине Δh ниже уровня жидкости в сосуде, и применение формулы (6.27) дает:

$$\frac{\rho}{2}(v^2 - v_0^2) = \rho gh, \quad (6.29)$$

где v – скорость истечения, v_0 – скорость жидкости внутри сосуда. Если отверстие мало, то $v_0 \ll v$, и (6.29) дает «формулу Торричелли»:

$$v = \sqrt{2g\Delta h}. \quad (6.30)$$

Если же истечение осуществляется под избыточным давлением значительно большим гидростатического давления жидкости, то скорость истечения равна:

$$v = \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}}. \quad (6.31)$$

При больших скоростях течения «динамический напор» $\frac{\rho v^2}{2}$ может быть весьма значительным, поэтому струя воды способна совершать большую работу. Это постоянно можно наблюдать в природе: действие потоков воды приводит к размытию почв и горных пород, образование оврагов и балок, новых русел рек, наносов (как, например, в дельтах крупных рек) и т. д. Импульс и энергия текущей жидкости используется для выполнения различных трудоемких работ в различных гидравлических машинах, примеры, которых будут приведены ниже в п. 6.3.

Рассмотрим теперь особенности течения вязкой жидкости. При течении вязкой жидкости по трубе ее слой, прилетающий к стенкам, «прилипает» к ним (при смачивании стенок, см. гл. 8) и остается в дальнейшем неподвижным, а соседние слои испытывают с его стороны действие сил «внутреннего трения» (сил вязкости) препятствующих течению. Вдали от стенок скорость течения будет максимальной. Таким образом, распределение скоростей по радиусу трубы в случае вязкой жидкости, в отличие от «идеальной» жидкости, оказывается неравномерным. Кроме того, наличие

сил вязкости приводит к тому, что давление в различных участках течения в горизонтальной трубе постоянного сечения равномерно спадает в направлении течения (в идеальной жидкости давление в этих условиях будет неизменным). Это естественным образом объясняется диссипацией механической энергии текущей жидкости в результате действия сил трения, так что уравнение Бернулли (6.27) не выполняется. Распределение скоростей в радиальном направлении можно вычислить, используя закон Ньютона (6.20). Соответствующие вычисления приводят к формуле:

$$\mathcal{V} = \frac{1}{4\mu} \left(-\frac{dP}{dl} \right) (R^2 - r^2). \quad (6.32)$$

Здесь R – радиус трубы, r – радиальная координата, величина $\left(-\frac{dP}{dl} \right)$ – «градиент давления» – характеризует падение давления вдоль оси трубы из-за наличия сил вязкости. Используя (6.32), можно вычислить «объемный расход» вязкой жидкости Q – через поперечное сечение трубы, т. е. объем жидкости, проходящий через сечение за единицу времени под действием разности давлений на концах трубы ΔP (при ее длине l). Соответствующий вывод приводит к так называемой формуле «Пуазейля»:

$$Q = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8\mu l}. \quad (6.33)$$

Эта формула используется в различных расчетах, в частности, при измерении коэффициента вязкости путем определения расхода жидкости через трубку с известной геометрией.

Формула вида (6.33) используется также для характеристики «воздухопроницаемости» пористых тел в различных технических приложениях (например, в кожевенной промышленности). Пористые тела, например, натуральная кожа, являются проницаемыми для воздуха благодаря пронизывающей их системе тонких капилляров. Течение воздуха в каждом из них приближенно описывается формулой (6.33); поэтому поток через все пористое тело в целом оказывается приблизительно пропорциональным разности давлений на торцевых поверхностях пористого образца:

$$Q = K \Delta P. \quad (6.34)$$

Эта формула выражает эмпирический «закон Дарси»; величина K называется «воздухопроницаемостью» пористого тела. Этот закон используется в теории фильтрации и других областях техники.

Как уже отмечалось выше, при достаточно больших скоростях течение вязкой жидкости принимает турбулентный характер. При этом скорость течения в заданном месте потока испытывает быстрые и беспорядочные изменения по величине и направлению, поэтому следует характеризовать усредненными значениями скорости. При «стационарном» турбулентном течении эти усредненные значения будут постоянными во времени. Распределение средних скоростей по радиусу трубы при турбулентном течении имеет существенно иной вид, чем при ламинарном течении: средняя скорость приблизительно постоянна во всем сечении трубы, кроме сравнительно тонкого «пограничного слоя» и стенок трубы (при ламинарном

течении, можно считать, что этот «пограничный слой» распространяется практически на все сечение трубы).

Большое практическое значение имеет вопрос о сопротивлении, оказываемом жидкостью или газом движущемуся в ней телу – «лобовом сопротивлении». Этот вопрос является одним из основных в авиационной аэродинамике, изучающей условия полетов летательных аппаратов (самолетов, ракет) в воздухе (см. ниже, п. 6.5).

Можно показать, что сопротивление движению любого тела в идеальной жидкости равно нулю. Особенно просто это положение доказывается для случая сферической формы тела. Действительно, при этом произвольно выбранная в жидкости трубка тока симметрично обтекает шар, и скорость потока, а, следовательно, и давления жидкости до и после шара одинаковы; поэтому и результирующая сила со стороны жидкости на шар равна нулю. Этот вывод обобщается на случай произвольной формы тела. Однако при обтекании тела достаточно больших размеров с большой скоростью в зоне позади тела может возникнуть «отрыв» трубок тока от его поверхности, и возникает область «тени», в которой скорость течения существенно меньше, чем перед телом. (Это явление нетрудно наблюдать в природе, например, при наличии большого камня в текущей воде). При этом давления спереди и сзади тела оказываются неодинаковыми и отличаются на величину порядка $\frac{\rho v^2}{2}$; величина $\frac{\rho v^2}{2} S$, где S – площадь поперечного сечения тела, будет определять «силу лобового сопротивления» движению тела в идеальной жидкости за счет обрыва потока.

При движении тела в вязкой жидкости лобовое сопротивление возникает и в случае ламинарного «безотрывного» обтекания тела из-за наличия сил трения, касательных к поверхности тела. Для стационарного движения тела необходимо совершить работу, численно равную количеству тепла, эквивалентному работе сил трения (т. е. работа внешних сил равна диссипированной в жидкости механической энергии). Однако этот механизм играет преобладающую роль лишь при малых скоростях потока, точнее, при малых значениях «числа Рейнолдса».

$$R_l = \frac{v l \rho}{\mu} \approx \frac{v l}{\nu} \quad (6.35)$$

(где l – характерный размер тела, например, при движении вязкой жидкости в круглой цилиндрической трубе диаметра d : $d=l$). Опыт и теория показывают, что при $R_e \leq 100$ сила сопротивления движению шара радиуса r пропорциональна первой степени скорости его движения:

$$F = 6\pi\mu r v. \quad (6.36)$$

Это положение называется законом Стокса. При значительно больших числах R_e вступает другой механизм сопротивления движению, указанный выше – «отрыв» жидкости от тела и связанное с этим перераспределение давления потока. При преобладании этого механизма сила сопротивления, как указывалось выше, становится приблизительно пропорциональной

квадрату скорости движения тела. Наконец, при очень больших Re – порядка 10^5 и выше – имеет место значительная «турбулизация» потока – образование вихрей позади движущегося тела, что приводит к появлению дополнительного «вихревого» сопротивления движению. Полное лобовое сопротивление движению тела в вязкой жидкости и относительный вклад указанных выше трех его составляющих зависит от геометрии тела и его расположения относительно потока. Например, сопротивление движению тонкой пластинки, поставленной ребром к потоку, определяется в основном силами вязкого трения. Если эту же пластинку поставить так, что нормаль к ее поверхности будет параллельна потоку, то сопротивление, будет в основном обусловлено отрывом потока. Сопротивление движению цилиндра с образующей, перпендикулярной потоку, в основном является вихревым. Поскольку отрыв потока и образование вихрей приводят к резкому увеличению лобового сопротивления, то «аэродинамически выгодной» является «обтекаемая» форма тела, при которой линии тока плавно обходят тело и смыкается позади него, так что «зона обрыва» мала. Если выразить лобовое сопротивление формулой

$$F = C_x \frac{\rho v^2}{2} \quad (6.37)$$

(см. ниже, п. 6.5), то величина C_x оказывается минимальной для формы тела, показанной на рис. 6.8а (значения C_x указаны для больших чисел $Re \sim (10^5 - 10^6)$, а для других случаев (б-г) лобовое сопротивление оказывается значительно больше. Плавное заострение задней части тела обеспечивает смыкание потока и отсутствие «зоны отрыва». Именно такая форма характерна для крыла самолета (см. п. 6.5). Несмотря на наличие теории, позволяющей оценивать лобовое сопротивление движению тела в жидкости

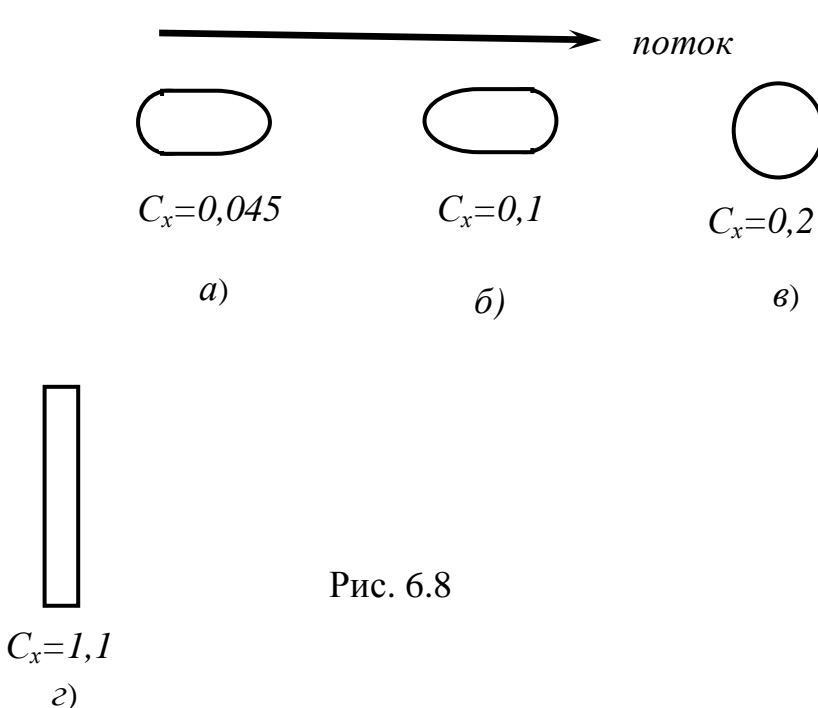


Рис. 6.8

или газе, (в различных условиях), при проектировании новых самолетов, надводных и подводных кораблей широко используются «аэродинамические эксперименты», в которых непосредственно измеряется сила воздействия воздушного потока на находящееся в нем тело. Эта сила зависит лишь от состояния

«относительного» движения тела и жидкости (газа). Поэтому оказывается проще зафиксировать исследуемое тело (модель самолета) и обдувать его потоком, создаваемым в «аэродинамической трубе» (модели кораблей обычно буксируют по поверхности воды в специальных бассейнах). При перенесении результатов аэродинамического эксперимента на реальный летательный аппарат необходимо соблюдать ряд условий, прежде всего, «условия подобия», согласно которым безразмерная величина

$$\mu = \frac{v}{c}, \quad R_e = \frac{vl}{\nu}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (6.38)$$

(C – скорость звука в газе, относительно постоянной γ см. гл. 10) должны быть одинаковыми для модели и натуре самолета или реактора. Обычно эти условия можно выполнить лишь приближенно. Кроме того, при опытах с гиперзвуковыми скоростями следует соблюдать также условия подобия температурных полей и тепловых потоков (см. п. 6.4.).

Конструкция аэродинамической трубы соответствует задачам исследования. Например, в п. 6.4 будет показана рациональная форма трубы, применяемой для исследований сверхзвуковых течений газа, обтекающего тела. Аэродинамическая труба представляет собой весьма сложный комплекс аппаратуры и оборудования, служащего для создания необходимого потока воздуха, измерения аэродинамических сил, действующих на испытываемую модель летательного аппарата, измерения скорости газа, обтекающего модель, измерения плотности и температуры газа, характера течения и т. д. Подробное описание методов проведения этих измерений можно найти в специальной литературе. Помимо опытов в аэродинамических трубах, имеются и другие способы исследования воздействия потока на движущееся тело, например, применение летающих моделей, которые катапультируются наземными установками или сбрасываются с самолетов. При этом измерения осуществляются сложным комплексом наземной и установленной на модели аппаратуры. Для испытания парашютов, катапультируемых сидений пилота, прочности фюзеляжа и крыльев самолетов часто используются ракетные тележки, к которым прикрепляется испытуемый образец; тележка перемещается по рельсам силой тяги, создаваемой реактивными двигателями. Несмотря на наличие этих разнообразных «модельных» методов аэродинамических испытаний, большое значение имеют летные испытания опытных образцов самолетов и других натурных изделий, по результатам которых выносится окончательное суждение о качестве предлагаемой конструкции.

Наиболее важным приложением гидро- аэродинамики является конструирование самолетов и других летательных аппаратов, а также надводных и подводных кораблей (см. п. 6.5). Однако имеются и другие приложения ее законов. Так, в «промышленной аэродинамике» проводятся расчеты воздуходувок, ветровых двигателей, струйных аппаратов и т. п. Самостоятельное значение приобрела аэродинамика турбомашин и реактивных двигателей. Крупномасштабные аэродинамические процессы

разыгрываются в земной атмосфере и являются предметом исследования физической метеорологии, о чем уже упоминалось выше. Ниже в п. 6.3, будут описаны различные гидравлические машины и механизмы, разработка которых основана на применении изложенных выше основных законов гидродинамики.

6.3 Гидравлические машины и механизмы

Основные физические законы гидромеханики – уравнение Бернулли и теорема о неразрывности струи – используются в гидравлике – технической науке, являющейся основой разработки различных гидравлических машин и механизмов. Инженерные приложения рассматриваются в практической гидравлике, основными разделами которой являются гидравлика трубопроводов, гидравлика открытых русел, истечение жидкостей из отверстий и через водосливы и т. д. В гидравлике трубопроводов исследуются вопросы о пропускной способности труб, связанной с их гидравлическим сопротивлением, о распределении скоростей течения в трубах и т. д. В гидравлике русел исследуются закономерности течения воды в каналах и реках, в частности, распределение скоростей в потоке, давление воды на плотины и устой мостов. При исследовании истечения воды из отверстий и через водосливы выводятся расчетные соотношения для определения размеров отверстий в различных резервуарах, шлюзах, плотинах и т. д. Экспериментальные законы гидравлики находят широкое применение при инженерных расчетах весьма разнообразных машин, устройств и сооружений.

Механогидравлические машины применяются при гидравлической добыче угля для механического угольного массива с последующим смывом угля водой. В этих машинах разрушение угля и породы осуществляется тонкими струями с давлением от 5 до 50 МН/м² для угля и от 50 до 200 МН/м² для породы, водяными импульсами (300-1000 МН/м²) или комбинированно-механическим и гидравлическими способами (заметим, что 1 атм.=0,1 МН/м²), причем комбинированные машины являются наиболее перспективными.

Для разрушения горных пород и других целей, в частности, при открытой и подземной разработке залежей полезных ископаемых, используются мощные водяные струи, создаваемые гидромониторами. Гидромонитор содержит систему труб, соединенных шарнирами – неподвижно, и поворотного колена, отклоняемого в вертикальной плоскости ствола. Ствол оканчивается насадкой, в которой формируется струя воды высокого давления. В настоящее время созданы самоходные гидромониторы с дистанционным управлением.

Гидравлическая передача осуществляет передачу и преобразование механической энергии и движения с заданными усилиями и скоростью. Преобразование энергии осуществляется в гидросиловых передачах, а

преобразование движения в целях автоматизации управления. Гидропередача осуществляется в гидравлических приводах различных машин. При этом привод может быть гидростатическим объемным или же гидродинамическим; используются также приводы смешанного типа.

Объемная (гидростатическая) гидропередача осуществляет передачу энергий и преобразование механического движения за счет статического напора жидкости. Одним из самых распространенных устройств этого типа является гидравлический пресс, используемый для обработки материалов давлением – дляковки слитков, листовой штамповки и гибки, выдавливания труб и профилей, прессования порошковых материалов, в производстве пластмассовых и резиновых изделий, а также при синтезе под давлением (например, алмазов). Действие прессы основано на законе Паскаля – давление, оказываемое на жидкость внешними силами (создаваемыми насосами, пневматическими или гидравлическими устройствами, вручную и т. д.), передается без изменения по рабочему цилиндру с поршнем большого диаметра, который соединен с инструментом, создающим большое усилие на обрабатываемую деталь. Наиболее мощные прессы для объемной штамповки развивают усилия порядка 75000 тонн-сил (735 МН), что не является пределом возможностей. В металлорежущих станках объемная гидропередача состоит из объемного насоса, объемного гидравлического двигателя, резервуара для рабочей жидкости (минерального масла или синтетической жидкости) магистральных трубопроводов. Рабочие давления достигают 30-70 МН/м². Объемная гидропередача может использоваться для осуществления как возвратно-поступательного, так и вращательного движения. В отличие от этого, динамический гидропривод позволяет осуществить только вращательное движение. Эти устройства используются на транспорте, для привода корабельных винтов, шахтных подъемных машин, вентиляторов и т. д. Кроме того, в штамповочных прессах и газовых турбинах используются гидроприводы смешанного типа. Гидропривод легкового автомобиля включает гидротрансформатор (гидродинамическую передачу) и объемный гидропривод для управления сцеплением, тормозами и заполнением гидротрансформатора.

В гидроприводах машин используются гидравлические двигатели различных типов. В динамических двигателях (гидротурбине, водяное колесо) ведомое звено совершает вращательное движение в результате изменения момента количества движения жидкости. В статических (объемных) двигателях ведомое звено может совершать возвратно-поступательное или возвратно-поворотное движение (гидроцилиндры), или вращательное движение (гидромоторы). В силовых гидроцилиндрах связанный с поршнем шток совершает возвратно-поступательное движение относительно цилиндра. В моментных гидроцилиндрах (квадрантах) вал совершает относительно корпуса возвратно-поворотное движение. В поршневых гидромоторах рабочие камеры неподвижны, а вытеснители (поршни) совершают возвратно-поступательное движение. В роторных

гидромоторах рабочие камеры перемещаются, а вытеснители совершают вращательное движение (в кулисных моторах оно сочетается с возвратно-поступательным). Мощность гидромоторов достигает 3000 кВт, при давлении рабочей жидкости до 35 МН/м^2 (350 атм.).

Ограничение расхода жидкости или изменение давления потока осуществляется нерегулируемыми или регулируемыми гидравлическими дросселями. Дросселями первого типа служат втулки, шайбы, капилляры и т. п., второго типа – золотниковые пары, винтовые дроссели и т. д. Они применяются в приводах различных машин для регулирования скорости их рабочих органов, создания необходимых перепадов давления в гидросистемах и других целях регулирования и управления.

Для выполнения различных технологических операций (затяжки болтов, запрессовки и выпрессовки и т. д.) широко используются ручные инструменты с гидравлическим приводом в виде поршневых, ротационных и винтовых двигателей, развивающих в 10-раз большие давления по сравнению с пневматическими. Это позволяет получать значительно большие усилия или крутящие моменты при небольших габаритах инструментов.

В гидравлических машинах и приводах для предохранения от перегрузок, контроля направления потока жидкости, ограничения давления рабочей жидкости и других целей применяются гидравлические клапаны, в которых размер рабочего канала изменяется под воздействием проходящего через него потока рабочей жидкости.

При добыче нефти значительное повышение продуктивности скважин достигается путем гидравлического разрыва пластов, т. е. создания трещин в горных породах, прилегающих к буровой скважине. Это осуществляется закачкой рабочей жидкости насосными агрегатами под давлением $50\text{--}70 \text{ МН/м}^2$ с производительностью около 10 л/с. В пластах, насыщенных нефтью, обычно используются углеводородные жидкости (минеральные масла, высоковязкие масла и т. п.). После закачки в скважину рабочей жидкости и создания достаточного давления в пластах возникают вертикальные, и горизонтальные трещины длиной несколько десятков метров и шириной до нескольких см. После этого в скважину закачивают смесь вязкой жидкости с песком (размеры зерен песка до 1 мм) во избежание смыкания трещин. Метод часто используют в сочетании с обработкой скважин соляной и плавиковой кислотами.

Гидравлические устройства используются, как указывалось выше, для целей регулирования, усиления и т. д. в различных автоматизированных системах. Так, в гидравлических регуляторах в качестве чувствительных элементов используют различные мембранные или сильфонные устройства, преобразующие измеряемую величину в пропорциональное ему усилие, которое затем воздействует на исполнительный орган мембранного типа или же на основе гидроцилиндра. Достоинствами таких регуляторов являются простота и надежность конструкции и малые габариты. Эти же достоинства присущи гидроусилителям, в которых при перемещении управляющих

органов исполнительных механизмов обычно осуществляется усиление управляющего воздействия. В качестве управляющих механизмов используют переменные дроссели, например, сопла с заслонками или золотниковые пары, а – исполнительными механизмами служат поршни или управляющие золотники. Коэффициент усиления по мощности достигает 10^5 .

Наиболее важным народнохозяйственным применением энергии водяного потока является ее использование для добычи электроэнергии на гидроэлектростанциях (ГЭС). На протяжении многих лет ГЭС являлись единственными источниками электроэнергии в ряде районов. И в настоящее время, в эпоху бурного развития ядерной энергетики, гидроэнергетика сохраняет свое значение в электроснабжении всех отраслей народного хозяйства.

Гидроэлектростанция представляет собой большой и сложный комплекс различных сооружений, с помощью которых, обеспечивается необходимый напор воды, преобразование энергии потока в энергию вращения вала гидротурбины и, наконец, в электрическую энергию в гидрогенераторе. Напор создается концентрацией потока воды путем сооружения плотины либо деривации (совокупность сооружений, осуществляющих отвод воды из реки, например, каналов, туннелей, трубопроводов, и т. д.). В высокогорных (в горных условиях) ГЭС создаются напоры более 300 м с помощью плотин (Нурекская плотина – 310 м) и до 1500 м с помощью дериваций. В равнинных условиях напор обычно составляет 30-40 м.

В машинном зале ГЭС размещаются гидроагрегаты, состоящие из гидротурбины и гидрогенератора. Гидротурбины бывают активного и реактивного типа. В первых вода подводится к рабочему колесу турбины через сопла, а в реактивной турбине давление перед колесом выше атмосферного. КПД современных гидротурбин достигает 95%.

По расположению вала рабочего колеса гидротурбины бывают вертикальные и горизонтальные и наклонные, что определяет и тип гидроагрегата. Мощности современных турбин превышают 600 МВт.

С валом турбины соединен ротор гидрогенератора; обычно в качестве последнего используется явнополюсный синхронный генератор, конструкция которого определяется в основном мощностью гидротурбины и положением ее вала. Мощности современных гидрогенераторов превышают 600 МВт; КПД быстроходных генераторов со скоростью вращения выше 100 об/мин достигают 93 %. (Более подробно эти машины будут рассмотрены в т. II).

В садоводстве и виноградарстве для создания лунок (скважин) под посадку саженцев и виноградных черенков, для внесения удобрений и пестицидов и т. п. целей, используется гидравлическое приспособление – гидробур.

Гидробур состоит из вертикально расположенной трубы с гидромониторной головкой с наконечником. В гидробур поступает жидкость от автоцистерны, опрыскивателя и т. д. под определенным давлением. По

существо, это устройство является разновидностью гидромонитора сравнительно небольшой мощности.

Энергия текущей воды широко используется для целей гидромеханизации самых различных земляных и горных работ, в частности, таких технологических процессов, как разрушение горных пород (добыча полезных ископаемых в горном деле), намыв земляных сооружений (в строительстве, сельском хозяйстве при ирригационных и других работах), выемка грунта (в частности, при сооружении мостов, прокладке трубопроводов), гидравлический транспорт (перенос земли, шлаков и других масс в горном и строительном деле), и т. п. Эти процессы осуществляются с помощью различных гидравлических машин и устройств – гидромониторов, землесосных снарядов и др.

Уже около 100 лет при проходке горных пород средней и высокой твердости используется метод гидроударного бурения с помощью гидравлических машин ударного действия (гидроударных машин), обеспечивающий повышение эффективности бурения на 50-80% и снижение его стоимости на 20-30% по сравнению с традиционными способами бурения (например, алмазным инструментом). В гидроударную машину поступает поток воды под высоким давлением, нагнетаемой насосом с поверхности земли по колонне бурильных труб. Поток жидкости осуществляет эффективное разрушение породы и удаление продуктов разрушения на поверхность. При частоте ударов до 25 в секунду гидроударные машины создают нагрузку до 8000 Н (800 кгс).

6.4 Сверхзвуковое течение

Обычные упругие волны (см. ниже, в гл. 7), которые можно рассматривать как «слабое возмущение» состояния газа, распространяются в газе со скоростью звука, причем существенных изменений его плотности не происходит, т.е. газ можно считать «несжимаемым», как жидкость. Поэтому при расчетах, связанных с обтеканием тела «дозвуковым» потоком газа, сжимаемостью воздуха можно пренебречь, как было рассмотрено выше, в п. 6.2. Однако при возрастании скорости движения тела и ее приближении к скорости звука, (в воздухе при нормальных условиях – около 340 м/с, т. е. 1220 км/ч) этим эффектом уже нельзя пренебречь. Окологзвуковое и сверхзвуковое течения газа обладают рядом качественных особенностей, учет которых чрезвычайно важен при решении проблем, связанных с полетами самолетов и ракет со сверхзвуковыми скоростями, с работой паровых и газовых турбин, создающих при работе потоки газа под большими давлениями, проведением аэродинамических экспериментов в трубах со сверхзвуковым потоком воздуха, при проектировании высоконапорных турбокомпрессоров и т. д.

Рассмотрим картину распространения указанного выше «слабого возмущения» – локального повышения (импульса) давления – в воздухе со скоростью $c \approx 340$ м/с.

Пусть воздух, находящийся в трубе, закрытой с одной стороны поршнем под давлением P_0 , начинает сжиматься путем движения поршня с небольшой скоростью $V \ll c$ в некоторый начальный момент $t=0$ – рис. 6.9. При этом в газе распространяется возмущение в виде «волны давления» со

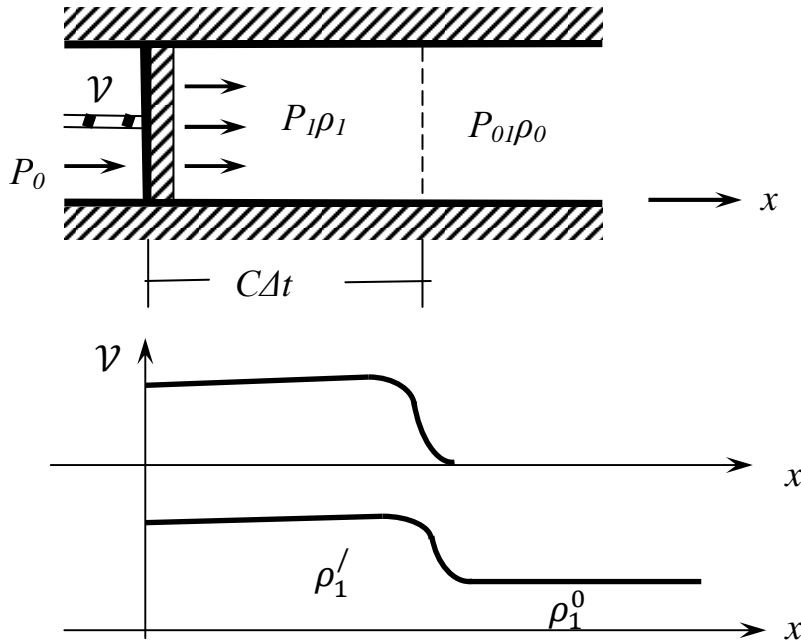


Рис. 6.9

скоростью c . Через некоторое время Δt перед поршнем движется столб газа с давлением $(P_0 + \Delta P)$. За его пределами скорость быстро падает до нуля, а давление до P_0 . С течением времени длина этого «возмущенного» столба газа возрастает. Импульс силы, приложенной к газу со стороны поршня, $F \Delta t = \Delta P S \Delta t$

(S – площадь сечения поршня), равен изменению количества движения (импульсу) столба газа $(\rho_0 + \Delta \rho)(C - V)S \Delta t V$, где $\rho_0 + \Delta \rho = \rho'$ – плотность сжатого воздуха перед поршнем. Согласно 2-му закону Ньютона, можно написать:

$$\Delta P = (\rho_0 + \Delta \rho)(C - V)V. \quad (6.39)$$

Кроме того, в столбе сжатого воздуха должен выполняться закон сохранения массы, которой можно записать в виде:

$$\rho_0 S C \Delta t = (\rho_0 + \Delta \rho)(C - U)S \Delta t. \quad (6.40)$$

Отсюда

$$\Delta \rho + \rho_0 = \rho_0 \frac{c}{c - V} \quad (6.41)$$

или

$$\Delta \rho + \rho_0 = \Delta \rho \frac{c}{V}. \quad (6.42)$$

Из (6.39) и (6.42) следует:

$$C^2 = \frac{\Delta P}{\Delta \rho}. \quad (6.43)$$

Таким образом, при малых ΔP и $\Delta \rho$ ($\Delta P \ll P_0, \Delta \rho \ll \rho$) скорость распространения волны возмущения в газе определяется выражением:

$$C \approx \sqrt{\frac{dP}{d\rho}}. \quad (6.44)$$

Из (6.44) видно, что скорость распространения звука в «абсолютно несжимаемой» среде должна стремиться к бесконечности (этим объясняется большая величина скорости звука в «практически несжимаемых» жидкостях).

Рассмотрим теперь случай большого начального «скачка» давления («удара») за небольшое время $\Delta\tau$. Перед поршнем установится некоторое распределение давления от P_0 до P_1 , схематически показанное на рис. 6.10. Распространение волны возмущения в этом случае можно представить как наложение «элементарных» волн с небольшими «скачками» давления $\Delta_1 P$, $\Delta_2 P$ и т. д. (заштрихованные области рис. 6.10), которые распространяются последовательно: «волна давления» $\Delta_1 P$ распространяется в среде под давлением P_0 , а волна давления $\Delta_2 P$ – в среде, уже сжатой до давления $P_0 + \Delta_1 P$, и т.д.

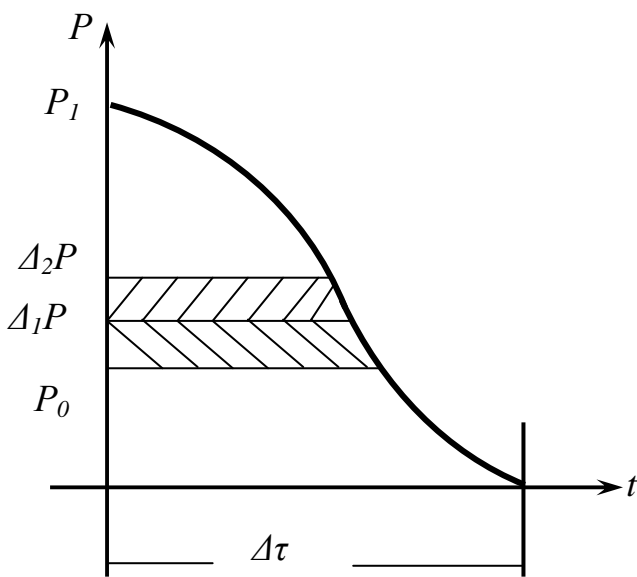


Рис. 6.10

Распространение волн возмущения со скоростью звука является «быстрым» процессом, и изменение состояния газа можно считать адиабатическим процессом, при котором $P \sim \rho^\gamma$ ($\gamma = C_p/C_v > 1$). Теперь $\frac{dP}{d\rho}$ уже не является константой ($\frac{dP}{d\rho} \sim \rho^{\gamma-1}$), и согласно формуле (6.44) скорость звука будет возрастать с повышением плотности.

В результате элементарные волны, вышедшие позже предыдущих, будут догонять их, поскольку они распространяются в уже сжатой среде. Их положение образует «импульс давления», показанный пунктиром на рис. 6.10. Таким образом, распространение «большого» возмущения в газе носит характер распространения «скачка» давления или «разрывной волны давлений», на границе которой имеет место разрыв величин давления и плотности газа. Скорость такой волны отличается от скорости звука (скорости распространения «слабого» возмущения). Тело, находящееся на пути волны, испытывает «удар» – его скорость нарастает скачком до большой величины; поэтому указанный процесс называется «ударной волной». (Более подробно процесс распространения ударной волны будет рассмотрен, в гл. 7).

Ударная волна является основным поражающим фактором при взрывах бомб и снарядов, а также при атомном взрыве. В последнем случае даже мелкие частицы (например, осколки стекла, мелкие куски дерева и т. д.) приобретают под действием, ударной волны настолько большие скорости, что сами становятся «поражающим» фактором.

Закономерности, обусловленные сжимаемостью воздуха, имеют место и в результате сжатия воздуха телом, движущимся со сверхзвуковой скоростью. Если форма тела является «клинообразной» – рис. 6.11а, то «головной» участок возникающей ударной волны перемещается практически вместе с острием. Возмущение, создаваемое острием в результате «соударения» с частицами газа, в каждый момент времени распространяется во все стороны в виде сферических волн, которые на достаточном удалении от острия имеют скорости, близкие к скорости звука c . Поэтому фронт ударной волны (огибающая всех этих сферических волн) имеет форму конуса

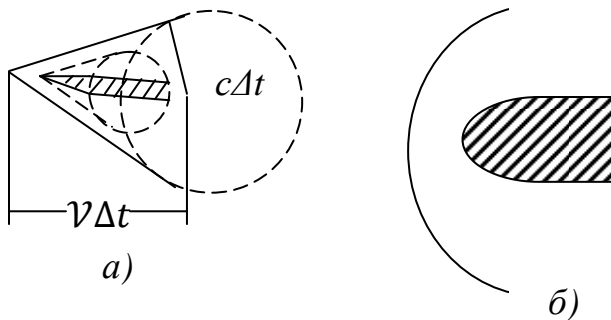


Рис. 6.11

с некоторым наклоном образующей α . Из геометрического построения, показанного на рис. 6.11а, видно, что величина α определяется выражением:

$$\alpha = \arcsin c/v. \quad (6.45)$$

Все частицы, находящиеся за пределами этого конуса, находятся в «невозмущенном»

состоянии. Если «угол раскрытия» клина превышает некоторое «предельное значение» то форма фронта ударной волны искривляется. За фронтом появляется область течения газа с «дозвуковой» скоростью. Переход к «сверхзвуковому» режиму течения сопровождается резким возрастанием лобового сопротивления движению тела.

Количественное описание сверхзвукового течения осуществляется на основе уравнений гидродинамики с учетом сжимаемости среды и адиабатического характера процесса изменения состояния среды (воздуха) при ее сжатии.

Адиабатический процесс будет более подробно рассмотрен с термодинамических позиций в гл. 10. Здесь мы отметим только, что адиабатическое сжатие или расширение газа возникает при столь быстром протекании процесса, что теплообмен с окружающей средой не успевает «выровнять» температуру сжимаемой области газа и внешней («невозмущенной») области. Поэтому адиабатический процесс сопровождается «тепловым эффектом» - изменением температуры газа: при адиабатическом расширении газ охлаждается, при сжатии – нагревается. При адиабатическом процессе вместо закона Бойля-Мариотта $PV = \text{const}$ – изменение объема, и давления связаны «уравнением адиабаты» или уравнением Пуассона:

$$PV^\gamma = \text{const}, \quad (6.46)$$

где $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ – отношение удельных теплоемкостей газа при постоянном давлении и постоянном объеме, соответственно, зависящее от рода газа.

Рассмотрим некоторые гидродинамические закономерности, обусловленные сжимаемостью среды. При этом будем исходить из приведенного выше – уравнения Бернулли, т. е. в первом приближении можно не учитывать вязкость газа и возможную турбулентность его течения.

Для случая безвихревого движения идеальной (невязкой) сжимаемой жидкости уравнение Бернулли может быть записано в обобщенном виде:

$$\frac{v^2}{2} + \int \frac{dP}{\rho} + U = const, \quad (6.47)$$

где U – потенциал объемных (массовых) сил (в частности, сил тяжести), а величина ρ зависит только от P (баротропная среда). В отличие от баротропных сред, в бароклинических средах плотность зависит и от других параметров. Так, в атмосфере плотность воздуха зависит от давления, температуры и влажности, поэтому она является, вообще говоря, бароклинической средой.

При вихревом движении выражение (6.47) справедливо для каждой вихревой линии (линии тока). Если течение горизонтально, то вместо (6.47) можно написать:

$$\frac{v^2}{2} + \int \frac{dP}{\rho(P)} = const. \quad (6.48)$$

При адиабатическом движении сжимаемой среды плотность зависит от давления следующим образом:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{P}{P_0} \right)^{1/\gamma}, \quad \gamma = \frac{c_P}{c_V} \quad (6.49)$$

Тогда из (6.48) можно получить выражение (уравнения Сен-Венана и Вантуеля):

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} = const. \quad (6.50)$$

Заметим, что если жидкость несжимаема, то это означает, что $\gamma \rightarrow \infty$, тогда $\frac{\gamma}{\gamma-1} \rightarrow 1$, и мы получим обычное уравнение Бернулли $\frac{\rho v^2}{2} + P = const$ при $U = const$. Если обозначить величины давления и плотности при $V=0$ через P_0 и ρ_0 , соответственно, то выражение для скорости принимает вид:

$$v^2 = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{P_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]. \quad (6.51)$$

При адиабатическом процессе

$$\gamma \frac{P}{\rho} = C^2, \quad (6.52)$$

где C – скорость звука в среде.

Поэтому можно написать:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{C^2}{\gamma-1} = const. \quad (6.53)$$

Принимая, что в данных условиях применимо уравнение состояния идеального газа, можно найти связь между температурой и скоростью течения газа:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} gRT = \text{const.} \quad (6.54)$$

На основе этого выражения можно объяснить ряд практически важных явлений, наблюдаемых, например, в авиационной практике. При замедлении потока газа у препятствия его температура должна повышаться. Такое явление (аэродинамический нагрев) всегда имеет место на практике. Повышение температуры, в особенности у передней кромки крыла, может достигать порядка 10^3K , что создает опасность разрушения материала крыла. Борьба с этим явлением осуществляется применением особо жаростойких материалов и систем охлаждения, а также выбором оптимальных условий полета. Ввиду большой скорости полета искусственных спутников Земли (порядка 8 км/с) для них существует проблема аэродинамического нагрева даже в верхних, сильно разреженных слоях атмосферы (на высотах 40-50 км).

Процессы, близкие по своему характеру к адиабатическому, можно наблюдать и в природе. Так, вертикальные перемещения воздушных масс в атмосфере, например, восходящее движение воздуха, обусловленные неравномерным его нагреванием над поверхностью Земли, нисходящие движения в антициклонах и т. п., можно приближенно рассматривать как адиабатические, поскольку теплообмен между перемещающейся массой и окружающей частью атмосферы можно считать малым, в частности, ввиду малости коэффициента теплопроводности воздуха и относительно небольшой разности температур между указанными частями атмосферы. Адиабатические перемещения воздуха сопровождаются соответствующими изменениями давления и температур: поднимающийся воздух охлаждается (давление падает), опускающийся нагревается (давление в нем возрастает). Эти изменения в «сухой» атмосфере («сухоадиабатический процесс»), можно выразить уравнением адиабаты:

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{P}{P_0} \right)^{R/c_p}. \quad (6.55)$$

При этом температура воздуха при наличии указанных процессов линейно понижается с высотой над поверхностью Земли:

$$T = T_0 - \frac{g}{c_p} h. \quad (6.56)$$

Величина $\frac{g}{c_p}$ называется «сухоадиабатическим градиентом» и близка к 0,01К/м. Для насыщенного влажного воздуха эти закономерности приближенно сохраняются.

Заметим еще, что в этих условиях атмосфера может считаться «баротропной» средой.

Если воздух содержит насыщенный водяной пар, то при адиабатическом охлаждении происходит конденсация пара, и выделение при этом скрытой теплоты испарения уменьшает эффект охлаждения.

Такой процесс называется «влажно-адиабатическим» и описывается уравнением конденсационной адиабаты, которое, при условии, что продукты конденсации остаются в воздухе во взвешенном состоянии, имеет вид:

$$(C_p - m_{0c}) \ln T + \frac{hm}{T} - R \ln(P - E) = \text{const}, \quad (6.57)$$

где m – количество насыщенного пара в 1 кг сухого воздуха, E – упругость насыщенного пара, h – скрытая теплота, m_0 – общая масса воды (в обеих фазах) в 1 кг сухого воздуха, C_p – удельная теплоемкость конденсированной фазы. При этом адиабатический процесс является обратимым. Если же продукты конденсации выпадают на Землю в виде осадков, то процесс является необратимым, и в этом случае называется псевдоадиабатическим.

Эти представления широко используются в физической метеорологии для качественного объяснения различных атмосферных явлений, а также для их количественного описания в рамках различных математических моделей атмосферы. В частности, они используются в особом разделе – динамической метеорологии, исследующей крупномасштабные движения воздуха в атмосфере (циклоны, штормы и т. д.). Кроме того, в метеорологической практике, с целью обработки текущих метеорологических данных, в частности, для определения точки росы, уровня конденсации и других параметров состояния атмосферы, используют так называемые «адиабатные диаграммы» различных типов, на которых по осям прямоугольной системы координат откладываются температура и давление воздуха (или же температура, высота, удельный объем, давление и т. п.). Диаграммы соответствуют изменению состояния воздуха при описанных выше сухоадиабатических и влажно-адиабатических процессах («сухие» и «влажные» адиабаты). На них приводятся также кривые упругости насыщенного пара в зависимости от того или иного параметра состояния атмосферы и другие метеорологические данные. При обработке аэрологических данных исследования «свободной» атмосферы (вдали от поверхности Земли) используют так называемые аэрограммы, т. е. адиабатные диаграммы в координатах $(\lg T) \div (-T \lg p)$. На таких диаграммах изотермы ($T = \text{const}$) представляются вертикальными прямыми (а изобары $P = \text{const}$) – расходящимися прямыми. На диаграммах наносятся сухие и влажные адиабаты и линии равной влажности (изограммы). Аэрограммы снабжаются дополнительными шкалами для определения различных параметров состояния атмосферного воздуха.

Рассмотрим теперь закономерности стационарного сверхзвукового течения в трубах переменного сечения. Этот вопрос имеет большое практическое значение при планировании аэродинамических экспериментов, в которых моделируется, например, полет самолета со сверхзвуковой скоростью в неподвижном воздухе. При этом можно исходить из закона постоянства массы («уравнения неразрывности течения») в виде:

$$\rho \mathcal{V} S = \text{const}. \quad (6.58)$$

Сечение трубы $S(x)$ считается функцией координаты x , ориентированной вдоль оси трубы; тогда величина ρ и \mathcal{V} также будут функциями этой координаты. Логарифмируя (6.58), получим:

$$\ln \rho + \ln \mathcal{V} + \ln S = \text{const.} \quad (6.59)$$

Полный дифференциал этого выражения будет равен 0:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{d\mathcal{V}}{\mathcal{V}} + \frac{dS}{S} = 0. \quad (6.60)$$

Второй закон динамики (6.39) можно теперь представить в виде:

$$-dP = \rho \mathcal{V} d\mathcal{V}. \quad (6.61)$$

Подставляя выражение для скорости звука $dP = C^2 d\rho$, имеем:

$$\rho \mathcal{V} d\mathcal{V} = -C^2 d\rho, \quad \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{\mathcal{V} d\mathcal{V}}{C^2}. \quad (6.62)$$

Подстановка в (6.60) приводит к следующему выражению для связи скорости потока с площадью поперечного сечения трубы:

$$\frac{dS}{S} = \frac{d\mathcal{V}}{\mathcal{V}} \left(\frac{\mathcal{V}^2}{C^2} - 1 \right). \quad (6.63)$$

Из этого выражения следует, что в месте сужения трубы ($dS < 0$) и $\mathcal{V} < C$ скорость потока возрастает: $d\mathcal{V} > 0$. При этом плотность газа уменьшится, как следует из (6.63). Таким образом, скорость в месте сужения может возрастать лишь до величины скорости звука C . В месте расширения ($dS > 0$) и $\mathcal{V} < C$ имеем $d\mathcal{V} < 0$, т.е. скорость потока уменьшится, а давление и плотность возрастают. Эти выводы совпадают с полученными выше на основе уравнения Бернулли для «несжимаемой» среды.

Если же $\mathcal{V} > C$, то картина получается существенно иной: в месте расширения трубы ($dS > 0$) $d\mathcal{V} > 0$, т.е. скорость потока в этом месте возрастает, а давление и плотность вдоль оси трубы уменьшится. Отсюда следует важный практический вывод: аэродинамическую трубу для «сверхзвуковых» экспериментов следует выполнять таким образом, как показано на рис. 6.12: вначале ее сечение сужается, а затем расширяется. При

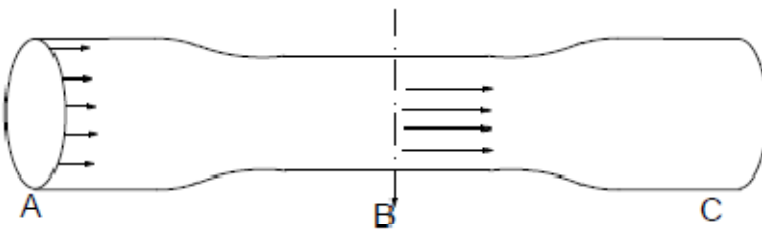


Рис. 6.12

правильно подобранном перепаде давления скорость потока будет возрастать от сечения А к сечению В, достигая скорости звука, а на последующем участке от В до С скорость будет продолжать возрастать, оставаясь «сверхзвуковой».

Модель самолета располагается на участке В-С, в зависимости от исследуемого интервала сверхзвуковых скоростей.

Наличие «разрывных волн» и «скачков плотности» вызывают повышение энтропии газа, поскольку эти процессы являются термодинамически необратимыми (см. гл. 10). Поэтому движение в газе со сверхзвуковой скоростью сопровождается дополнительным рассеянием

(диссипацией) механической энергии, что проявляется в виде резкого увеличения «лобового сопротивления» движению тела (см. ниже, п. 6.5). Поэтому для преодоления «звукового барьера» в авиации пришлось решить ряд сложных технических проблем, прежде всего обеспечение повышенной мощности авиационных двигателей. Это стало возможным после создания новых реактивных двигателей, принцип действия которых будет рассмотрен в гл. 10.

Другой важной проблемой явилась разработка оптимальных геометрических форм летательных аппаратов, обеспечивающих минимальную величину лобового сопротивления. Эта проблема была решена на основе обширных теоретических и экспериментальных исследований сверхзвукового течения. Было показано, что, в общем, аэродинамически оптимальным по форме является тело, нормаль к поверхности которого близка по направлению к плоскости, перпендикулярной к направлению движения тела, т.е. такое, заостренное с концов тело, движущееся с малым «углом атаки» (см. п. 6.5). Если такое тело движется с «умеренной» сверхзвуковой скоростью (превышающей скорость звука в 2-3 раза), что имеет место для современных самолетов, то создаваемые им возмущения в воздухе сравнительно невелики. Для этих условий разработана точная количественная теория, позволяющая рассчитывать подъемную силу и лобовое сопротивление при выбранной форме профиля крыла. Поэтому современные «сверхзвуковые самолеты» имеют острый «нос» и тонкие крылья, причем рациональной формой крыла оказывается «треугольная» или «стреловидная». При обтекании передней кромки крыла трубки тока в этих местах сужаются, и скорость потока возрастает, достигая в некоторых местах «сверхзвуковых» значений, аналогично условиям, показанным на рис. 6.12. Кромка «стреловидных» крыльев образует острый угол с направлением вектора скорости набегающего потока, и при определенной величине этого угла нормальная составляющая скорости (ответственная за «лобовое сопротивление») становится «дозвуковой», в результате чего сопротивление движению резко падает.

Определенными особенностями обладает течение с «гиперзвуковой» скоростью, значительно (в десятки раз) превышающей скорость звука. В этих, условиях сильное сжатие газа перед головной частью летательного аппарата и увеличение сил внутреннего трения между газом, увлекаемым при движении, и окружающими слоями, вызывают большой тепловой эффект – резкое возрастание температуры вблизи поверхности тела. При этих температурах (несколько тысячи кельвинов) возникают изменения физико-химических свойств воздуха в результате, например, термической диссоциации молекул двухатомных газов, входящих в состав воздуха, протекания химических реакций между газами (например, окисление азота), ионизации газа и т. д. Эти явления приходится учитывать в термодинамических расчетах адиабатических процессов, сопровождающих сверхзвуковое течение газа. В ряде случаев (например, в условиях полета на

больших высотах) приходится считаться также с отклонениями от «термодинамической равновесности» тепловых процессов (см. гл. 10), поскольку из-за большой скорости движения не успевают установиться равновесные значения параметров состояния газа (давления, плотности, температуры). Кроме того, большая степень ионизации обуславливает высокую электропроводность газа, что затрудняет радиосвязь с самолетом в этих условиях полета. Во избежание разрушения головной части летательного аппарата при гиперзвуковых скоростях необходимо делать «затупление» на ее переднем конце, что резко сказывается на режиме сверхзвукового обтекания.

В настоящее время полеты со сверхзвуковыми скоростями играют основную роль в гражданской и военной авиации. Решение указанных выше проблем сверхзвукового обтекания тел потоком воздуха позволило создать современные летательные аппараты, совершающие полеты на больших высотах (10000 км и выше) и обладающие большой грузоподъемностью, при скоростях, значительно превышающих скорость звука (1220 км/ч).

6.5 Летательные аппараты

Исключительно важным практическим приложением законов аэродинамики является теория полета и принципы конструирования летательных аппаратов (самолетов, вертолетов и др.). Полет таких аппаратов коренным образом отличается от «плавания» тел в воздухе, рассмотренного выше, и «основан» на совершенно иных физических принципах. Основой теории полета летательных аппаратов является теория подъемной силы крыла, которая будет кратко и упрощенно изложена ниже.

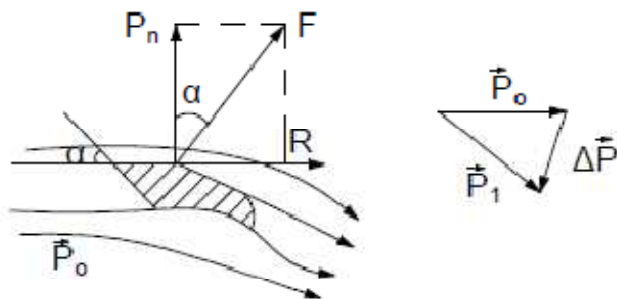


Рис. 6.13

Крыло самолета представляет собой пластину с закругленной передней кромкой и заостренной задней кромкой, расположенную под некоторым малым «углом атаки» α к потоку воздуха, обтекающего крыло при движении самолета (рис. 6.13). Встречая частицы воздуха, крыло, сообщает им некоторый дополнительный импульс $\Delta \vec{P}$, как

показано на этом же рисунке. Согласно 3-му закону Ньютона, частицы воздуха оказывают равное по величине и противоположное по направлению действие на крыло \vec{F} . Эта сила ориентирована приблизительно перпендикулярно оси крыла. Раскладывая силу \vec{F} на составляющие, получим «подъемную силу» $P_n = F \cos \alpha$ и «лобовое сопротивление» $R = F \sin \alpha$. При достаточно малом угле атаки $P_n \gg R$.

С точки зрения гидроаэродинамики, подъемная сила обусловлена характером течения воздуха вблизи крыла. При обтекании крыла воздухом скорость его частиц у верхней поверхности крыла больше, чем на нижней, т.е. крыло как бы «уплотняет» линии тока у верхней поверхности и «разрезает» их на нижней. Согласно уравнению Бернулли, давление у верхней поверхности крыла будет меньше, чем у нижней, и разность этих давлений создает подъемную силу крыла.

Элементарная количественная теория была предложена Ньютоном на основе упрощенного представления о передаче импульса частицам воздуха, независимо обтекающим крыло. Общая масса частиц, ударяющихся о крыло за ед. времени, равна $\rho S V_0$, где ρ – плотность воздуха, V_0 – скорость его частиц, S – площадь поверхности крыла. Поэтому частицам воздуха передается за это время импульс $\Delta P = \rho S V_0^2 \sin \alpha$. Согласно 2-му закону Ньютона, эта величина должна определять подъемную силу крыла. Действительно, опыты показали, что P_n пропорциональна $\rho S V_0$ (см. ниже), однако (при малых углах) это объясняется чрезмерным упрощением реальной ситуации в теории Ньютона. Более точная теория была разработана Н.Е. Жуковским.

Многочисленные экспериментальные исследования с помощью аэродинамических методов, описанных выше, позволили установить реальную картину обтекания воздухом крыла самолета. Наиболее важным фактом является циркуляционный характер обтекания, с образованием вихрей у задней кромки крыла. Это объясняется наличием вязкости у любого реального газа (или жидкости), т. е. взаимодействия между слоями воздуха и между ними и кромкой крыла. Если бы обтекающее крыло газ можно было бы уподобить идеальной (невязкой) жидкости, то на передней и задней кромках имелись бы «критические точки», в которых скорость потока равнялась бы нулю. Распределения скоростей у верхней и нижней поверхностей были бы «антисимметричны» относительно середины крыла. Можно показать, что вследствие этого равнодействующая сил на крыло равнялась бы нулю, и остался только момент, стремящийся повернуть крыло. Частицы «реальной» жидкости (газа), стремящиеся обогнуть заднюю кромку крыла снизу, теряют скорость в результате наличия сил вязкости (непосредственно прилегающий к твердой поверхности слой газа прилипает к ней, оказывая вязкое сопротивление движению смежных с ним слоев), а встречный поток не останавливается в критической точке, а продолжает вдоль поверхности двигаться и образует вихрь, который срывается с задней кромки и уносится потоком. При этом вместе с вихрем уносится определенный момент импульса, и согласно закону сохранения оставшийся газ приобретает некоторый противоположно направленный момент импульса (до образования вихря момент импульса газа был равен нулю). В результате возникает циркуляция, т.е. вращение газа (неидеальной жидкости) вокруг крыла противоположно вращению газа в вихре. Количественной

характеристикой такого движения является циркуляция Γ вектора скорости \mathcal{V}_0 замкнутому контуру с элементом dS , которая не зависит от формы контура:

$$\Gamma = \oint \vec{\mathcal{V}} d\vec{S} = \text{const.} \quad (6.64)$$

Согласно теории Н. Е. Жуковского «подъемную силу крыла F_n можно

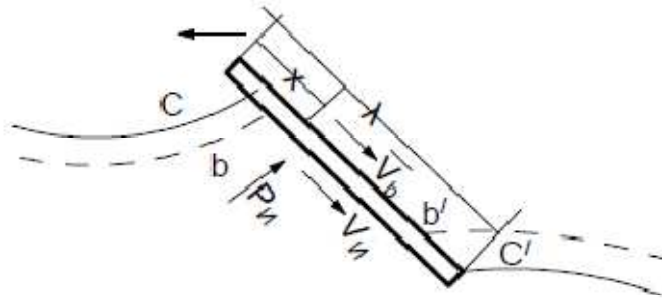


Рис. 6.14

связать с величиной циркуляции Γ . Для этого обтекание крыла «реальной жидкостью» (воздухом), представляется как наложение непрерывного обтекания крыла «идеальной» жидкостью и циркуляционного движения воздуха вокруг крыла. Само крыло может быть представлено пластиной, если оно является достаточно

тонким. Схема для дальнейшего вывода формулы Жуковского показана на рис. 6.14. При отсутствии циркуляции (непрерывное обтекание) линии тока показаны пунктирными линиями; b и b' представляют собой, соответственно, переднюю и заднюю критические точки, упомянутые выше (скорость потока идеальной жидкости обращается в 0). При наличии циркуляционного движения – сплошные линии – передняя критическая точка смещается в некоторое положение c , а задняя критическая точка, перемещенная на заднюю кромку крыла (c'), с которой срывается вихрь. Исходя из этого, расчет величины Γ дает:

$$\Gamma = \frac{1}{2} \pi \lambda \mathcal{V} \alpha, \quad (6.65)$$

где λ – так называемая «хорда» крыла.

Пусть на достаточном удалении от крыла скорость течения газа равна \mathcal{V}_0 , а давление в нем – P_0 . На некотором расстоянии x от передней кромки давление и скорость потока на верхней поверхности будут равны P_v и \mathcal{V}_v , а на нижней P_n и \mathcal{V}_n соответственно. Причем, согласно изложенному выше, $P_n > P_v$ и $\mathcal{V}_n < \mathcal{V}_v$. На элемент крыла шириной dx длиной l (в направлении перпендикулярно плоскости чертежа) действует подъемная сила $(P_n - P_v)l dx$, а полная подъемная сила на крыло равна $P_n = \int_0^\lambda (P_n - P_v)l dx$. Величину $P_n - P_v$ можно найти с помощью уравнения Бернулли, которое в данном случае принимает вид (для верхней и нижней поверхности крыла):

$$P_n = P_0 + \frac{\rho \mathcal{V}_0^2}{2} - \frac{\rho \mathcal{V}_n^2}{2}, \quad P_v = P_0 + \frac{\rho \mathcal{V}_0^2}{2} - \frac{\rho \mathcal{V}_v^2}{2}. \quad (6.66)$$

Отсюда $P_n - P_v = \frac{1}{2} \rho (\mathcal{V}_v^2 - \mathcal{V}_n^2) = \frac{1}{2} \rho (\mathcal{V}_v + \mathcal{V}_n)(\mathcal{V}_v - \mathcal{V}_n) \approx \rho \mathcal{V}_0 (\mathcal{V}_v - \mathcal{V}_n)$, поскольку при малых углах атаки \mathcal{V}_v и \mathcal{V}_n мало отличаются от \mathcal{V}_0 .

Тогда величина P_n равна $\rho V_0 l \int_0^\lambda (V_B - V_H) dx$. Окончательное выражение для подъемной силы в зависимости от циркуляции имеет вид (формула Жуковского-Кутта):

$$P_n = \rho l \Gamma V_0. \quad (6.67)$$

Подставляя Γ согласно (6.65), находим ($V = V_0$):

$$P_n = \frac{\pi}{2} \rho (l\lambda) V^2 \alpha. \quad (6.68)$$

Поскольку $l\lambda$ определяет площадь крыла S , то, согласно (6.68), $P_n \sim \rho S V_0^2 \alpha$ (при малых углах атаки), что хорошо согласуется с опытными данными (в отличие от теории Ньютона, здесь $P_n \sim \alpha$, а не α^2).

Подъемная сила аналогичной природы действует на вращающиеся в потоке воздуха (или жидкости) цилиндр (эффект Магнуса). Вследствие наличия сил вязкости цилиндр вовлекает прилипающие слои воздуха по касательной к его поверхности, в результате скорость течения на верхней стороне цилиндра возрастает, а на нижней – уменьшается (при направлениях потока и вращения цилиндра, показанных на рис. 6.15). При этом создается разность давлений $P_2 - P_1$, определяющая силу P_n . Корабль, на котором паруса были заменены вращающимися цилиндрами (роторами Флеттнера), действительно был построен. Однако вращающиеся цилиндры все же не смогли конкурировать с крыльями или парусами, и широкого практического применения эффект Магнуса не получил.

Рассмотрим некоторые экспериментальные данные о влиянии различных факторов на подъемную силу крыла P_n и лобовое сопротивление R . При конструктивных расчетах и аэродинамических испытаниях крыльев обе эти величины обычно представляют эмпирическими формулами вида:

$$P_n = C_y S \frac{\rho V^2}{2}, \quad R = C_x S \frac{\rho V^2}{2} \quad (6.69)$$

где величина $\frac{\rho V^2}{2}$ характеризует «гидродинамический напор» потока воздуха, S – площадь крыла, C_y , C_x – безразмерные коэффициенты, зависящие

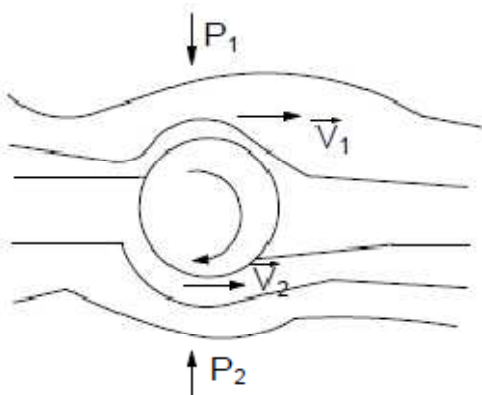


Рис. 6.15

от угла атаки, геометрии крыла и характеристик течения (числа Рейнольдса Re). Эти зависимости и исследуются при аэродинамических испытаниях проектов крыла.

Величина C_y возрастает с увеличением отношения длины крыла l к его хорде λ . При малых углах атаки α величина C_y пропорциональна α , как уже отмечалось выше, до некоторого значения $\alpha_l \approx 10^\circ$, после чего темп роста C_y – замедляется. При критическом угле атаки $\alpha_{кр}$ ($10^\circ - 15^\circ$) величина C_y (и подъемная сила) достигает максимума; величина α зависит прежде всего от числа Re и

формы профиля крыла. При $\alpha > \alpha_{кр} C_y$ спадает. Величина $C_{y_{max}}$, соответствующая $\alpha = \alpha_{кр}$, определяет минимальную скорость полета, при которой самолет может держаться в воздухе. При посадке самолета приходится снижать скорость, и подъемная сила также быстро уменьшается, что может поставить под угрозу безопасность посадки. Для снижения меры этой опасности следует максимально увеличивать C_y , что позволяет соответственно снизить посадочную скорость атаки.

Очевидно, что для увеличения $C_{y_{max}}$ следует увеличить $\alpha_{кр}$. Снижение подъемной силы с увеличением α выше $\alpha_{кр}$ объясняется срывом потока с верхней поверхности крыла (до задней критической точки, причем с ростом α область этого срыва расширяется). В зоне срыва давление практически равно атмосферному, поэтому разность давлений сверху и снизу уменьшается, и подъемная сила резко падает. Для борьбы с этим явлением используются различные специальные приемы конструирования крыльев, например,

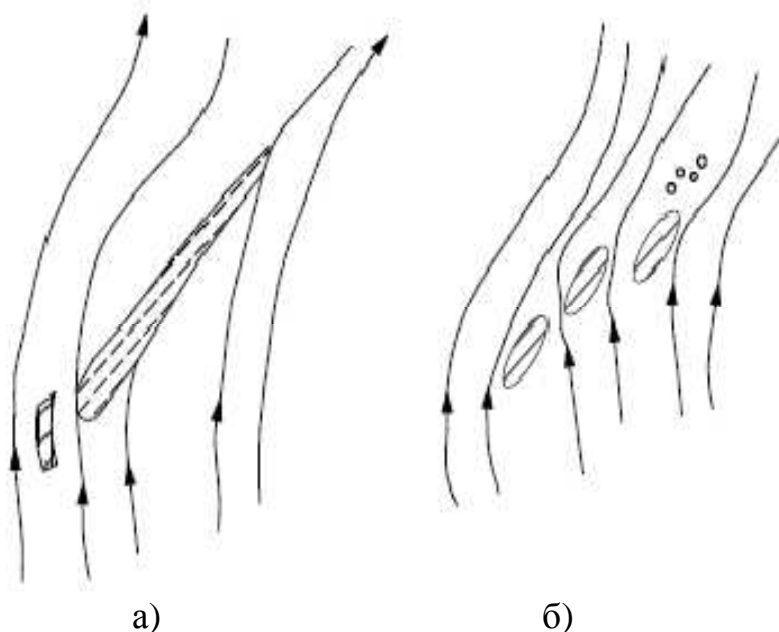


Рис. 6.16

применение предкрыльев (рис. 6.16а) и разрезных крыльев (рис. 6.16). В обоих случаях причины повышения α_l аналогичны. При прохождении потока воздуха через щель между предкрылком и крылом (или между частями разрезного крыла), он прижимается к верхней поверхности крыла, что приводит к увеличению скорости и падению давления в этой области,

следовательно, к увеличению $C_{y_{max}}$ и увеличению $\alpha_{кр}$. Этот же принцип реализуется и в живой природе: птицы при посадке часто развешивают перья на крыльях, образуя подобные «разрезного» крыла (это явление исследуется в бионике, принцип которой был рассмотрен выше).

Лобовое сопротивление при удачной конструкции крыла значительно меньше подъемной силы так что в (6.69) $C_x \ll C_y$; например, при C_y в интервале $-0,2 \div 1,2$ величина C_x обычно составляет от 0,02 до 0,2. Как и C_y , величина C_x также возрастает с увеличением угла атаки α . Отношение P_n/R или C_y/C_x определяет «качество» крыла и также зависит от α . При конструировании крыла специальными аэродинамическими исследованиями определяют оптимальные углы атаки, при которых качество крыла максимально.

При известных величинах подъемной силы P_n и лобового сопротивления R можно построить динамическую картину полета летательного аппарата. Простейшим случаем является равенство нулю равнодействующей всех сил, действующих на самолет; такими силами, помимо P_n и R , являются еще вес самолета P_g и сила тяги двигателя F . Если $P_n = P_g$, $R = F$, то самолет находится в горизонтальном полете с постоянной скоростью. Если $P_n \neq P_g$, то самолет движется с ускорением вверх или вниз;

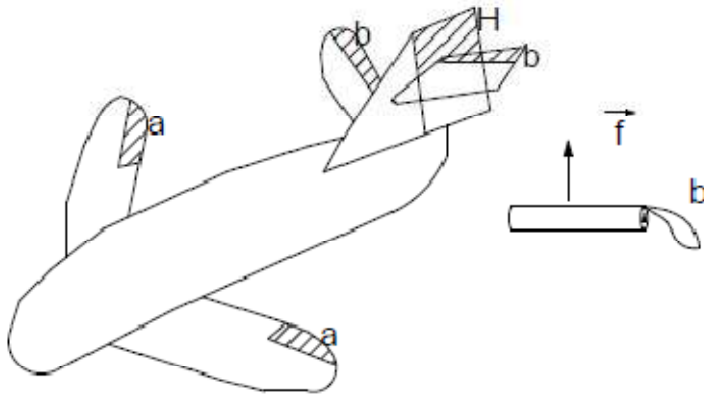


Рис. 6.17

поскольку такая ситуация может случайно возникнуть в полете, то в задней части самолета устанавливается стабилизатор (хвостовое горизонтальное оперение самолета), рис. 6.17. При случайном отклонении самолета от состояния равновесия происходит изменение угла атаки стабилизатора и возникает сила, возвращающая самолет в

исходное состояние. Однако необходимо иметь возможность и целенаправленно изменять высоту полета (это особенно существенно для военных самолетов, особенно истребителей, совершающих весьма сложные маневры во время воздушного боя). Для этой цели служат рули высоты, размещающиеся в задней части стабилизатора и представляющие собой его отклоняющиеся вниз части. При отклонении руля вниз возрастает подъемная сила, действующая на стабилизатор, и носовая часть самолета опускается вниз; при возвращении руля в исходное положение самолет набирает высоту.

Отклонение крыльев от горизонтального направления осуществляется с помощью элеронов – отклоняющих частей крыльев (a на рис. 6.17), которые действуют по тому же принципу, что и рули высоты. Поворот самолета относительно вертикальной оси производится с помощью руля поворота, расположенного на вертикальном хвостовом оперении (H на рис. 6.17); его принцип действия аналогичен указанному выше.

К теории летательных аппаратов примыкают также способы создания силы тяги самолета F , необходимой для преодоления лобового сопротивления R . В современных самолетах осуществляются 2 основных способа: с помощью вращающегося винта («пропеллера») и с помощью реактивного двигателя.

Самолетный винт содержит несколько лопастей, каждая из которых по существу представляет собой крыло с переменным углом атаки. Воздух отбрасывается лопастями вращающегося винта и получает от них импульс, зависящий от массы отброшенного воздуха и скорости его течения. В

соответствии с 3-м законом Ньютона винт при этом приобретает некоторый импульс, что эквивалентно действию на него силы, создающей тягу самолета.

Сила тяги, создаваемая реактивным двигателем, также зависит от объемного (или массового) расхода воздуха и скорости выброшенного воздуха, т. к. действие этого двигателя в значительной мере аналогично действию винта. В реактивный двигатель при его работе засасывается воздух, в нем сжигается топливо, и воздух выбрасывается с большой скоростью назад в смеси с горячими выхлопными газами (продуктами сгорания топлива); при этом в силу 3-го закона Ньютона (или закона сохранения импульса) двигателю сообщается усилие тяги в противоположном направлении.

Существует значительное количество разновидностей самолетных реактивных двигателей, существенно различающихся принципиальным устройством и конструктивным исполнением. Так, воздушно-реактивный двигатель (ВРД) засасывает и сжимает воздух в процессе движения самолета. В отличие от этого, турбореактивный двигатель (ТРД) может развивать силу тяги и в неподвижном самолете. В нем засасывание и сжатие осуществляются компрессором, который приводится в движение турбиной, находящейся непосредственно вблизи выходного сопла в струе газов – продуктов сгорания топлива в воздухе. Существенно иным принципом действия обладает ракетный (пороховой или жидкостный) двигатель, содержащий горючее и окислитель непосредственно в самом летательном аппарате. Его сила тяги не зависит от наличия воздуха вокруг аппарата и всегда численно равна μc , где c – скорость выбрасываемых газов (относительно ракеты), а μ – выбрасываемая каждую секунду масса газов. (Движение ракет с такими двигателями подробнее рассматривается в гл. 4).

Оценку силы тяги, создаваемой самолетным реактивным двигателем, можно сделать различными способами. Пусть двигатель за 1с засасывает и выбрасывает массу воздуха $\mu_в$ при скорости полета V и выбрасывает массу раскаленных газов $\mu_г$ со скоростью выброса c . Поскольку атмосферный воздух до попадания в двигатель можно считать неподвижным, то в результате засасывания воздуха на самолет действует реактивная сила сопротивления, направленная против движения в нужном направлении. В то же время в результате выброса массы $(\mu_в - \mu_г)$ в 1с со скоростью c возникает реактивная сила, направленная вперед, поскольку обычно $\mu_г \ll \mu_в$. Результирующая сила тяги F реактивного двигателя, следовательно, приблизительно равна:

$$F = \mu_в(c - V). \quad (6.70)$$

К этому же выводу можно прийти на основе закона сохранения импульса: масса воздуха $\mu_в$ приобретает в процессе работы двигателя импульс $\mu_в(c - V)$ в системе координат, связанной с Землей, поэтому такой же импульс должен приобрести самолет, так что сила реактивной тяги будет определяться по (5.70). Ясно, что для создания реактивной тяги необходима

достаточная скорость выброса воздуха и раскаленных газов: $C > V$. Кроме того, увеличение силы тяги достигается и при увеличении массы засасываемого воздуха в 1 с, т. е. объёмного (массового) расхода воздуха через двигатель. Это достигается различными способами, подробное рассмотрение которых опускаем.

Особый класс образуют космические летательные аппараты – автоматические межпланетные станции, искусственные спутники Земли, космические корабли. Здесь же отметим, что первый этап полета – взлет с Земли и последний: этап космического перелета – посадка на поверхность планеты происходят в газовой атмосфере, и при этом следует учитывать принципы полета, изложенные выше. Если исследуемая планета не имеет атмосферы, то ракетный двигатель используется вплоть до контактирования корабля с ее поверхностью. Если же планета имеет атмосферу, то используют также и обусловленные этим аэродинамические силы, действующие на корабль и космонавтов. В частности, использование подъемной силы позволяет снизить перегрузки, неблагоприятно влияющие на состояние организма космонавта. Изменением подъемной силы можно управлять космическим кораблем при его посадке, что позволяет повысить ее точность. При взлете наличие атмосферы создает дополнительные проблемы разгона корабля. Применяются в основном составные космические летательные аппараты, состоящие из стартовой ракеты, собственно (орбитального или космического) корабля и спускаемого аппарата, причем назначение стартовой (отделяемой) ракеты заключается в разгоне корабля в атмосфере Земли до орбитальной (или большей) скоростей.

В перспективе будут созданы космические аппараты, которые смогут взлетать непосредственно с поверхности Земли и садиться на ее поверхность подобно самолету; при разработке этих проектов используются все современные достижения в области летательных аппаратов тяжелее воздуха.

ГЛАВА 7 МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

7.1 Законы гармонических колебаний

Колебательные движения, т. е. периодические отклонения от положения равновесия, чрезвычайно распространены в природе и технике. Зависимость величины отклонения от времени в простейшем случае может носить синусоидальный характер:

$$X = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (7.1)$$

Такие колебания называются гармоническими и характеризуются тремя основными параметрами: амплитудой, т.е. максимальным отклонением от положения равновесия, циклической частотой $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$, где T – период колебаний, т. е. длительность «полного» колебания, в результате которого тело возвращается в исходное состояние ($T/2$ характеризует длительность «простого» колебания), а ν – частота колебаний. Смысл «циклической» частоты выясняется при установлении глубокой связи между колебательным и вращательным видами движения (рис. 7.1). Если некоторый вектор длиной (\vec{A}) (вектор амплитуды) вращается с угловой скоростью ω , то

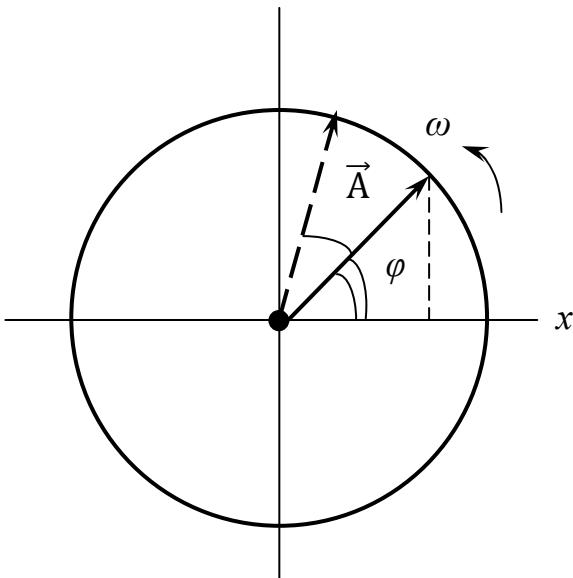


Рис. 7.1

его проекция на некоторую ось X изменяется по закону (7.1). Отсюда сразу выясняется смысл величины φ – начальной фазы колебаний: полный угол поворота – фаза колебаний – равен $\omega t + \varphi$, а φ – значение этой величины при $t=0$ (в момент начала колебаний). Глубокая связь между колебанием и вращением используется во многих технических приложениях (см. ниже).

Физическая причина распространенности колебательных движений в природе заключается в существовании упругих и «квазиупругих» сил, величина

которых пропорциональна отклонению колеблющейся системы от положения равновесия. Собственно «упругие» силы возникают при деформации тел согласно закону Гука, рассмотренному выше, в гл. 3:

$$F_y = -kx. \quad (7.2)$$

Здесь k характеризует жесткость системы (например, пружины), которая тем больше, чем больше модуль упругости деформируемого материала. «Квазиупругие» силы подчиняются тому же закону (7.2), но не являются упругими по природе. В частности, рассматриваются колебания

математического (или физического) маятника под действием составляющей силы тяжести, возникающей при его отклонении от положения равновесия. При малых смещениях эта составляющая пропорциональна смещению, согласно (7.2). Упругие силы действуют также и при крутильных колебаниях диска, подвешенного на нити в его центре. При закручивании нити на малый угол возникает вращающий момент, пропорциональный величине этого угла.

Причина распространенности гармонических колебаний в технике заключается в наличии во многих механизмах сил, стремящихся вернуть тело в положение равновесия и пропорциональных отклонению от него. При максимальном отклонении (в точке «возврата») тело покоится, и его кинетическая энергия $T = \frac{mv^2}{2}$ равна нулю. Напротив, в положении равновесия, в котором тело находится по инерции, кинетическая энергия максимальна. Напротив, потенциальная энергия, равная $\mathcal{V} = \frac{\mu X^2}{2}$, максимальна в крайних положениях колеблющегося тела и равна нулю в положении равновесия. Так обстоит дело при любой природе силы, действующей на колеблющееся тело. Таким образом, гармонические колебания по существу представляют собой периодическое превращение кинетической энергии в потенциальную и наоборот. Если силы сопротивления движению тела отсутствуют, то превращения механической энергии в тепловую не происходит, и первоначальный запас механической энергии $W = T + \mathcal{V}$ не расходуется (колебательная система является консервативной). Таким образом, при отсутствии внешних сил гармонические колебания системы должны продолжаться вечно и называются собственными незатухающими колебаниями.

Закон сохранения механической энергии при гармонических колебаниях имеет вид:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = W = \text{const.} \quad (7.3)$$

Исходя из этого, нетрудно вывести уравнение колебаний (7.1). Для этого учтем, что $\mathcal{V} = \frac{dx}{dt} = \dot{X}$, и продифференцируем (7.3) по времени. После соответствующих вычислений получим:

$$\dot{X}(m\ddot{X} + kX) = 0. \quad (7.4)$$

Это уравнение распадается на два: $\dot{X} = 0$ и $m\ddot{X} + kX = 0$, первое из которых, очевидно, не является уравнением колебаний ($\mathcal{V}=0$ – состояние покоя, т. е. тривиальное решение).

Второе уравнение при введении обозначения

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} \quad (7.5)$$

принимает вид:

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0. \quad (7.6)$$

Общее решение этого дифференциального уравнения второго порядка имеет вид (7.1), причем A и φ играют роль постоянных интегрирования. Постоянная φ (начальная фаза) определяется начальным условием

$$X_x(t = 0) = X_0, \quad (7.7)$$

откуда

$$\varphi = \arcsin \frac{X_0}{A}. \quad (7.8)$$

Вторая постоянная (амплитуда колебания) определяется из закона сохранения энергии (7.3): при максимальном отклонении $X_{max}=A$ (при этом $\sin(\omega t + \varphi)$) кинетическая энергия равна нулю, поэтому $kA^2/2=W$, откуда

$$A = \sqrt{\frac{2W}{k}} = \sqrt{\frac{2W}{m\omega_0^2}}. \quad (7.9)$$

Если известна амплитуда колебаний, то полный запас механической энергии в колебательной системе равен

$$W = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}. \quad (7.10)$$

Потенциальная (U) и кинетическая (T) энергия, в отличие, от W , изменяется периодически в процессе колебаний. Из формулы (7.1) следует, что

$$\mathcal{V} = \dot{X} = \omega A \cos(\omega t + \varphi). \quad (7.11)$$

Поэтому для величин T и \mathcal{V} в зависимости от времени имеем:

$$T = \frac{m\mathcal{V}^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi) = W \cos^2(\omega_0 t + \varphi), \quad (7.12)$$

$$\mathcal{V} = \frac{kX^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = W \sin^2(\omega_0 t + \varphi). \quad (7.13)$$

Учитывая, что $\cos^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2}[1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi)]$; $\sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2}[1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi)]$, находим, что период изменения энергии (T или \mathcal{V}) равен половине периода колебаний (это вполне естественно, поскольку, энергия в отличие от смещения X , не может быть отрицательной величиной).

С помощью формулы (7.12) или (7.13) можно вычислить средние значения кинетической или потенциальной энергии за период колебаний. Для этого следует учесть, что среднее значение величины $\sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t \pm \varphi\right)$ или $\cos^2(\omega_0 t + \varphi)$ за период T_0 равно:

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)t\right] dt = \frac{1}{2} T_0 \cdot \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2}. \quad (7.14)$$

Поэтому для средних значений T и U имеем:

$$\bar{T} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} T(t) dt = \frac{1}{2} W; \quad \bar{U} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} U(t) dt = \frac{1}{2} W = \bar{T}. \quad (7.15)$$

Приведенные формулы дают достаточно полное количественное описание процесса собственных гармонических колебаний.

Для вычисления «собственной частоты» колебательной системы по формуле (7.5) необходимо знать «коэффициент жесткости» системы K . Если рассматриваются колебания под действием сил упругости, возникающих в деформированных элементах системы, то величина K связана с модулем

упругости материала этих элементов. В качестве примера такого элемента можно взять винтовую пружину, имеющую весьма разнообразные применения в технике. Анализ на основе методов сопротивления материалов показывает, что при растяжении или сжатии винтовой пружины ее витки работают в основном на кручение. Удлинение пружины ΔX под действием осевой растягивающей силы P определяется по формуле:

$$\Delta X = \frac{8D^3n}{Gd^4}. \quad (7.16)$$

Сравнивая с формулой (7.2), мы видим, что «жесткость» K цилиндрической винтовой пружины определяется выражением:

$$K = \frac{Gd^4}{8D^3n} = \frac{Gd}{8C^3n}, \quad (7.17)$$

где G – модуль сдвига кручения материала пружины, d – диаметр проволоки, из которой изготовлена пружина, D – средний диаметр пружины, n – число ее витков; величина $C=D/d$ называется индексом пружины.

Рассмотрим пример, пусть пружина изготовлена из стального прутка $d=16$ мм (рессорная пружина), с индексом $C=8$ и числом витков $n=8$; для стали $G \approx 8 \cdot 10^4$ Н/мм². Растет по формуле (7.17), дает: $K \approx 4 \cdot 10^4$ Н/м. Если нагрузка на пружину составляет $m \approx 10^4$ кг (например, вагон трамвая), то по формуле (7.5) находим: $W \approx 2$ с⁻¹, $T_0 = 2\pi/W \approx 3$ с. Таково будет оценочное значение периода «качки» подрессоренного вагона.

Если сила F_y является «квазиупругой», то величину «жесткости» системы K следует определять из конкретного анализа действующих сил. Так, в случае математического маятника массы m и длиной l соотношение между смещением от положения X (при малых X) имеет вид

$$F = \frac{mg}{l} X. \quad (7.18)$$

Отсюда $K = \frac{mg}{l}$, и формула (7.5) дает $W_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$, так что период колебаний равен $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$. В случае физического маятника $K = \frac{mg}{l_{np}}$, где l_{np} – приведенная длина физического маятника. Аналогичным образом поступают и в других случаях, поскольку дело сводится по существу к выводу формулы вида (7.2) с дальнейшим его использованием (7.5).

Рассмотрим несколько более сложный пример колебания груза на тяжелой пружине, массой которой m_{np} нельзя пренебречь по сравнению с массой груза m , так что формула (7.5) становится непригодной. В этом случае формулу для W_0 можно получить на основе применения закона сохранения механической энергии. При малых колебаниях груза с амплитудой a каждый виток пружины, находящейся на расстоянии x от точки подвеса при нерастянутой пружине, колеблется с амплитудой $A=(x/l) \cdot a$ (l – длина пружины). Если общее число витков равно N , то амплитуда колебаний i -го витка равна $A_i = \frac{i a}{N}$. Кинетическая энергия всей пружины в момент

прохождения грузом положения равновесия получается путем суммирования по всем N виткам:

$$T_{\text{пр}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{m_{\text{пр}}}{N} \omega_0^2 A_i^2 = \frac{m_{\text{пр}} \omega_0^2 a^2}{2K N^2} \sum_{i=1}^N i^2 = \frac{m_{\text{пр}} \omega^2 A^2}{2N^3} \frac{N(N+1)(N+2)}{6} \quad (7.19)$$

(здесь $\frac{m_{\text{пр}}}{N}$ – масса одного витка пружины). В практически распространенном случае $N \gg 1$ $T_{\text{пр}} = \frac{1}{2} \frac{m_{\text{пр}}}{3} \omega_0^2 a^2$, а с учетом груза кинетическая энергия системы равна:

$$T = \frac{1}{2} m a^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} \frac{m_{\text{пр}}}{3} a^2 \omega_0^2 = \frac{1}{2} \left(m + \frac{m_{\text{пр}}}{3} \right) a^2 \omega_0^2 \quad (7.20)$$

или

$$T = \frac{1}{2} m' a^2 \omega_0^2, \quad (7.21)$$

где m' – «исправленная» масса (с учетом пружины). Формула (7.5) теперь дает:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m'}}, \quad m' = m + \frac{m_{\text{пр}}}{3}. \quad (7.22)$$

Если условие $N \gg 1$ не выполнено, то следует использовать полную формулу (7.19).

Обычно колебания механических систем, предоставленных самим себе, с течением времени более или менее быстро затухают. Этот эффект имеет чрезвычайно большое значение в технике, поскольку для получения незатухающих колебаний приходится применять специальные методы, описанные ниже.

Затухание собственных механических колебаний характерно для рассматривавшихся выше диссипативных систем, в которых существуют процессы, сопровождающиеся превращением механической энергии в другие виды энергии. Такими процессами обычно являются различные виды трения – «сухое» и «вязкое» трение. Первый вид трения характерен для случая взаимного скольжения твердых тел, например, оси балансира часов в подшипниках и т. п. При этом в первом приближении силу трения F_T можно считать не зависящей от относительной скорости движения. Второй вид трения возникает при движении тела в вязкой газообразной и жидкой среде. Согласно закону Стокса, в этом случае в первом приближении можно считать силу трения пропорциональной скорости движения. В первом случае колебательная система является нелинейной, и отношение потерь колебательной энергии за один период к начальному запасу энергии не остается постоянным во времени; во втором случае система является линейной и указанное отношение остается неизменным в течение всего процесса затухания колебаний.

В результате диссипации энергии амплитуда колебаний постепенно убывает. Математический анализ показывает, что характер этого убывания амплитуды в указанных двух случаях существенно различен.

Рассмотрим вначале линейную колебательную систему, в которой сила сопротивления движению пропорциональна скорости $V \equiv \dot{X}$. Уравнение колебаний в этом случае можно представить в виде:

$$\ddot{X} + 2\beta\dot{X} + \omega_0^2 X = 0, \quad (7.23)$$

где β – коэффициент затухания, ω_0 – собственная частота (в отсутствие затухания) (смысл введения множителя 2 выяснится ниже).

Будем искать решение этого уравнения в виде гармонического колебания с частотой $\omega \neq \omega_0$ и переменной во времени амплитудой $A(t)$:

$$X = A(t)\sin\omega t. \quad (7.24)$$

Подставляя в (7.23) и выполняя дифференцирование, а затем, разделив полученное уравнение почленно на $\sin\omega t$ и проведя перестановку слагаемых, получим:

$$\ddot{A} + 2\beta\dot{A} + (\omega_0^2 - \omega^2)A + 2\omega(\dot{A} + \beta A)\operatorname{ctg}\omega t = 0. \quad (7.25)$$

Для того чтобы это уравнение выполнялось в любой момент времени, необходимо, очевидно, чтобы множитель при периодической функции $\operatorname{ctg}\omega t$ был равен 0, т. к. $A(t)$ (три первых члена) не является периодической функцией в силу физической природы рассматриваемого явления. Поэтому положим:

$$\dot{A}(t) + \beta A(t) = 0. \quad (7.26)$$

Решение при начальном условии $A(t=0)=A_0$ имеет вид экспоненциальной функции:

$$A = A_0 \exp(-\beta t) \quad (7.27)$$

(теперь выясняется смысл выбора множителя 2 в исходном уравнении (7.23)). Согласно (7.25) и (7.26) имеем второе условие, определяющее собственную частоту затухающих колебаний:

$$\ddot{A} + 2\beta\dot{A} + (\omega_0^2 + \omega^2)A = 0. \quad (7.28)$$

Подставляя сюда решение для $A(t)$ (7.27), после сокращения на $e^{-\beta t}$ и других преобразований находим для искомой частоты затухающих колебаний ω :

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (7.29)$$

Отсюда видно, что затухающие колебания остаются периодическими лишь при не слишком сильном затухании ($\beta \leq \omega_0$); при больших β возникает аperiodический режим затухания, т. е. возникшее отклонение колебательной системы от положения равновесия постепенно убывает со временем, и колебания не возникают. Напротив, при очень малых β колебания близки по своему характеру к собственным колебаниям с частотой ω .

Поскольку амплитуда является «дискретной» величиной, т.е. достигает 0 только в определенные моменты времени (рис. 7.2), то часто оказывается более удобным характеризовать быстроту затухания величиной логарифмического декремента затухания δ :

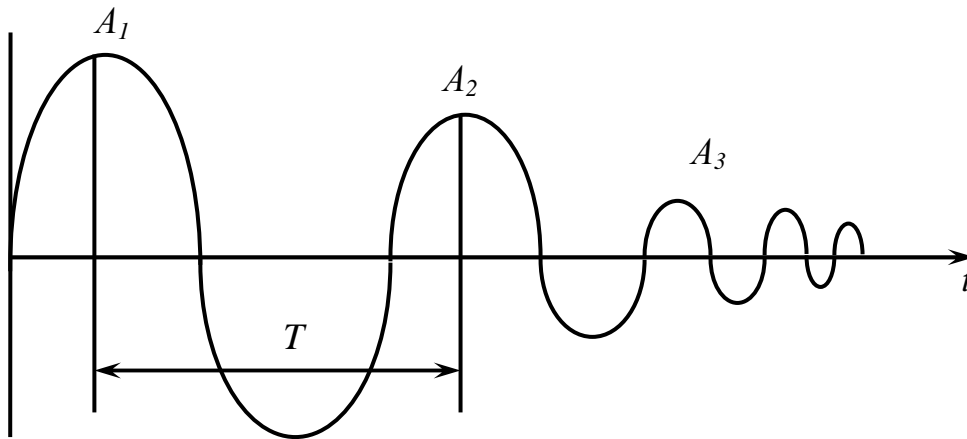


Рис. 7.2

$$\delta = \ln \frac{A_1}{A_2}. \quad (7.30)$$

С учетом формулы (7.27) легко найти, что

$$\delta = \beta T. \quad (7.31)$$

Иногда используются также «затухание» $d = \frac{\delta}{\pi}$ и обратная ему «добротность» колебательной системы $Q = 1/d$.

Заметим, что, согласно формуле (7.27), амплитуда должна обратиться в 0 лишь при $t \rightarrow \infty$. Однако ни в какой реальной колебательной системе затухающие колебания не могут длиться вечно – они прекращаются при определенном времени затухания. Причина этого заключается в том, что когда амплитуда колебаний станет сравнимой с амплитудой теплового движения атомов колеблющегося тела, его уже нельзя считать движущимся как целое – его состояние при этом ничем не будет отличаться от состояния покоящегося тела. Если же учесть наличие броуновского движения молекул газа или жидкости, окружающих тело, то колебания следует считать прекратившимися уже по достижению величины $A(t)$ характерного значения амплитуды броуновского движения.

Рассмотрим теперь второй случай – нелинейную механическую систему, в которой затухание обусловлено силой «сухого» трения $F_{тр}$ не зависящей от скорости движения системы. В этом случае математический анализ (который детально воспроизводить не будем) показывает, что амплитуда колебаний убывает со временем по линейному закону – за каждый период колебаний на определенную величину a . При $A(t)$ колебания прекращаются (упругая сила не может преодолеть силу трения, препятствующую движению). Таким образом, совершив некоторое число колебаний, система остановится в некотором положении в пределах «полосы застоя» $\pm a$ (см. рис. 7.3).

Одним из возможных способов создания незатухающих колебаний механической системы является приложение внешних сил, периодически изменяющихся со временем с требуемой частотой ω . При этом в системе

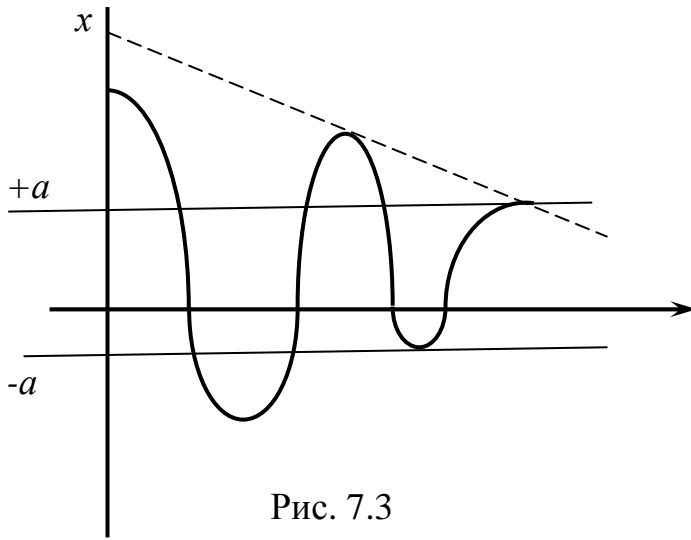


Рис. 7.3

возникают «вынужденные» колебания с «внешней» частотой ω , отличающейся от собственной частоты системы ω_0 , и с некоторой амплитудой и начальной фазой, значения которых, вообще говоря, зависят от соотношения между ω и ω_0 . Рассмотрим эту зависимости более подробно.

При наличии периодической внешней силы $F = F_0 \cos \omega t$, действующей на

колеблющееся тело массой m , уравнение колебаний (7.23) принимает вид:

$$\ddot{X} \pm 2\beta\dot{X} + \omega_0^2 X = f_0 \cos \omega t, \quad f_0 = \frac{F_0}{m}. \quad (7.33)$$

Математический анализ показывает, что решение этого уравнения можно представить в виде суммы двух слагаемых, одно из которых соответствует собственным колебаниям с естественной частотой ω_0 , затухающим с течением времени, а второе – вынужденным колебаниям с частотой ω с амплитудой A и начальной фазой φ :

$$X = A \cos(\omega t + \varphi). \quad (7.34)$$

Таким образом, через достаточный промежуток времени после начала колебаний их «собственная» составляющая затухает, а «вынужденная» будет сохраняться в течение всего времени воздействия внешней силы.

Подстановка (7.34) в (7.33) дает:

$$A[(\omega_0^2 - \omega^2) \cos(\omega t + \varphi) - 2\beta\omega \sin(\omega t + \varphi)] = f_0 \cos(\omega t). \quad (7.35)$$

Преобразование этого выражения приводит к сумме двух гармонических составляющих вида:

$$\begin{aligned} & \{A[(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi - 2\beta\omega \sin \varphi] - f_0\} \cos \omega t + \\ & + A[-(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi - 2\beta\omega \cos \varphi] \sin \omega t = 0. \end{aligned} \quad (7.36)$$

Для того чтобы это равенство выполнялось тождественно (при любом t), необходимо, чтобы

$$\begin{cases} A[(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi - 2\beta\omega \sin \varphi] = f_0 \\ (\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi - 2\beta\omega \cos \varphi = 0 \end{cases}. \quad (7.37)$$

Из второго уравнения определяется начальная фаза вынужденных колебаний:

$$\varphi = \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}. \quad (7.38)$$

Используя этот результат, после некоторых преобразований из первого уравнения получается выражение для амплитуды вынужденных колебаний:

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}. \quad (7.39)$$

Зависимость A от ω носит сложный характер; исследование этой зависимости с помощью известного критерия $\frac{dA}{d\omega}$ показывает, что амплитуда вынужденных колебаний A принимает максимальное значение при частоте

$$\omega_{max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (7.40)$$

При малом затухании

$$\omega_{max} = \omega_0. \quad (7.41)$$

Амплитуда колебаний достигает максимального значения:

$$A_{max} = \frac{f_0}{2\beta\omega}. \quad (7.42)$$

При малых β амплитуда может стать очень большой. Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при частоте внешней силы, близкой к собственной частоте колебаний, называется механическим резонансом. Это явление необходимо учитывать при расчетах различных конструкций.

Большое практическое значение имеет вопрос о сложении гармонических колебаний. Во многих случаях колебательная система содержит несколько источников колебаний, и возникающее результирующее колебание может сильно отличаться от гармонического (примером подобного рода являются «биения», рассматриваемые в п. 7.2). Однако в простейших случаях это колебание может носить и гармонический характер. Рассмотрим, например, сложение двух гармонических колебаний одинаковой частоты, происходящих в одном и том же направлении X :

$$X_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad X_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2). \quad (7.43)$$

(Этот случай имеет место, в частности, при возникновении интерференции волн, см. ниже).

Результирующее колебание можно вычислить с помощью простой формулы

$$X = X_1 + X_2. \quad (7.44)$$

Это положение называется «принципом суперпозиции» (наложения колебаний). Преобразования выражения для X по формулам тригонометрии носит весьма громоздкий характер. Значительно проще использовать метод векторных диаграмм, иллюстрируемый рис. 7.1.

Представим колебания (7.43) в виде вращения векторов амплитуд $\overline{A_1}$ и $\overline{A_2}$ с угловой скоростью ω и начальными фазами φ_1 и φ_2 – рис. 7.1. Тогда результирующее колебание (7.44) будет представлено вращением вектора $\overline{A_1} + \overline{A_2} = \overline{A_c}$ той же угловой скоростью ω и начальной фазой φ , а его проекция на ось X равна:

$$X = A \cos(\omega t + \varphi). \quad (7.45)$$

Выполняя некоторые вспомогательные геометрические построения (пунктир на рис. 7-4), легко найти следующие выражения для величин A и φ :

$$A = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1), \quad (7.46)$$

$$\varphi = \arctg \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}. \quad (7.47)$$

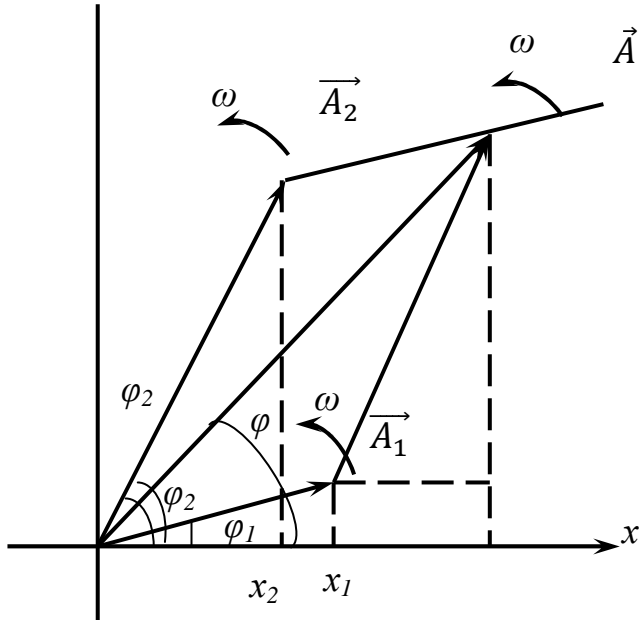


Рис. 7.4

Таким образом, в данном случае результирующее колебание также оказывается гармоническим и описывается формулой (7.45). Из рис.7.4, кроме того, сразу видно, что при $\omega_1 \neq \omega_2$ результирующее колебание окажется сложным (негармоническим) поскольку вектор амплитуды \vec{A} уже не будет совершать равномерное вращение с постоянной скоростью ω .

Метод векторных диаграмм получил особое распространение в электротехнике при рассмотрении цепей переменного тока (см. т. II курса).

Рассмотрим теперь коротко сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний одинаковой частоты вдоль направлений X и Y :

$$X = A_1\cos(\omega t + \varphi_1), \quad Y = A_2\cos(\omega t + \varphi_2). \quad (7.48)$$

Исключая время из этих уравнений, мы получим уравнение траектории результирующего движения колеблющегося тела $Y=Y(X)$. После некоторых преобразование можно получить следующее выражение:

$$\frac{X^2}{A_1^2} + \frac{Y^2}{A_2^2} - \frac{2XY}{A_1A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (7.49)$$

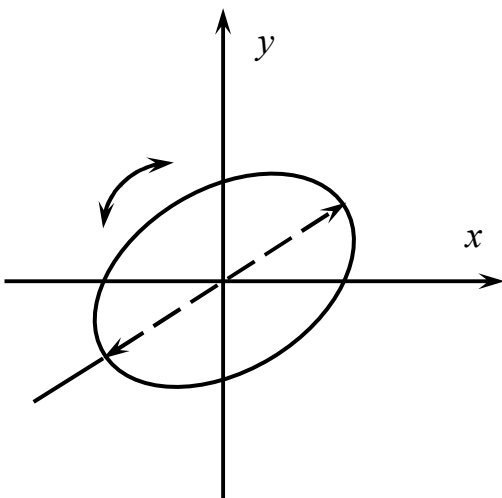


Рис. 7.5

Это — уравнение эллипса, определенным образом ориентированного относительно осей X и Y (рис. 7.5).

Таким образом, тело, принимающее участие одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, совершает движение по эллипсу; направление этого движения зависит от соотношения между начальными фазами колебаний φ_1 и φ_2 . В случае $\varphi_1 = \varphi_2$ получим: $\left| \frac{X}{A_1} - \frac{Y}{A_2} \right| = 0$ или $Y = \frac{A_2}{A_1}X$; если же $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$, то $\left(\frac{X}{A_1} + \frac{Y}{A_2} \right) = 0$, или $Y = -\frac{A_2}{A_1}X$.

В этих случаях эллипс «вырождается» в прямую, т. е. опять получается гармоническое результирующее колебание (пунктир на рис. 7.5). Если $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$, то получим: $\left(\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2}\right) = 1$, т. е. полуоси эллипса будут ориентированы вдоль координатных осей X и Y . При $A_1 = A_2$ этот эллипс превращается в окружность. При $\omega_1 \neq \omega_2$ результирующее движение будет носить более сложный характер и изображается так называемыми «фигурами Лиссажу».

7.2 Колебательные системы в технике

Как уже указывалось выше, собственные незатухающие колебания практически не реализуются, поскольку в той или иной мере всякое колебание сопровождается диссипацией механической энергии и при отсутствии подвода энергии извне неизбежно затухает со временем. Создание незатухающих колебаний осуществляется двумя основными способами – приложением внешней силы к колебательной системе или подводом к системе энергии, пополняющей запас в системе. В первом случае возникают вынужденные колебания, во втором случае говорят об автоколебаниях. Рассмотрим соответствующие иллюстративные примеры.

Согласно формуле (7.42) амплитуда вынужденных колебаний резко возрастает в условиях резонанса, т. е. приближения частоты вынуждающей силы ω к частоте собственных колебаний системы ω_0 . Такое устройство, настроенное на «резонанс» с внешним воздействием, называется «резонатором». Резонаторы широко применяются в самых различных областях механики (механические резонаторы), акустики (акустические резонаторы), радиотехники, оптики и др. С их помощью можно проводить, в частности, анализы сложных колебаний.

При значительных отклонениях ω от ω_0 резонатор не дает «отклика», амплитуда его вынужденных колебаний мала. При приближении $\omega \rightarrow \omega_0$ «отклик» резонатора возрастает, причем тем более резко, чем меньше затухание колебаний в резонаторе (т. е., чем больше его «добротность», см. выше). Это «анализирующее» действие резонатора используется в различных измерительных устройствах, например язычковых частотомерах. В этих приборах резонаторами служат упругие металлические пластинки – «язычки», закрепленные таким образом, чтобы собственная частота их колебаний была точно известна. Передавая язычкам исследуемое внешнее воздействие, фиксируют максимум амплитуды колебаний какого-либо язычка и тем самым определяют частоту этого воздействия. Таким путем измеряют, например, частоту переменного тока в электротехнике или же число оборотов вала машины, которая совпадает с частотой колебаний (вибраций) корпуса машины.

Явление резонанса при вынужденных колебаниях может быть и вредным и даже быть причиной аварийных ситуаций. Выше уже упоминалось о возможности разрушения конструкций (например, мостов)

при определенных – «резонансных» – частотах внешних воздействии. Остановимся более подробно на весьма распространенном явлении вынужденных колебаний, вызываемых вращением валов машин в опорах и в самих валах. При вращении тяжелого маховика на валу всегда имеется некоторая разбалансировка, т. е. центр тяжести маховика не находится точно на оси вала (проходящей через центры подшипников). При вращении маховика с угловой скоростью ω возникает инерционная центробежная сила $F = m\omega^2 X$ (m – масса маховика, X – расстояние от центра маховика до оси вала), которая, очевидно, носит квазиупругий характер и вызывает колебания, т. е. периодический прогиб вала с той же частотой ω . Через опоры (подшипники) вала эти колебания передаются всему корпусу машины, а затем фундаменту, стенам и т. д., создавая вибрации, которые вызывают шум и могут стать причиной разрушения опорной конструкции. С увеличением мощности и скорости вращения (например, в паровых турбинах) возрастает опасность самого разрушения вала. Очевидно, что эта опасность наиболее велика при приближении частоты оборотов к собственной частоте колебаний маховика ω_0 . Величина ω_0 может быть оценена по формуле (7.5), в которой под m следует теперь понимать массу маховика (обычно она значительно больше массы вала), а под k – жесткость вала по отношению к прогибу. Ясно, что если собственная частота ω_0 велика, то при возрастании скорости вращения неизбежно наступит момент, когда $\omega \approx \omega_0$, и возникает опасность разрушения вала. Поэтому увеличение жесткости вала не может дать нужных результатов: при этом возрастает собственная частота ω_0 , и опасность разрушения лишь отодвигается в сторону больших скоростей вращения. Поэтому в современном турбостроении (и в др. областях техники) пошли по другому пути: вал делается менее жестким, но скорость вращения маховика в условиях работы машины выбирается значительно больше «критической» частоты ω_0 . При разгоне машины до рабочей частоты оборотов область критической частоты стремится проходить как можно быстрее, так что в момент $\omega = \omega_0$ амплитуда вынужденных колебаний не успевает достигнуть опасной величины.

Весьма важной и сложной является проблема борьбы с резонансными вибрациями в современной авиации. Двигатели сверхзвуковых самолетов (о них подробнее см. гл. 10) развивают огромные мощности при высоких скоростях вращения. Возникновение резонанса в корпусе и основных узлах самолета в этих условиях может вызвать полное разрушение конструкции за весьма короткое время.

В настоящее время разработаны надежные методы выявления «критических» диапазонов частот и методы борьбы с явлениями резонанса путем соответствующего точного расчета конструкций.

Обратимся к рассмотрению второго пути создания незатухающих (гармонических или негармонических) колебаний, заключающегося в периодическом подводе к колебательной системе механической энергии от внешнего источника с целью пополнения убыли энергии системы в

процессах диссипации. Такие системы называются «автоколебательными» и широко распространены в технике. Типичными примерами являются часовые механизмы различных типов, музыкальные (струнные и духовые) инструменты (см. 7.5). Автоколебания можно часто наблюдать и в природе, например, колебания листьев ветвей и стволов деревьев под действием ветра и т. д.

Автоколебательные системы характеризуются наличием незатухающих колебаний при наличии диссипации колебательной (механической или электромагнитной) энергии, и как указано выше, возможность незатухающих колебаний в таких системах обусловлена непрерывным или периодическим поступлением «дозированной» энергии извне, компенсирующим диссипированную часть колебательной энергии. При этом амплитуда и частота являются «собственными» и не определяются внешним источником энергии, в чем заключается коренное отличие автоколебаний от вынужденных колебаний (например, колебания маятника часов с гирями или балансира пружинных часов поддерживаются с помощью анкерного механизма, обеспечивающего периодическое «подключение» источника энергии за счет поднятой гири или сжатой пружины к колеблющемуся маятнику или балансиру). Есть много и других примеров. Так, колебания струны в смычковом музыкальном инструменте (скрипке) поддерживаются за счет мускульной энергии музыканта, перемещающего смычок по струнам; колебания столба воздуха в инструментах типа гармони поддерживаются за счет движения мехов, опять-таки приводимых в движение руками играющего и т. п. А в немеханических системах, например, в ламповом генераторе электромагнитных колебаний источником энергии является выпрямитель или батарея и т. д.

Во всех этих случаях, очевидно, что характеристики автоколебаний определяются свойствами самой колебательной системы, а не внешнего источника энергии. Стационарная амплитуда колебаний устанавливается в том случае, когда имеет место компенсация диссипации колебательной энергии за период колебаний. Именно так обстоит дело, например, в часовых механизмах. Если же поступление энергии в систему превышает в отдельные моменты диссипацию энергии в ней, то амплитуда колебаний изменяется, стремясь к новому стационарному значению.

От указанного соотношения между поступлением и диссипацией энергии зависит устойчивость автоколебаний. Если поступление энергии в систему превышает диссипацию энергии в ней при любых, сколь угодно малых амплитудах, то происходит «самовозбуждение» колебаний: амплитуда начавшегося в силу случайных причин колебания будет возрастать, стремясь к некоторому устойчивому (стационарному) значению, зависящему от характеристик системы. Если амплитуда случайно превысила стационарное значение, то потери энергии превысят ее поступление (за период колебаний), и амплитуда вернется к стационарному значению. Однако возможны случаи, когда при уменьшении амплитуды потери энергии в системе за период

колебаний превышают поступление энергии извне; при этом случайное уменьшение амплитуды ниже стационарного уровня будет возрастать, и, в конце концов, колебания прекратятся («срыв» автоколебаний). В противоположном случае (когда при увеличении амплитуды поступление энергии извне за период колебаний начинает превышать диссипацию энергии) амплитуда будет возрастать (в пределах – до разрушения колебательной системы). В таких случаях автоколебания являются неустойчивыми и могут существовать лишь ограниченное время.

Зависимость характеристик (колебаний, механического смещения, силы тока и т. д. от времени) определяется свойствами колебательной системы, и интенсивностью процесса диссипации колебательной энергии. Количественной мерой этого процесса является отношение полного запаса колебательной энергии в системе W_k к величине потери (диссипации) энергии за один период колебаний W_∂ . Величина

$$Q = 2\pi \frac{W_k}{W_\partial} \quad (7.50)$$

называется добротностью колебательной (механической или электрической) системы. Для простейших колебательных систем (например, механической системы, в которой имеют место колебания под действием упругих сил, или электрической системы – колебательного контура с активным сопротивлением, см. выше) добротность может быть оценена по формуле:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\alpha}, \quad (7.51)$$

где ω_0 – собственная (циклическая) частота колебаний, α – показатель затухания системы (см. выше). Для различных автоколебательных систем добротность может варьировать в очень широких пределах. Автоколебания системы с высокой добротностью очень близки по частоте и форме к собственным колебаниям системы, поскольку поступление внешней энергии, необходимое для поддержания незатухающих колебаний, настолько мало, что практически не сказывается на характере колебательного процесса. Во многих подобных случаях форма автоколебаний является гармонической. Если же добротность системы мала, то поступление энергии должно быть велико и сказывается на характере автоколебаний. В этом случае возможны большие отклонения от гармонической (синусоидальной) формы, обычно характерной для малых собственных колебаний.

Математическое описание автоколебаний, по сравнению со случаем собственных (и вынужденных) колебаний, существенно осложняется их нелинейностью, обусловленной обязательным наличием в такой системе нелинейного элемента, характеристики которого определяются состоянием самой системы (например, в упомянутом выше ламповом генераторе таким элементом является электронная лампа, сопротивление которой зависит от приложенного анодного напряжения см. т. II, п. 9.1). Именно наличие такого элемента определяет существование стационарной амплитуды автоколебаний (в их отсутствие баланс потерь и поступления выше, оказывается нелинейным).

При наличии только одной колебательной степени свободы подобное уравнение может быть записано в следующем общем виде:

$$\frac{d^2 U}{dt^2} + \omega_0^2 U = f(U) \frac{dU}{dt}, \quad (7.52)$$

где U – периодически изменяющаяся величина, зависящая от природы автоколебаний (например, смещение в случае механической системы), ω_0 – «собственная частота» системы, зависящая только от линейных элементов системы (например, для лампового генератора $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$), $F(U)$ – функция, характеризующая нелинейные элементы системы, обычно задаваемая в виде полинома по степеням U :

$$F(U) = \alpha + \beta U + \gamma U^2 + \dots \quad (7.53)$$

Очевидно, что при отсутствии нелинейных элементов уравнение (7.52) превращается в дифференциальное уравнение собственных гармонических колебаний.

Общего решения даже этого простейшего уравнения автоколебаний не существует. Поэтому применяют различные приближенные методы или же рассматривают частные (предельные) случаи. Например, многие колебательные системы, используемые в современных приборах, обладают весьма высокой добротностью, как уже указывалось выше (например, в часовых механизмах она достигается применением специальных подшипников – «каменей» – с очень малым трением и износом). В этом случае величина в правой части (7.52) является малой по сравнению со слагаемыми в левой части при всех реальных значениях U . При этом решение приближенно записывают в виде уравнения гармонического колебания $U = U_0 \sin \omega_0 t$, а правая часть становится равной нулю в среднем за период при определенном значении амплитуды U_0 , которая является стационарной амплитудой автоколебаний.

Для выяснения характера установления стационарной амплитуды применяется метод медленно меняющихся амплитуд, в котором решение уравнения (7.52) отыскивается в виде:

$$U = K(t) \sin \omega_0 t. \quad (7.54)$$

При подстановке в (7.52) и отбрасывании всех «гармонических» членов с частотами $n\omega_0$ ($n=1,2,\dots$), которые дают нуль в среднем за период колебаний, получается уравнение для функции $K(t)$ вида

$$\frac{dK}{dt} = \Phi(K), \quad (7.55)$$

причем вид $\Phi(K)$ определяется видом функции $F(U)$ в (7.52). Решение этого уравнения определяет характер приближения амплитуды автоколебаний к стационарному значению U_0 .

Если характер автоколебаний далек от синусоидального, то описанные количественные

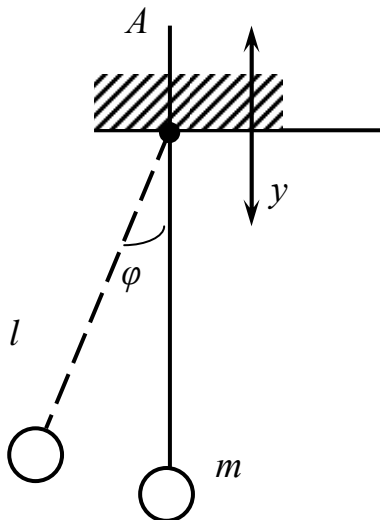


Рис. 7.6

методы исследования становятся непригодными, и применяются различные качественные методы анализа (например, метод построения фазовых диаграмм), описанные в специальной литературе.

В некоторых случаях воздействие окружающих тел на колебательную систему (при наличии или отсутствии в ней затухания) сводится к изменению со временем одного из ее параметров. Типичным примером является маятник, точка подвеса которого A совершает, периодическое движение в вертикальном направлении по закону $Y_A = a \cos \gamma t$ (рис. 7.6). Функция Лагранжа в этом случае имеет вид:

$$L = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2 + mly a^2 \cos \gamma t \cos \varphi + mgl \cos \varphi \quad (7.56)$$

или, при малых колебаниях ($\varphi \ll 1$):

$$L = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2 + mly a^2 \cos \gamma t + mgl. \quad (7.57)$$

Уравнение движения в этом случае может быть представлено в виде:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \left[1 + 4 \frac{a}{l} \cos(2\omega_0 + \varepsilon)t \right] \varphi = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}. \quad (7.58)$$

В общем случае функция Лагранжа для колебаний содержит параметры K и m ($L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}$); если они зависят от времени, то уравнение Лагранжа дает:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) + kx = 0. \quad (7.59)$$

Подстановкой $d\tau = \frac{dt}{m(t)}$ (7.59) приводится к виду:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + mkx = 0. \quad (7.60)$$

Поэтому, не ограничивая общности, можно рассматривать уравнение

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0, \quad (7.61)$$

которое получается из (7.60) при $m = \text{const}, k = k(t)$. Общий вид решений следующий:

$$x_1(t) = \mu_1^{t/T} P_1(t), \quad x_2(t) = \mu_2^{t/T} P_2(t), \quad (7.62)$$

где $P_1(t)$ и $P_2(t)$ – чисто периодические функции времени (с периодом T), и $\mu_1 \mu_2 = 1$. Если μ_1 и μ_2 вещественны, то

$$x_1(t) = \mu^{t/T} P_1(t), \quad x_2(t) = \mu^{-t/T} P_2(t). \quad (7.63)$$

Одна из этих функций (в зависимости от того, $|\mu| > 1$ или $|\mu| < 1$) экспоненциально возрастает со временем. Таким образом, состояние равновесия $x=0$ оказывается неустойчивым: при случайном отклонении от него смещение x быстро нарастает со временем. Это явление называется параметрическим резонансом.

Пусть $\omega(t)$ мало отличается от $\omega_0 = \text{const}$ и периодически изменяется со временем:

$$\omega^2(t) = \omega_0^2(1 + h \cos \gamma t). \quad (7.64)$$

Именно так обстоит дело в приведенном выше простом примере. Сделаем замену:

$$\gamma = 2\omega_0 + \varepsilon, \quad \varepsilon \ll \omega_0. \quad (7.65)$$

Решения получающегося при этом уравнения движения (уравнение Матье)

$$\ddot{x} + \omega_0^2 [1 + h \cos(2\omega_0 + \varepsilon)t]x = 0 \quad (7.66)$$

ищут в виде:

$$x = a(t) \cos\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t + b(t) \sin\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t, \quad (7.67)$$

пренебрегая при этом членами высшего порядка малости по h . Путем соответствующих вычислений можно показать, что параметрический резонанс должен иметь место вблизи удвоенной собственной частоты колебаний системы $2\omega_0$, в интервале расстояний от нее ε :

$$-\frac{h\omega_0}{2} < \varepsilon < \frac{h\omega_0}{2}, \quad (7.68)$$

т. е. с шириной $h\omega_0$.

Параметрический резонанс имеет место также при частотах γ изменения параметра системы, близких к $\frac{2\omega_0}{n}$, n – целое число:

$$\gamma = \frac{2\omega_0}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.69)$$

Однако «интенсивность» резонанса, т. е. усиление колебаний, а также ширина резонансных областей (областей неустойчивости) быстро уменьшаются с ростом n (как h^n). В рассмотренном выше иллюстрированном примере роль параметра h играет величина $4a/l$. Условие (7.68) для ε принимает вид:

$$|\varepsilon| < \frac{2a\sqrt{g}}{l^{3/2}}. \quad (7.70)$$

При наличии слабого затухания колебаний в системе по экспоненциальному закону с коэффициентом затухания $\lambda (\sim e^{-\lambda t})$ явление параметрического резонанса также наблюдается, но область неустойчивости сужается; вместо (7.70) теперь имеем:

$$|\varepsilon| < \sqrt{\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2 - 4\lambda}. \quad (7.71)$$

Резонанс возможен лишь при наличии некоторого «порогового» значения h_k :

$$h_k = \frac{4\lambda}{\omega_0}. \quad (7.72)$$

Величина этого порога для «побочных» резонансов вблизи частот $\gamma = \frac{2\omega_0}{n}$ возрастает с n как $h_k \sim \lambda^{1/n}$.

В заключение рассмотрим некоторые особенности колебаний так называемых «связанных систем», в которых имеются несколько колеблющихся тел, взаимодействующих друг с другом (например, связанных между собой упругими силами). Простейшую связанную систему можно представить себе в виде ряда математических маятников, соединенных друг с другом пружинками, так что их колебания уже не являются независимыми. Встречаются и значительно более сложные примеры связанных систем. К ним относятся, например, двух- и многоатомные молекулы, в которых атомы «скреплены» силами связи электрической природы, «гигантские молекулы» –

кристаллы и др. В таких системах колебательные процессы обнаруживают ряд специфических особенностей. Так, при наличии n связанных элементов резонанс при вынужденных колебаниях системы наступает при n резонансных частотах.

Колебания связанных систем находят применение в технике, в частности, в динамических демпферах, предназначенных для устранения опасных вибраций в различных машинах, о которых уже шла речь выше. Для этой цели на подшипнике вала устанавливают пластину с частотой собственных колебаний, равной частоте вращения вала. При работе машины пластина интенсивно колеблется, а вибрация самого подшипника практически отсутствует. Еще один пример явлений в связанных колебательных системах рассмотрен ниже.

При сложении двух гармонических колебаний одного направления с близкими частотами возникают «биения», т. е. колебания той же частоты, но с периодически изменяющейся амплитудой. В простейшем случае равенства амплитуд складываемых колебаний имеем:

$$A \sin \omega_1 t + A \sin \omega_2 t = 2A \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \quad (7.73)$$

или, при $\omega_1 - \omega_2 \ll \omega_1, \omega_2$

$$2A \cos \Omega t \sin \bar{\omega} t = B(t) \sin \bar{\omega} t, \quad (7.74)$$

т. е. результирующие колебания имеют близкую к ω_1 и ω_2 частоту $\bar{\omega}$ и переменную амплитуду $B(t) = 2A \cos \Omega t$, причем $\Omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ значительно меньше частот ω_1 и ω_2 . Приближая друг к другу значение частот ω_1 и ω_2 можно с большой точностью зафиксировать момент падения частоты Ω до нуля («нулевые биения»). (Это лежит в основе широко распространенного метода настройки музыкальных инструментов с помощью камертона).

Явление биений используется в одном из наиболее точных методов сравнения измеряемой частоты с эталонной, которые широко применяются, в

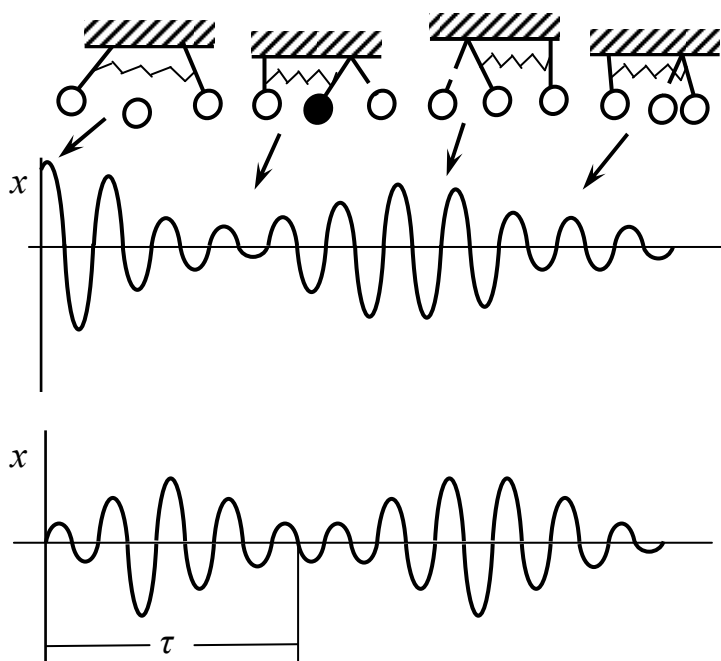


Рис. 7.7

частности, в гетеродинных волномерах. Гетеродин представляет собой специальный генератор электрических колебаний, точно проградуированный по частоте и дающий на выходе плавно изменяемую эталонную частоту. Сигнал от гетеродина вместе с сигналом, частоту которого требуется определить, подают в смеситель, где вырабатываются биения с переменной амплитудой. Эти биения регистрируются

индикатором (например, лампой «магический глаз», телефоном, осциллографом, стрелочным прибором и т. д.). Плавно изменяя эталонную частоту, фиксируют момент падения частоты биений до нуля и отсчитывают измеряемую частоту по шкале гетеродина.

Биения часто возникают также в связанных системах, например, в двух маятниках, скрепленных пружиной (рис. 7.7). Если отклонить оба маятника в одну сторону на одинаковую величину и отпустить, то маятники колеблются так же, как и при отсутствии пружины. Если задать начальные отклонения в противоположные стороны, то колебания будут совершаться в противофазе. Это – два типа нормальных (характеристических) колебаний в данной связанной системе. Если задать маятникам немного различные начальные отклонения, то в результате сложения этих двух нормальных колебаний возникает картина биений, показанная на рис. 7.7. Маятник совершит колебания с изменяющейся амплитудой и периодом биения τ , и через каждые $\tau/2$ обмениваются энергией колебаний, т. е. происходит периодическая перекачка энергии из одной системы в другую. Аналогичные явления возникают и в других (не только механических) связанных системах.

7.3 Упругие волны в природе и технике

Процесс распространения колебаний в упругих средах называется упругой волной. Как известно, сущность волнового процесса заключается в постепенном вовлечении частиц среды в колебания около их положений равновесия за счет подвода энергии от внешнего источника колебаний, т. е. при волновом процессе направленно «перемещается» энергия колебаний, а не сами частица среды. При этом направление колебаний может совпадать с направлением переноса энергии. В этом случае волна называется продольной. Если направление колебаний перпендикулярно к направлению волны – она называется поперечной. Возможность распространения волн того или иного типа зависит от упругих свойств среды. Если среда обладает упругим сопротивлением сдвига – это характерно для твердых тел, то в ней могут распространяться как продольные, так и поперечные волны («волны сдвига»). В жидкостях и газах упругое сопротивление сдвигу отсутствует, поэтому в них могут распространяться только продольные волны («волны сжатия-растяжения»). В соответствии с этим скорости распространения волн в упругих средах («фазовые» скорости, см. ниже) определяются различным образом. В твердых телах скорости распространения продольных и поперечных волн определяются соответственно формулами:

$$v_{II} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad v_I = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (7.75)$$

где ρ – плотность среды, E и G – модуль Юнга и модуль сдвига, соответственно. В жидкостях и газах роль модуля Юнга E играет величина $E = \rho \frac{dP}{d\rho}$, характеризующая изменение давления с изменением плотности

среды. Тогда для скорости продольных волн имеем:

$$\mathcal{V}_H = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}}. \quad (7.76)$$

Из этой формулы, в частности, видно, что скорость волн в жидкостях должна быть значительно больше, чем в газах, ввиду их существенно меньшей сжимаемости. В частности, для газов с отношением $\gamma = \frac{c_P}{c_V}$ с учетом уравнения состояния можно получить выражение:

$$\mathcal{V}_H = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}, \quad (7.77)$$

где μ – молекулярная масса газа. В частности, для воздуха при нормальных условиях (273 К и 10^5 Па, $\mu=29$, $\gamma \approx 1,40$) имеем: $\mathcal{V}_H \approx 330$ м/с.

Характерной особенностью звуковой волны является наличие двойной «пространственно-временной» периодичности: в каждой точке среды происходят гармонические смещения во времени, а в каждый данный момент времени в пространстве существует некоторое периодическое распределение смещений. «Временной период» характеризуется «обычным» периодом колебаний $T=2\pi/\omega$. «Пространственный» период характеризуется длиной волны $\lambda = \mathcal{V}T$, т. е. расстоянием, которое волна проходит за один период колебаний.

Уравнение для поперечной волны с плоским фронтом, распространяющейся вдоль оси имеет вид:

$$Y = A \cos \left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} \right) = A \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right). \quad (7.73)$$

Всем видам волн, независимо от их природы, присущи определенные свойства, характеризующие универсальные процессы взаимодействия волн с веществом. В частности, при прохождении волн через границу двух сред волны частично отражаются, а частично проходят во вторую среду (преломляются). При этом на границе сред выполняются законы отражения и преломления волн, которые описываются выражениями:

$$n = \frac{\sin i}{\sin i^I}, \quad i = i^I, \quad (7.79)$$

где i – угол падения, i^I – угол отражения, i^{II} – угол преломления (отсчитываемый от нормали к границе сред), n – относительный показатель преломления второй среды относительно первой. При встрече с препятствиями, размеры которых порядка размеров препятствия (по сравнению с длиной волны), волна испытывает «дифракцию», т. е. отклонение от прямолинейного пути распространения. В частности, для упругих («звуковых») волн этот эффект весьма значителен в повседневной практике. Действительно, длина волны $\lambda = \frac{\mathcal{V}}{\nu}$, согласно изложенному выше. При $\mathcal{V}=330$ м/с (звук в атмосферном воздухе) и $\nu=440$ 1/с (нота «ля» первой октавы) имеем: $\lambda \approx 0,8$ м. Этим объясняется, например, тот факт, что полуоткрытая дверь (ширина порядка 10 см) не является серьезным экраном для звука с $\lambda=80$ см, в то время как для света ($\lambda \sim 0,5 \cdot 10^{-4}$ см, см. т. III) она

практически является непреодолимым препятствием.

Для волн любой природы универсальным свойством является интерференция. Как уже упоминалось выше, частицы среды, находящиеся под воздействием двух (или более) источников колебаний, совершает результирующее движение, являющееся геометрической суммой складываемых колебаний. В результате этого сложения в среде устанавливается картина колебаний, соответствующая характеристикам «первичных» (складываемых) колебаний. При этом в некоторых точках среды устанавливается большая, а в другой малая амплитуда колебаний (применительно, например, к волнам на воде). Это означает, что в некоторых местах пространства будет наблюдаться минимум, а в других – максимум колебаний, независимо от времени, в результате сложения волн от отдельных источников колебаний.

Существуют и некоторые другие явления, сопровождающие распространение волн в различных средах, в частности, дисперсия (т. е. различие скоростей распространения волн различной длины), рассеяние, т. е. ослабление интенсивности (пропорциональной квадрату амплитуды колебаний A) волны в результате диссипации ее энергии. Все эти явления присущи в той или иной мере всем видам волновых процессов в любых материальных средах.

Для волн, представляющих собой распространение несинусоидальных (негармонических) колебаний, вводится понятие «групповой скорости» – скорости переноса энергии волной. Негармоничность волн практически всегда имеет место, поскольку любой источник волн действует ограниченное время, а строго синусоидальной может быть только неограниченная волна.

Таким образом, всякой волне можно приписать определенный спектр, т.е. совокупность частот (обычно расположенных в некотором узком или широком интервале – полосе частот). В то же время всякая реальная среда обладает дисперсией – зависимостью фазовой скорости распространения волны от ее частоты (или от длины волны). Случаи отсутствия заметной дисперсии волн весьма редки – например, распространения света в космическом пространстве со скоростью $3 \cdot 10^8$ м/с или звука в воздухе со скоростью 337 м/с при 10°C (см. также ниже, волны Рэлея). В большинстве реальных ситуаций наличие дисперсии вызывает изменение формы волны. В этих случаях, как показывает опыт, измеренная скорость волны оказывается существенно отличной от фазовой. Для линейных сред (в которых характер распространения волны не зависит от ее интенсивности) и волн с достаточно «плавным» отклонением от монохроматичности (т. е. волн, для которых можно ввести вполне определенную форму) вводится понятие групповой скорости \mathcal{V} . При отсутствии поглощения в среде она совпадает со скоростью перемещения энергии, так что плотность потока энергии S и плотность энергии волны W связаны простым соотношением:

$$S = W \mathcal{V}^*. \quad (7.80)$$

Групповая скорость связана со спектром фазовых скоростей $\gamma(\lambda)$

несинусоидальной волны соотношением:

$$v^* = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}. \quad (7.81)$$

Таким образом, групповая скорость может быть меньше ($\frac{dv}{d\lambda} > 0$, «нормальная» дисперсия) или больше ($\frac{dv}{d\lambda} < 0$, «аномальная» дисперсия) фазовой скорости, а также нулевой или отрицательной («оггибающая» волна перемещается в направлении, противоположном направлению перемещения фазы волны). Групповая скорость характеризует состояние движения волны лишь в течение некоторого промежутка времени.

$$T \ll 1 / \left| \frac{dv^*}{d\lambda} \right|. \quad (7.82)$$

Если это условие не выполнено, то волна успевает заметно деформироваться, и понятие групповой скорости становится неопределенным.

Понятие групповой скорости широко используется в механике, радиотехнике и оптике (см. т. III). Для рассматриваемых ниже волн на поверхности жидкости в случае гравитационных волн

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{4\pi}}, \quad \frac{dv}{d\lambda} > 0, \quad v^* < v, \quad (7.83)$$

а в случае капиллярных волн $\frac{dv}{d\lambda} < 0$ и $v^* > v$.

В областях аномальной дисперсии возможно сильное поглощение волн. В этих случаях групповая скорость уже не совпадает со скоростью переноса энергии волной.

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи «механических» волн, (процесс распространения механических колебаний в различных средах). К ним относятся «упругие волны» – процесс распространения упругих деформаций в среде, «поверхностные волны» – распространяющиеся на поверхности жидкости, и «ударные волны», возникающие при сверхзвуковом возмущении газа, жидкости или твердого тела.

Наиболее часто встречающимися видами волн в природе являются распространяющиеся в различных средах упругие деформации (продольные упругие волны называемые «звуком» в широком смысле слова), волны на поверхности жидкости. Распространение очень больших возмущений в среде принимает специфический характер «ударных волн».

Особенностью упругих волн является независимость фазовой и групповой скоростей от амплитуды и геометрической формы волнового фронта (плоской, сферической и цилиндрической).

На границе твердого материала с жидкостью, газом или вакуумом могут распространяться так называемые волны Рэлея – комбинации продольных и поперечных (сдвиговых) волн. Их амплитуда убывает экспоненциально с удалением от границы раздела. Толщина области, в которой локализована волна, порядка одной-двух длин волны. В волнах Рэлея частицы среды совершают движение по эллипсу, большая полуось

которого перпендикулярна границе раздела (поверхности твердого тела), а малая полуось параллельна распространению волны (т. е. границе твердого тела). Для волн Рэлея характерно отсутствие дисперсии – фазовая скорость равна групповой. Они могут распространяться как вдоль плоской, так и вдоль криволинейной поверхности, твердого тела. Именно так обстоит дело для волн у поверхности Земли, которые возникают при землетрясениях, и является типичным примером рэлеевских волн. Ультразвуковые рэлеевские волны в твердых телах находят применение в технике для контроля качества поверхностного слоя деталей и испытываемых образцов материалов, в частности, при определении упругих констант твердых материалов.

В ограниченных твердых телах (пластинах, стержнях и т.д.) распространяются так называемые «нормальные» волны – комбинации продольных и поперечных волн; их число зависит от характерного размера тела d и частоты колебаний ν , а также от упругих констант материала. Для этих волн характерно наличие дисперсии, фазовые скорости существенно отличаются от групповых. С увеличением fd фазовые скорости нормальных волн уменьшаются, а групповые скорости – возрастают. В цилиндрических стержнях (прутках) распространяются нормальные волны 3 типов – продольные, изгибные, крутильные.

В «чисто упругой» волне выполняется закон Гука – пропорциональность деформаций упругим напряжением. Однако при большой интенсивности волны амплитуда смещения в ней может стать настолько большой, что деформация превысит предел упругости для данного материала. При этом возникают пластические деформации, и волна становится «упругопластической». Волны такого рода могут возникать также и в жидкостях и газах и называются в этом случае «волнами конечной амплитуды». Скорость их распространения зависит от уровня деформаций. Прохождение такой волны оставляет в материале некоторую пластическую деформацию, по величине которой можно получить определенную информацию о механических свойствах материала.

Во всех случаях прохождения волн через упругую среду имеет место некоторая диссипация механической энергии колебаний, поскольку при смещении частиц материала всегда имеет место внутреннее (вязкое) трение, сопровождающееся выделением тепла, с последующим его отводом механизмам теплопроводности. Это приводит к постепенному ослаблению интенсивности волны с удалением от ее источника. В некоторых случаях прохождение волны может также сопровождаться и переносом материала. Такая ситуация имеет место, например, при наличии интенсивного звука в воздухе или воде. Было обнаружено, что при интенсивности звука порядка 100 Вт/см^2 в воде возникает течение со скоростью до 1 м/с ; это явление называется «акустическим ветром».

При взрывах, сверхзвуковых движениях тел (самолетов, ракет в воздухе), мощных электрических разрядах (молниях) и т. д. возникают «ударные волны» или скачки «уплотнения». Они представляют собой

перемещение со сверхзвуковой скоростью тонкого переходного слоя, в котором давление, плотность и температура вещества среды принимает повышенные значения. Например, при взрыве образуются «горячие» продукты – газы под очень высоким давлением, которые мгновенно сжимают некоторый объем окружающего воздуха, а его остальной объем остается «невозмущенным». Затем граница между сжатым и несжатым воздухом перемещается со временем, что является движением фронта ударной волны. Толщина этой границы очень мала – порядка длины свободного пробега молекул, поэтому при теоретическом рассмотрении эту границу можно считать поверхностью разрыва, на котором параметры состояния вещества изменяются скачком, причем их значения по обе стороны от этой границы связаны законами сохранения энергии, массы и импульса. Соотношение между давлениями P_1 и P_0 за фронтом и перед ним и соответствующими значениями удельного объема V_1 и V_0 характеризуют «ударную» адиабату волны. Для обычной адиабаты (Пуассона) для идеального газа с $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ имеем:

$$\frac{P_1}{P_0} = \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^\gamma. \quad (7.84)$$

При таком «чисто адиабатическом» процессе энтропия остается неизменной. Однако в действительности энтропия на фронте волны также имеет скачок (возрастает, согласно 2-му началу термодинамики – см. гл. 10) в связи с необратимостью ударного сжатия, при котором часть энергии потока переходит в тепло. Поэтому более реалистическое уравнение адиабаты, согласно упомянутым выше законом сохранения, принимает вид («адиабата Гютонья»):

$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{(\gamma+1)V_0 - (\gamma-1)V_1}{(\gamma+1)V_1 - (\gamma-1)V_0}. \quad (7.85)$$

Однако и эта формула пригодна лишь для приближенных оценок, поскольку в реальной ситуации дело осложняется процессами термической диссоциации, ионизации воздуха (температура в ударной волне может составлять десятки тысяч К), химическими реакциями и т.п. Поэтому ударные волны обычно исследуются экспериментальными методами, особенно в области преодоления звукового барьера (классическая методика создания ударных волн в эксперименте – вдвигания поршня в цилиндр, содержащий воздух, со скоростью, превышающей скорость звука в воздухе).

В настоящее время свойства ударных волн исследованы уже достаточно подробно.

Ударные волны распространяются также в жидкостях и твердых телах. При этом существенное влияние на характер происходящих явлений оказывают взаимодействия между частицами среды, что сильно усложняет всю картину процессов. Ударные волны в жидкостях и твердых телах возникают довольно часто (при детонации взрывчатого вещества, взрывах глубинных бомб и мин в воде, ударах продуктов взрыва о твердые преграды и т. п.). При этом обычно возникают скачки давления до 10^4 - 10^5 атм. В таких

«слабых» волнах повышение энтропии сравнительно невелико, и скачок давления приближенно рассчитывается по формуле:

$$P \approx A \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n - 1 \right], \quad (7.86)$$

где A и n – константы (например, для воды $A=3000$ атм., $n \approx 7-8$, для железа $A=5 \cdot 10^5$ атм., $n \approx 4$, и т. д.).

Весьма распространенные в природе волны на поверхности воды (и вообще жидкости) не являются по своей природе «упругими». При отклонении частиц жидкости от положений равновесия в результате внешнего действия возникают восстанавливающие силы поверхностного натяжения (в этом случае говорят о «капиллярных» волнах) или силы тяжести (в этом случае волну называют «гравитационной»). Возможен и комбинированный («гравитационно-капиллярный») характер поверхностных волн. Вклад сил поверхности натяжения возрастает с уменьшением длины волны. Скорость распространения таких «комбинированных» волн по свободной поверхности жидкости определяется по формуле:

$$C = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma}{\lambda\rho}} \quad (7.87)$$

(ρ – плотность, σ – коэффициент поверхностного натяжения жидкости, λ – длина волны). Как видно из формулы (7.87) при больших λ C определяется первым членом, а при малых – вторым. При возрастании λ от 0 до ∞ скорость C убывает от ∞ до некоторого минимального значения, которое можно вычислить из условия $\frac{dC}{d\lambda}=0$, что после преобразований дает $C_{min} =$

$= \left(4g\sigma/\rho \right)^{1/4}$. При этом длина волны $\lambda_{min} = 2\pi \sqrt{\frac{\sigma}{g\rho}}$. При $\lambda > \lambda_{min}$ волна носит гравитационный характер и скорость C определяется в основном силой тяжести, при $\lambda < \lambda_{min}$ – преимущественно капиллярный характер и зависит существенно от сил поверхностного натяжения жидкости. Для волн на поверхности воды при нормальных атмосферных условиях $\lambda_{min}=1,72$ см.

Скорость распространения больших океанских волн с длиной $\lambda \gg \lambda_{min}$ (несколько сотен метров) вычисляется по формуле для «чисто гравитационных» волн по формуле $C = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$. Отсюда видно, что чем больше длина волны, тем быстрее она распространяется. Так при $\lambda \approx 100$ м получается $C \approx 13$ м/с ≈ 17 км/ч, (т. е. скорость обычного пассажирского поезда).

Типичными причинами возникновения гравитационных волн в природе являются притяжение жидкости морей Солнцем и Луной (приливы и отливы), движение тел (кораблей) по поверхности воды (корабельные волны) и возмущение поверхности воды ветром (ветровые волны). Причиной волны могут быть и единичные случайные возмущения воды в определенном месте (бросание тяжестей в воду, подводный взрыв и т. п.). Ветровые волны носят сложный (трехмерный) характер вследствие векторного характера скорости

ветра.

При теоретическом рассмотрении гравитационных волн часто вводят допущение об относительной малости высот волн по сравнению с их длиной. При этом становится возможной интерференция волн согласно принципу суперпозиции. В частности, интерференция бегущей и отраженной волны приводит к появлению «стоячих волн», особенно в небольших водоемах (озерах, проливах, бухтах и т. д.). Период такой волны – «сейши» – определяется по формуле $T = 2L/n\sqrt{gH}$, где L – длина водоема, H – его глубина, n – число узлов, т.е. мест спокойной воды, в которых колебания практически отсутствуют. В волнах малой амплитуды частицы среды движутся по замкнутым траекториям, и перенос жидкости в целом отсутствует. В бегущей волне на глубокой воде частицы описывают окружности с радиусами, убывающими с глубиной Z по экспоненциальному закону от «поверхностной» величины r_0 : $r = r_0 \exp\left(-\frac{2\pi Z}{\lambda}\right)$. На мелкой воде скорость достаточно «длинных» (например, приливных волн равна $C = \sqrt{gh}$ зависит только от глубины водоема, а профиль волны близок к синусоидальному. Траекториями частиц в вышеупомянутых «сейшах» являются наклонные прямые линии. В других случаях зависимость между длиной и скоростью распространения волн и их профиль оказываются существенно более сложными.

Отдельного рассмотрения заслуживают «звуковые» (акустические.) волны в узком смысле этого слова (т. е. волны, доступные слуховому восприятию человеком), ввиду их практической важности, элементы акустики будут рассмотрены ниже, в п. 7.4.

Исключительно большую роль в природе и технике играют электромагнитные волны, подробно рассматриваемые в дальнейшем (в т. II). Однако следует отметить, что все перечисленные выше основные закономерности (уравнение волны, отражение, преломление, интерференция, дифракция волн и др.) являются универсальными и присущи всем видам волн, включая и электромагнитные, а специфическим являются лишь механизмы взаимодействия волн определенной природы с веществом. Для упругих волн, в частности, этот механизм заключается в «раскачке» частиц среды, связанных упругими силами, под влиянием внешнего периодического механического воздействия.

7.4 Элементы прикладной акустики

В отличие от общей акустики, рассматривающей вопросы возникновения, распространения и приема звуковых волн, предметом прикладной акустики являются звуковые явления, имеющие непосредственные практические приложения. Сюда относятся: электроакустика, основной задачей которой является разработка электрических приборов типа микрофонов, телефонов, методов звукозаписи

и воспроизведения звука, а также проведение акустических измерений; строительная акустика, изучающая вопросы передачи и восприятия звука в специальных помещениях (аудиториях, концертных залах, студиях и т. п.), а также вопросы звукоизоляции. Вопросы физиологического восприятия звука, особенности слухового ощущения являются предметом физиологической и психологической акустики. Наконец, разработкой научных основ конструирования, изготовления и настройки музыкальных инструментов занимается музыкальная акустика, изучающая две основные группы – вопросов. Первая группа вопросов – звукообразование и звукоизвлечение музыкальных инструментов и певческого голоса, объективные характеристики музыкальных звуков; вторая группа вопросов – музыкальный строй, т. е. вопросы определения точного соотношения высот звуков, применяемых в музыке.

Основными задачами архитектурной и строительной акустики являются обеспечение хорошей слышимости музыки и речи в специальных помещениях (архитектурная акустика) и снижение уровня проникающего в них шума (строительная акустика), а также измерение качественных акустических показателей этих помещений и эффективности звукоизоляции. Основным показателем акустического качества помещения является время реверберации и его частотная зависимость. В момент прекращения действия источника звука воздушный объем помещения представляет собой колебательную систему с большим числом собственных частот. Затем эти колебания постепенно затухают в результате частичного поглощения звука в стенах помещения при каждом отражении от них. Этот процесс постепенного затухания звука в закрытом помещении после выключения акустического источника и называется реверберацией. В первом приближении этот процесс можно рассматривать как последовательность дискретных актов поглощения, происходящих через интервалы, равные среднему времени пробега звуковой волны между двумя последовательными отражениями. Если средний коэффициент поглощения звука при каждом отражении можно принять постоянным, то закон затухания звука можно считать экспоненциальным. В качестве меры оценки длительности реверберации выбирается время T , за которое интенсивность звука уменьшается в 10^6 раз, т. е. уровень звука – на 6 бел или 60 дБ. Тогда статистическая теория приводит к следующему выражению для T :

$$T = 13,8\tau / [-\ln(1 - \alpha)], \quad (7.88)$$

где α – упомянутый выше средний коэффициент поглощения, $\tau = \frac{4V}{cS}$ – среднее время свободного пробега звуковой волны (V и S – объем и полная площадь, ограничивающая помещение, c – скорость звука в воздухе). Величина T может быть также измерена экспериментально путем записи на самописце процесса убывания уровня звука после прекращения действия его источника.

Из-за наличия процесса реверберации прямой звук от источников

воспринимается на фоне постепенно затухающих ранее возбужденных колебаний, спектры которых изменяются во времени. Если размеры помещения достаточно велики по сравнению с эллипсами звуковых волн в данной области частот (речи или музыки), то можно принять, что спектр собственных частот воздушного объема является сплошным (например, при $f=440$ Гц и $C=330$ м/с длина волны $\lambda = \frac{C}{f}=0,75$ м, и указанное условие выполняется в помещениях с поперечными размерами 8-10 м). Тогда воспринимаемый слушателем акустический процесс можно представить как результат сложения прямого звука и ряда постепенно запаздывающих его повторений, обусловленных отражением от стен помещения, причем в среднем интенсивность отраженного звука убывает по экспоненциальному закону. Опыт акустических исследований различных залов и аудиторий показал, что условием хорошего, акустического качества является близость времени реверберации. T к некоторому оптимальному значению, зависящему от характера звука (речь, музыка) и от объема помещения (по крайней мере, до объемов 2000-3000 м³). Так, для симфонической музыки при объеме зала 300 м³ рекомендуемое время T составляет 0,9 с, а при объеме 20 000 м³ – около 2,2 с, т. е. T сравнительно медленно возрастает с объемом. Для других видов звучания величина T обычно находится в пределах 0,7-2,2 с. Для достижения оптимального времени реверберации принимаются специальные меры, например, повышается средний коэффициент поглощения звука путем размещения в зале или аудитории звукопоглощающих материалов и конструкций.

Важным показателем хорошего акустического качества помещения является также четкость звучания, которая достигается при достаточно большой интенсивности первых отражений, приходящих к слушателю с небольшими запаздываниями (0,05-0,15 с). Четкость звучания сильно зависит от формы зала, в особенности от конфигурации потолка, отражения от которого имеют большую интенсивность. Важным фактором является также диффузность звукового поля в помещении, т. е. равномерность распределения потоков отраженной звуковой энергии по различным направлениям ее прихода к слушателю. Для повышения степени диффузности в зале создаются расчлененности гладких поверхностей различными декоративными или конструктивными элементами (пилястры, кессоны, уступы, лепные украшения и т. п.), благодаря чему устраняются зеркальные отражения звука. Для повышения уровня громкости звука в больших помещениях используют различные электроакустические средства усиления (микрофоны).

В строительной акустике решается задача создания легких и экономичных ограждающих конструкций (стен и перекрытий), обеспечивающих хорошую звукоизоляцию помещений от внешних шумов. Для этой цели обычно применяются слоистые ограждения с минимальной механической связью между слоями. Важной задачей является также

ослабление вибраций, передающихся по конструкциям зданий (виброизоляция). Это достигается применением различных амортизирующих средств – упругих прокладок, разделяющих источник вибраций (машину) и его фундамент, прокладок из материалов с малой упругостью и большим коэффициентом затухания колебаний (из войлока, асбеста) в строительных конструкциях, а также с помощью динамических гасителей вибраций – механических колебательных систем с резонансными частотами, совпадающими с частотами вибраций, подлежащих гашению. В строительной практике применяется также нанесение на конструкции специальных вибропоглощающих покрытий.

Решение задач прикладной акустики привело к совершенствованию методики различных акустических измерений. Так, о применении специальных логарифмирующих самописцев, используемых для измерения времени реверберации в помещениях, уже упоминалось выше. Коэффициент поглощения различных материалов определяется по уменьшению времени реверберации при их внесении в специальную измерительную камеру. Существуют также надежные методы измерения эффективности звукоизоляционных материалов. Применяются методы моделирования залов с применением ультразвуковой техники (при исследовании уменьшенной модели необходимо пропорционально уменьшить и длину волны звука) и ограждающих конструкций с целью измерения звукоизоляции.

В атмосферной акустике изучаются явления распространения звука в атмосфере Земли с целью решения ряда практических задач, например, исследования строения различных слоев атмосферы, звуковой разведки и сигнализации, борьбы с шумами и т. д.

Характер распространения звуковых волн в атмосфере зависит, прежде всего, от их скорости C (и частоты, согласно формуле $\lambda = \frac{C}{\nu}$), которая, в свою очередь, определяется многими факторами и, прежде всего, температурой воздуха. В соответствии с известной формулой для скорости продольных упругих волн в газах (см. п. 7-3), $C \sim \sqrt{T}$ поэтому можно положить:

$$C = C_0 \sqrt{\frac{T}{273}}, \quad (7.89)$$

где C_0 – скорость звука при $0^\circ\text{C}=273\text{K}$ ($C_0=331,5$ м/с). Кроме того, при распространении в воздухе звуковые волны затухают с увеличением расстояния от источника вследствие поглощения звука (диссипации звуковой энергии).

Поглощение звука в газе обусловлено тремя основными механизмами - вязкостью (внутренним трением) газа, теплопроводностью (процессом выравнивая температуры в среде) и релаксационными процессами в веществе, обусловленными периодическим смещением термодинамического равновесия из-за колебаний температуры и давления в звуковой волне. Релаксационные процессы приводят также к наличию дисперсии звука (зависимости фазовой скорости волн от частоты). Все эти явления имеют

место и при распространении звука в атмосфере. Однако «классическое» затухание, связанное с вязкостью и теплопроводностью, для которого коэффициент поглощения пропорционален квадрату частоты и обратно пропорционален плотности газа, имеет существенное значение только в верхних разреженных слоях атмосферы или для волн высоких частот. При наличии ветра скорость звука зависит от скорости и направления ветра, а также от направления распространения звука относительно ветра (из-за проявления эффекта Доплера).

Характер распространения звука на большие расстояния определяется влиянием неоднородности движущейся атмосферы. Помимо горизонтальной стратификации атмосферы, в ней существуют неоднородности, обусловленные турбулентными пульсациями температуры воздуха и скорости ветра, что вызывает флуктуации амплитуды и фазы звуковых волн. Поэтому реальное поглощение звука в атмосфере может быть значительно большим, чем следует из «классической теории» (с учетом вязкости и теплопроводности), а интенсивность звука в области «звуковой тени» также значительно больше теоретической величины. Эти явления объясняются теорией распространения звука в турбулентной атмосфере, рассеянием звука на турбулентных пульсациях, изменениями показателя преломления звуковых волн, что позволяет получить хорошо согласующиеся с экспериментом значения коэффициента ослабления звука.

В случае наличия в атмосфере четко разглаженных областей с различными температурами и скоростями ветра неоднородности показателя преломления звука и связанные с этим явления могут носить не характер случайных пульсаций, а закономерный характер; на этих границах могут происходить явления отражения звука, которые проявляются в виде раскатов грома.

Наличие постоянно действующих градиентов температуры и плотности воздуха в атмосфере (например, температурная стратификация атмосферы) вызывает искривление звуковых лучей, вследствие чего возникает целый ряд акустических явлений: деформирование волнового фронта, образование «зон молчания» (неслышимости звука вблизи от его источника), возникновение «звуковой тени». Все эти явления усложняются наличием ветра и изменениями температуры и плотности воздуха в зависимости от времени года и времени суток. Учет этих явлений весьма важен, в частности, при решении практических задач звуковой разведки, в которой требуется по известному из метеорологических данных распределению скорости звука по высоте и временем прихода звука в различные пункты наблюдения определить координаты источников звука. При акустическом зондировании атмосферы определяют температуру воздуха, скорость и направление ветра в верхних слоях атмосферы по времени распространения звуковых волн от искусственно создаваемых взрывов. Такое решение этой задачи представляет исключительные трудности, поэтому обычно предполагают, что ветер и стратификация атмосферы горизонтальны, и разбивают атмосферу на 2 и

более слоев, в которых параметры состояния атмосферы считаются постоянными. Измерив время распространения звука до нескольких приемных пунктов, можно определить скорость ветра и температуру воздуха каждого слоя. Возможно также ограничиться одним приемным пунктом, создавая серии взрывов и определяя координаты взрывов путем наземного фотографирования вспышек на фоне звездного неба. Акустическое зондирование является важным методом исследования состояния верхних слоев атмосферы и дополняет результаты современных методов прямого исследования состояния атмосферы с помощью ракет и искусственных спутников Земли.

Вследствие наличия разнообразных динамических процессов в земной атмосфере, в ней постоянно действует множество источников звука естественного и искусственного происхождения. Так, резкое расширение воздуха в канале искрового разряда-молнии создает ударную волну, воспринимаемую как гром. Обтекание быстро движущимися воздушными потоками различных препятствий при сильном ветре вызывает появление шумов-свистов и т.п. Например, при обтекании ветром гребней морских волн возникают инфразвуковые шумы – так называемый «голос моря». При обтекании воздушным потоком тел, способных колебаться, в них возникают автоколебания на собственных (резонансных) частотах (звон проводов и т. п.). За последнее время резко возрос уровень искусственных шумов в атмосфере, создаваемых различными промышленными источниками, реактивными двигателями самолетов и т.п., что обусловило возникновение проблемы борьбы с этими шумами вблизи населенных пунктов. Инфразвуковые волны возникают также при атомных и ядерных взрывах, что может служить средством обнаружения этих взрывов.

В музыкальной акустике исследуются особенности звучания различных музыкальных инструментов и человеческого голоса, вопросы музыкального строя, важные для музыкальной композиции, и др. При этом следует напомнить, что звук характеризуется объективными показателями – интенсивностью (или потоком звуковой энергии), частотой колебаний и акустическим спектром (набором частот), которым соответствует 3 субъективных показателя – громкость, высота тона и тембр звука L_0 (в единицах измерения этих величин см. в конце параграфа). В музыкальной акустике между этими показателями устанавливается определенное соответствие («музыкальный строй»), которое лежит в основе теории музыки. Музыкальная акустика в настоящее время является одной из наиболее детально разработанных разделов прикладной акустики. Несмотря на ее очень солидный возраст (элементы теории музыки были разработаны еще в античный период), в последнее время появились новые направления, в частности, создание электромузыкальных инструментов, установление корреляции между слуховым и зрительным восприятиями («цветомузыка») и др.

Особенности звучания различных музыкальных инструментов (и

певчих голосов) определяются, прежде всего, спектральным составом и интенсивностью испускаемых ими звуков, от которых зависят субъективные характеристики звучания – тембр и громкость. Ощущение «музыки» возникает при дискретном (или близком к нему) акустическом спектре, в котором можно различить «чистые» тона, т. е. звуки определенной высоты; напротив, при сплошном спектре звука, он создает неприятное слуховое ощущение «шума». Таким образом, основой теории музыкальных инструментов является учение о связи условий звукообразования в них с высотой и громкостью звуков.

Совокупность звуков различной высоты, используемых в музыке, образует музыкальный строй. Знание принципов музыкального строя необходимо для соответствующей настройки инструментов. Абсолютный строй характеризуется высотой (т. е. частотой) тона, с которого начинается настройка инструментов; в нашей стране (и др. европейских странах) таким исходным звуком является тон «ля» 1-й октавы с частотой 440 Гц. Шкала частот музыкальных звуков делится на интервалы – октавы – с частотным коэффициентом 2. При равно темперированном относительном музыкальном строе каждая октава делится на 12 равных полутонов (расстояние от «до» до «до-диез», от «до-диез» до «ре», и т. д.) с частотным коэффициентом $\sqrt{2}$. Интервал, равный 0,01 темперированного полутона, называется центом. С древних времен применялись также «точные» относительные музыкальные строи, в основе которых лежат так называемые «натуральные» интервалы, частотные коэффициенты которых предоставляют собой отношения соседних первых чисел натурального ряда (помимо общего для всех строев интервала октавы). Исполнение более или менее сложной музыки в точных музыкальных строях невозможно, поэтому им на смену постепенно пришел современный 12-ступенчатый темперированный (т. е. выровненный), относительный музыкальный строй. Однако в строе некоторых музыкальных инструментов сохраняются «натуральные» интервалы, как например, в смычковых, медных духовых и др. инструментах. При пении и игре на инструментах со свободной интонацией (например, на скрипке) «настройка», т.е. коррекция высоты звука осуществляется на слух. В инструментах с фиксированной интонацией (фортепьяно) высота музыкальной ступени определяется принятым при настройке музыкальным строем и точностью настройки (коррекцией на слух). В музыке неевропейских народов (например, индийской) встречаются иные музыкальные строи, и соответственно изменяется интонация музыкальных инструментов.

Возбуждение «чистых» звуковых колебаний в музыкальных инструментах в основном осуществляется с помощью двух типов систем струн и труб. В связи с этим выделяют две большие группы – струнные и духовые музыкальные инструменты. В особой группе ударных музыкальных инструментов для звукообразования используются свободные колебания мембран, стержней и пластин (барабаны, литавры и др.). В свою очередь,

струнные музыкальные инструменты по способу звукоизвлечения разделяют на щипковые, смычковые и клавишные. В щипковых инструментах (гитара) струна совершает свободные затухающие колебания в результате первоначального излома струны в месте щипка. Акустический спектр содержит основной тон, частота которого зависит от длины, толщины, натяжения и плотности материала струны, и большого количества обертонов. В смычковых инструментах (скрипка) струна совершает автоколебания, энергия которых пополняется за счет движения смычка, передаваемого струне вследствие трения в месте контакта; при этом акустический спектр также оказывается широким. В то же время в интервалах чистоты («гармоничности») звучания этих типов инструментов обычно стремятся ограничить их акустический спектр небольшим числом основных обертонов, имеющих частоты, кратные частоте основного тона (высокие обертоны имеют некрatные частоты в силу целого ряда факторов, нарушающих периодичность колебаний). Это осуществляется с помощью специальных конструкций деталей этих инструментов (подставки, деки и корпуса), способствующих сужению диапазона их звучания. В результате этого для перекрытия широкого диапазона (при исполнении симфонических произведений) в струнных и других оркестрах приходится применять целый набор однотипных смычковых инструментов разных размеров (скрипка, виолончель, контрабас).

Колебания струн в клавишных инструментах (фортепьяно) возбуждаются ударом обтянутых войлоком молоточков, кинематически связанных с соответствующими клавишами. Молоточки обладают нелинейной податливостью и обеспечивают плавное нарастание и спадание действующих на струну (и, соответственно, на деку инструмента, излучающую колебания) усилий и, следовательно, необходимое ограничение ширины акустического спектра уже при возбуждении звуковых колебаний. Это позволяет сделать «излучатель» инструмента – деку – в виде большой пластины неправильной формы, равномерно излучающей звук в широком диапазоне, превышающем 7 октав (чем, в частности, объясняется большая универсальность данного инструмента).

Широким диапазоном звучания обладают также духовые инструменты, в которых возникают автоколебания, поддерживаемые за счет движения воздуха, создаваемого играющим на инструменте. У языковых духовых инструментов звуковые колебания возбуждаются продуванием воздуха через отверстие, расположенное в основании трубы и закрытое легким клапаном (язычком). Периодическое отклонение язычка дает возможность управлять движением воздуха в трубе и поддерживать установившийся процесс автоколебаний.

При этом высота звука зависит от длины колеблющегося столба воздуха, а тембр (акустический спектр) – от характеристик язычка и от формы открытого конца – раструба, излучающего звуковые колебания. В мундштуковых духовых инструментах роль язычка выполняют губы

музыканта, колеблющиеся подобно голосовым связкам.

В гармониях и баянах частота основного тона определяется колеблющимися язычками, выполненными в виде тонких упругих металлических пластинок, прикрепленных к массивной планке и перекрывающих прорези в ней. При продувании воздуха через прорезь с помощью нагнетательного устройств (собственно «гармони») перепад давления вызывает автоколебания язычка, передаваемые в виде звука в окружающую среду. Изменение формы и толщины язычков позволяет настроить их на требуемые частоты и получить широкий диапазон звучания инструмента.

Особым музыкальным «инструментом» является певческий голос – звук, создаваемый колебаниями голосовых связок при движении воздуха через речевой тракт. Особенностью человеческого голоса вообще является богатство обертонами, что создает огромное разнообразие тембров человеческих голосов. При разговоре основные частоты голоса обычно находятся в пределах 80-400 Гц; при пении высота голоса изменяется в среднем в пределах двух октав (наличие этого интервала в голосе считается «экзистенз-минимумом» оперного певца). Особенности певческого голоса являются также наличие вибрато (изменений интенсивности и спектра с частотой 6-7 Гц) и специфических низкочастотных (около 300 Гц) и высокочастотных (в области 3 кГц) певческих формант, т. е. областей концентрации энергии в акустическом спектре. Форманты (одна или несколько) существуют у любого певческого голоса и музыкального инструмента и способствует лучшей «узнаваемости» звука. В целом, акустический спектр звука определяет его субъективное восприятие: глухой, тусклый звук – при малом количестве обертонов; сочный, полный – при хорошей интенсивности первых обертонов; металлический, «полетный» – при наличии выраженных высокочастотных формант (3-6 кГц), и т. д. По тембрам различают также типы певческого голоса – теноры, баритоны, басы и т. п.

В последние годы широкое распространение получили электромузыкальные инструменты, в которых звук излучается громкоговорителем, питаемым от источника электрических колебаний звуковой частоты. В частности, в адаптированных музыкальных инструментах (например, электрогитаре) генератором таких колебаний служит электромеханический преобразователь – адаптер, связанный с механической системой. При этом механические колебания преобразуются в электрические, усиливаются и вновь превращаются в акустические колебания громкоговорителем. В электронных музыкальных инструментах механические и акустические колебательные системы заменяются ламповыми или полупроводниковыми генераторами, питающими громкоговоритель. С помощью электрических фильтров спектр электрических колебаний ограничивается и преобразуется таким образом, чтобы излучаемый громкоговорителем звук имитировал звучание различных акустических

музыкальных инструментов. В частности, в электромузыкальных инструментах с плавной перестройкой частоты (т. е. со свободной интонацией) можно достигнуть весьма выразительного звучания мелодии. Управление первым инструментом типа – терменвоксом – осуществляется перемещением руки в воздухе возле его антенны, что приводит к изменению емкости в контуре настройки и тем самым к изменению высоты тона. Инструменты с набором дискретных частот (с фиксированным строем), обычно клавишного типа, работают на электромеханических, фотоэлектрических и иных генераторах, наряду с электронными; при этом каждый звук «обслуживается» отдельным независимым генератором. Придание электромузыкальным инструментам определённого тембра осуществляется путем специального формирования формы кривой электрических колебаний и введения резонансных контуров, усиливающих обертоны генерируемых колебаний в «формантных» областях частотного спектра. Это создает широкие возможности вариации тембров звучания электромузыкальных инструментов. Для имитации «вibrато», присущего певческому голосу (см. выше), применяется частотная модуляция с частотой 5-6 Гц. Возможно также придание звучанию и др. музыкальных качеств, улучшающих музыкальное восприятие игры на электромузыкальных инструментах. При этом расширение диапазона звучания достигается объединением разнообразных инструментов в ансамбли, как и в случае обычных механических музыкальных инструментов.

Распространение звука в водной среде (в морях, океанах и т. д.) изучается гидроакустикой. Основной особенностью этого процесса является значительная дальность распространения звука (15-20 км для слышимых звуков средней интенсивности, 3-5 км – для ультразвука), т. е. малое затухание звука в воде (по сравнению, например, с затуханием в воздухе). Скорость звука в воде (1400 м/с) также значительно больше, чем в воздухе. В результате рефракции звука, т. е. преломления звуковых волн (искривление звуковых лучей) на различных неоднородностях водной среды, возможно явление сверхдальнего распространения звука под водой. Это явление объясняется существованием на некоторой глубине «подводного звукового канала» с наименьшей скоростью распространения звука. Попавшая в этот канал звуковая волна не выходит из него, на протяжении сотен и тысяч км. Дальность распространения ультразвука (высокой частоты) значительно сокращается, в частности, вследствие поглощения и рассеяния звука на различных мелких неоднородностях естественного происхождения (пузырьках воздуха, микроорганизмах и т. д.). Широкое практическое применение гидроакустики основано на том, что звук является практически единственным средством сообщения под водой, поскольку свет и радиоволны не могут распространяться в воде на значительные расстояния. Для целей подводной связи используются звуковые (с частотой 0,3-10 кГц) и ультразвуковые (свыше 10 кГц) волны, излучаемые, например, широко распространенными пьезоэлектрическими и магнитострикционными

излучателями. Основными практическими применениями гидроакустики являются активные и пассивные гидролокаторы, используемые как в мирных (кораблевождение, рыбопромысловая разведка), так и военных целях (поиск и атака вражеских подводных лодок и т. п.).

Как уже упоминалось выше, явление звука можно характеризовать «объективными» и «субъективными» величинами. В результате этого в прикладной акустике исторически сложилась ситуация, при которой широко используется большое количество единиц измерения; с этим приходится считаться инженеру-акустику, в частности, при изучении специальной литературы.

Объективной характеристикой звука является звуковое давление (иногда используется интенсивность звука), которое определяет поток энергии, переносимой звуковой волной, и возникающее вследствие этого механическое воздействие звука на различные препятствия на его пути (в частности, на слуховой аппарат человека или датчик приемника звука). В системе МКС, являющейся составной частью системы СИ, величина звукового давления должна измеряться в Н/м² (при этом интенсивность звука измеряется в Вт/м²). Однако широкое распространение в акустической практике получил «акустический бар», равный 1 дин/см²=0,1 Н/м² (в ряде стран эта единица именуется микробаром). В метеорологии широко использовалась единица давления – «бар», равная 10⁶ дин/см², т. е. в 10⁶ раз больше акустического бара. Заметим, что употребление этих единиц может приводить к недоразумениям.

Субъективной характеристикой звука является его громкость, определяющая уровень создаваемого им слухового ощущения. Она существенно зависит не только от звукового давления, но также от частоты и спектра звуковых колебаний. Специальные исследования доказали, что звуки различной частоты воспринимаются как равногромкие при различных уровнях звукового давления. Порог слышимости, т.е. минимальное воспринимаемое ухом звуковое давление, наблюдается при частоте около 1000 Гц и на основании многочисленных измерений принимается равным $P_0=2 \cdot 10^{-5}$ Н/м². Согласно психофизическому закону Вебера-Фехлера, субъективное ощущение громкости (L) пропорционально логарифму интенсивности воздействия на слуховой аппарат (p), поэтому громкость можно записать в виде:

$$L = \lg \frac{P}{P_0}. \quad (7.90)$$

При такой записи L измеряется в белах; если же ввести L по формуле

$$L = 10 \lg \frac{P}{P_0}, \quad (7.91)$$

то она будет измеряться в децибелах (1дБ=10⁻¹Б). В строительной акустике в децибелах обычно выражают свойства звукоизоляции различных перегородок: в этом случае вместо (7.91) следует написать:

$$N = 10 \lg \frac{P_1}{P_2}. \quad (7.92)$$

Здесь величина N определяет субъективную меру снижения громкости звука в результате уменьшения звукового давления от P_1 до P_2 . В наиболее общем смысле децибел (или бел) может использоваться как мера изменения интенсивности некоторого сигнала (не обязательно звукового) от I_1 до I_2 :

$$N = 10 \lg \frac{I_1}{I_2}. \quad (7.93)$$

В таком обобщенном смысле децибел используется, например, в радиотехнике.

Помимо бела и децибела, уровень громкости выражают также в «фонах». Фон выражает «уровень громкости», под которым подразумевается звуковое давление, создаваемое стандартным «чистым» тоном частоты 1000 Гц, который признается равным по громкости данному звуку (любой частоты и тембра) или шуму. Для выражения громкости сложных звуков используется также условная шкала громкости в «сонах»; так, громкость шума вблизи работающего авиадвигателя считается равной 256 сонов, шума в кабине самолета – 64 сона, громкого крика на расстоянии 1 м – 32 сона, громкой речи на расстоянии 1 м – 16 сонов, разговора «средним» голосом на расстоянии 1 м – 4 сона, и т. д. Международными стандартами установлено соотношение между уровнем громкости в фонах и громкостью в сонах, что, в принципе, позволяет приближенно оценивать уровень громкости сложного звука по уровням громкости его составляющих. Однако методы определения громкости сложных звуков в настоящее время разработаны еще недостаточно.

Помимо указанных единиц для звукового давления и громкости звука, в прикладной акустике применяют единицы измерения и других характеристик звука. Например, частотные интервалы измеряются по логарифмической шкале с основанием два, поэтому единицей их измерения служит октава (интервал с отношением верхней и нижней частот 2). Плотность звуковой энергии в точке расположения приемника звука измеряется в Дж/м³, объемная скорость звука – в м³/с и т. д.

После введения Международной системы единиц (СИ) были стандартизованы и указанные выше акустические единицы.

7.5 Ультразвук

Как видно из рассмотренных выше явлений, звуковые колебания, воспринимаемые непосредственно ухом человека, имеют определенный частотный диапазон, который ограничен снизу частотой (16-25) Гц, а сверху – частотой (10-15) кГц. Звуковые колебания, частота которых ниже (10-25) Гц называются инфразвуком, а выше (10-15) кГц – ультразвуком. (Здесь заметим существование аналогии при рассмотрении шкалы электромагнитных колебаний: человеческий глаз непосредственно воспринимает эти колебания в весьма ограниченном диапазоне частот – снизу $3,75 \cdot 10^{14}$ Гц, а сверху – $7,5 \cdot 10^{14}$ Гц).

Существуют специфические особенности звуковых волн с частотой колебаний свыше 10-15 кГц, обусловившие их выделение в самостоятельную область науки и техники. Диапазон частот ультразвуковых волн чрезвычайно широк. В настоящее время достигнуты частоты порядка нескольких гигагерц ($\sim 10^9$ Гц) в жидкостях и порядка 10^2 гигагерц в твердых телах. Для газов теоретический верхний предел частот составляет порядка 10^9 Гц, для твердых тел – порядка 10^{13} Гц.

Особенности распространения ультразвука в среде обусловлены его взаимодействием с молекулами вещества; характер этих взаимодействий изучается молекулярной акустикой. Наиболее характерно для ультразвука наличие отчетливо выраженной дисперсии, т. е. резкого изменения показателя преломления звука с частотой, сопровождающегося резким возрастанием поглощения. Эти эффекты объясняются в молекулярной акустике существованием разнообразных релаксационных процессов в веществе (возбуждение колебательных и вращательных степеней свободы молекул, диссоциация, химические реакции, перестройка ближнего порядка молекул в жидкостях, релаксационные процессы в твердых телах – кристаллах, и т. д.).

Сравнительно малая длина ультразвуковых волн зачастую позволяет рассматривать их распространение методами геометрической акустики, в которой вводится представление о звуковых лучах, как линиях, касательные к которым в каждой точке пространства определяют направление распространения потока звуковой энергии. Наиболее простой вид имеют звуковые лучи в однородной среде, в которой они являются прямыми линиями, нормальными к волновым поверхностям. Уравнения и законы геометрической акустики в основном являются аналогами законов геометрической оптики. Так, на границе раздела однородных сред выполняются законы отражения и преломления звука; в неоднородной среде с непрерывно изменяющимися свойствами возникает искривление лучей – рефракция звука (обуславливающая, в частности, эффекты волнового распространения звука в море, образования «зон молчания» и т. п.). Все эти закономерности присущи ультразвуку и используются на практике. В частности, на законе прямолинейного распространения ультразвука основана ультразвуковая дефектоскопия, гидролокация и т. д. (см. ниже).

Другой важной особенностью ультразвука является возможность концентрации значительной энергии в его лучах даже при малой амплитуде колебаний, поскольку плотность потока энергии пропорциональна квадрату частоты колебаний. Интенсивные ультразвуковые колебания с плотностью потока энергии несколько десятков Вт/см² способны вызывать различные специфические действия на вещества и живые организмы – распыления и эмульгирование жидкости, разрушение клеток биологических тканей и т. д. Это является основой для промышленного использования методов ультразвуковой технологии, терапевтического применения ультразвука; некоторые из этих методов будут рассмотрены ниже.

Расчет ультразвукового поля в веществе может быть приведен с использованием следующих формул.

Полная энергия ультразвуковой волны в 1 объеме E определяется как

$$E = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 = 2\pi^2 \rho f^2 A^2 = \frac{1}{2} \rho V^2, \quad (7.94)$$

где ρ – плотность вещества, A – амплитуда колебаний, $\omega=2\pi f$, f – частота колебаний, $V = \omega A$ – амплитуда скорости колебательного движения. Интенсивность I звуковой волны (плотность потока энергии) равна (C – скорость звука):

$$I = EC. \quad (7.95)$$

Амплитуда ускорения равна

$$B = \omega \sqrt{2I/\rho C \cdot 10^7} \text{ см/с}^2. \quad (7.96)$$

Сила (громкость) звука часто может быть выражена также в децибелах по формуле:

$$K = 10 \lg \frac{I_1}{I_2}, \quad (7.97)$$

где I_1 – интенсивность исследуемого звука, $I_2 = 10^{-16} \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}$ – порог слышимости. Однако в ультразвуковом диапазоне эта величина не используется. Вместо этого интенсивность ультразвука в жидкости часто оказывается более удобным характеризовать с помощью эмпирических формул типа:

$$I = \frac{1,44 \cdot 10^{-13} f^2 V^2}{\rho C}, \quad (7.98)$$

где f – в Гц, ρ – в г/см³, C – в см/с, V – «высокочастотное напряжение» в В. Переменное звуковое давление, создаваемое ультразвуком в среде, равно

$$P = \rho C V = \omega \rho C A (\text{бар}). \quad (7.99)$$

При постоянной интенсивности звука давление не зависит от частоты:

$$P = \sqrt{2\rho C I \cdot 10^7} \text{ дин/см}^2. \quad (7.100)$$

Потери энергии ультразвуковой волны в среде вызывают повышение ее температуры; так, при облучении ультразвуком (в течение 30 с) температура белков (яичного альбумина и коагулированного яичного белка) повышается на 2 К, яичного желтка – на 11 К, мозгов и печени – примерно на 9 К, жира – на 25 К. С повышением частоты ультразвука его тепловое действие усиливается. Эти эффекты, в частности, используются для ускорения ряда технологических процессов в мясной промышленности. Количественной характеристикой поглощения ультразвука в материале является закон затухания интенсивности ультразвуковой волны, который имеет вид:

$$I = I_0 \exp(-2\alpha x), \quad (7.101)$$

где α – коэффициент поглощения, м⁻¹. Например, при $f=1$ МГц, для воды $\alpha \approx 0,03 \text{ м}^{-1}$, для мышечной ткани $\alpha \approx 20\text{--}25 \text{ м}^{-1}$, жировой ткани $\alpha \approx 13 \text{ м}^{-1}$, почек и печени – около 20 м^{-1} , и т. д. Обратная величина ($1/\alpha$) характеризует «глубину проникновения» ультразвука в материал. С повышением частоты

величина α линейно возрастает для ряда материалов, в частности, для живых тканей. В «классической» теории затухания величина α представляется в виде суммы вкладов за счет вязкости (α_1) и теплопроводности (α_2) среды ($\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$), причем α_1 определяется формулой Стокса:

$$\alpha_1 = \frac{8\pi^2 f^2 \eta}{3 c^3 \rho}, \quad (7.102)$$

а α_2 – формулой Кирхгофа:

$$\alpha_2 = \frac{2\pi^2 f^2}{c^3 \bar{\rho}} \frac{\gamma-1}{c_p} \lambda_T, \quad (7.103)$$

где f – частота ультразвука, C_p и C_v – удельные теплоемкости при постоянном давлении и постоянном объеме, соответственно, λ_T – коэффициент теплопроводности, ρ – средняя плотность, η – коэффициент вязкости среды. Результирующий коэффициент поглощения α , вычисленный с использованием этих формул, в частности, хорошо согласуется с экспериментальными данными в интервале частот 0,5-2 МГц. При низких частотах имеют место значительные отклонения от предсказаний «классической» теории.

В качестве источников ультразвука применяются акустические излучатели различных типов. Конкретный выбор того или другого источника зависит от требований мощности и других технологических показателей планируемого технологического процесса. Для работы в газах (и частично в жидкостях) широко применяются аэродинамические преобразователи (типа сирены), а также магнитострикционные преобразователи. В пищевой промышленности некоторое распространение получили гидродинамические преобразователи («жидкостные свистки»), в которых движущаяся струя жидкости, попадая на острый край обтекаемого препятствия, создает около него чередующиеся завихрения, перепады давления, в которых вызывают ультразвуковые волны.

Наиболее высокая частота и максимальные интенсивности ультразвука достигается с применением пьезоэлектрических преобразователей. Так, кварцевые излучатели дают ультразвук с частотой до 5-6 МГц при интенсивности звука до 10^2 Вт/см² (при КПД 40-50 %). Более эффективны пьезоэлектрические преобразователи на основе титаната бария.

Для измерения мощности ультразвука широко используются акустоэлектрический эффект, т. е. возникновение постоянного тока (или Э.Д.С.) под действием интенсивной ультразвуковой волны в направлении ее распространения. Это обусловлено частичной передачей импульса и энергии от звуковой волны носителям электрического заряда – электронам и дыркам (в полупроводниках) и возникновению их направленного движения. Величина акустоэлектрической э.д.с. в полупроводниковых кристаллах с пьезоэлектрическими свойствами типа, CdS достигает 1В/см при интенсивности звуковой волны порядка 0,1 КВт/м².

Источники ультразвуковых колебаний существуют и в природе. Помимо атмосферных процессов, в результате которых возникают звуковые

волны с весьма широким диапазоном частот, ультразвуки излучаются специфическими органами некоторых животных. Например, летучие мыши, дельфины и другие животные обладают аппаратом ультразвуковой локации, действующим в диапазоне десятков кГц. Собаки, кошки и другие животные способны воспринимать ультразвуковые волны в диапазоне до 100 кГц.

Использование ультразвука в науке и технике идет по многим направлениям – в медицине как средства диагностики и лечения, в подводной связи и сигнализации, в технике, как метод исследования различных процессов контроля качества изделий, интенсификации технологических процессов, воздействия на структуру материалов для размерной обработки материалов и т. д.

Изменение состояния и свойств среды существенно сказывается на характере распространения в ней акустических волн, например, на степени поглощения звука и скорости звуковой волны. Регистрируя эти изменения с помощью различных акустических приемников, можно сделать заключения о структуре и свойствах среды. При этом высокая частота ультразвуковых колебаний обуславливает сравнительно малую длину волны, что существенно повышает разрешающую способность ультразвуковых методов исследования и контроля.

Одним из основных применений ультразвука в указанных целях является обнаружение и исследование макроскопических неоднородностей в материалах с размерами больше или порядка длины звуковой волны – ультразвуковая дефектоскопия. При наличии, например, пустоты (раковины) в металлической отливке поглощение звука в этом месте будет значительно ослаблено. Регистрируя интенсивность проходящего через отливку ультразвука, легко выявить такой дефект и установить его форму по резкому локальному изменению интенсивности прошедшего звука. Степень этого изменения определяет размеры дефекта. Известно несколько основных методов промышленной дефектоскопии. Сказанная выше идея лежит в основе так называемого теневого метода, применяемого для обнаружения дефектов в плитах, листах, резиновых шинах и т.п. Резонансный метод используется для исследования труб, листов и т.п. при одностороннем доступе к ним и основан на изменении резонансной частоты в зависимости от его размеров и наличия дефектов. Импедансный метод используется для обнаружения нарушения связи в слоистых конструкциях по изменению силы реакции изделия на датчик, возбуждающий в изделии колебания ультразвуковой частоты. Для этих же целей может использоваться метод, основанный на анализе частотного спектра свободных колебаний в системе после ее возбуждения ударом. Распространенным в практике является эхометод, при котором в среду посылаются короткие ультразвуковые импульсы и регистрируются амплитуда и время прихода «эхосигналов», отраженных от тех или других преград. По времени, прошедшему от момента послышки сигнала до момента приема эхосигнала, определяется расстояние до преграды, а по амплитуде эхосигнала можно судить о размерах преград.

Область применения этого метода весьма широка, и его реализация осуществляется с помощью эхолокаторов разнообразных типов.

Методы ультразвуковой локации применяются при выявлении неоднородностей в твердых телах, и в жидких и газообразных средах. На ультразвуковых частотах работают различные гидролокаторы, служащие для обнаружения движущихся и неподвижных объектов в воде, шумопеленгаторы, служащие, для обнаружения источников акустического шума, и эхолоты, используемые для определения глубинных водоемов и определением характера грунта на дне, поиска мест скопления рыбы и т. д. Как уже упоминалось выше, средства для звуковой локации имеют также некоторые животные и птицы. Например, летучие мыши излучают ультразвуковые импульсы с длительностью в несколько мс на частоте 10-150 кГц. Частота повторения импульсов зависит от расстояния до препятствия и возрастает от 10-20 Гц до 250 Гц при приближении к нему, что позволяет летучей мыши быстро реагировать на препятствия и точно корректировать свой полет. Дельфины издают поскрипывающие звуки длительностью в несколько мс, причем частота повторения также возрастает от 1-2 Гц до сотен Гц в зависимости от расстояния до объекта. При этом животные способны выделять полезный сигнал на фоне множества подобных «паразитных» сигналов. В известной мере способность к звуковой локации присуща и человеку. Помимо дефектоскопии и гидролокации, аналогичные ультразвуковые методы применяются для исследования структуры частей живых организмов (сердца, глазного яблока) и ранней диагностики злокачественных опухолей в медицине и т. д.

На изменение скорости распространения и затухания ультразвука в среде в зависимости от ее параметров состояния, на которые влияют условия окружающей среды, основаны методы промышленного контроля наличия или отсутствия примесей, а также технологических процессов экстрагирования, растворения, полимеризации и др. Изменение скорости ультразвука в движущейся среде при известной его скорости в неподвижной среде позволяет весьма точно (до 1-3%) определить скорость потока жидкости или газа, что лежит в основе действия ультразвуковых расходомеров.

В научных исследованиях ультразвуковые методы применяются для изучения свойств монокристаллов и поликристаллических материалов, например, для исследования дефектов кристаллической структуры (дислокаций), структуры магнитных доменов, зерен (кристаллов) и т. д., а также для измерения упругих и вязких констант материалов и регистрации изменений плотности, температуры, давления и других параметров состояния вещества.

Всем этим методам ультразвукового контроля присущи такие важные достоинства, как малое влияние процесса измерения на исследуемые явления, малые затраты времени на измерение, высокая чувствительность и точность методов и возможность использования полученных результатов для

автоматизации управления технологическими процессами, что в последнее время приобретает все большее значение в связи с решением глобальных задач комплексной автоматизации производства.

Как уже указывалось выше, в основе методов ультразвукового воздействия на те или другие среды лежит возможность создания ультразвуковых пучков высокой интенсивности и направленности. При больших интенсивностях взаимодействие звуковых волн со средой приобретает нелинейный характер, что обуславливает различные явления, в частности, появление акустических потоков и кавитации. Например, потоки Рэлея-Эккарта, т. е. постоянные потоки жидкости или газа в сторону распространения ультразвуковой волны обусловлены частичным превращением энергии волны в тепловую энергию вследствие диссипативных потерь различного рода. Направление этих потоков определяется законом сохранения импульса. При распространении ультразвука в трубе образуется стоячая волна, между узловыми плоскостями которой появляются циркулирующие замкнутые потоки, скорости которых достигают нескольких м/с. Вблизи любой неоднородности среды, в которой распространяется ультразвук, возникают микропотоки – мелкомасштабные локальные течения среды. Все эти потоки в совокупности вызывают усиленное перемешивание среды и создание высокой степени однородности среды – гомогенизации. Это используется в различных технологических процессах получения суспензий и эмульсий, аэрозолей, для ускорения растворения и диффузии и т. д. Очень важным с практической точки зрения является возникновение явления кавитации в мощной ультразвуковой волне – образования и захлопывания полостей жидкости. Полости образуются в результате разрыва жидкости во время полупериодов разрежения (растяжения) среды на кавитационных зародышах, а захлопываются во время полупериодов сгущения (сжатия) в волне. Кавитационными зародышами могут служить плохо смачиваемые участки твердого тела, твердые частицы в жидкости, микроскопические пузырьки газа и т. п. Теория показывает, что при некотором критическом давлении

$$P_{кр} = P_{\alpha} - \frac{2}{3\sqrt{3}} \left(\frac{2\sigma}{R_0} \right) \left[1 + (P_0 - P_{\alpha}) \frac{R_0}{2\sigma} \right]^{-1/2} \quad (7.104)$$

(P_0 – равновесное внешнее давление, P_{α} – давление насыщенного пара, σ – поверхностное натяжение жидкости).

Кавитационный зародыш в форме газового пузырька радиуса R_0 теряет устойчивость и начинает неограниченно расширяться, что и означает начало процесса кавитации. Таким образом, кавитационные полости создаются при определенной интенсивности ультразвука. Например, минимальная интенсивность ультразвука, необходимая для начала кавитации в воде, составляет 0,16-2 Вт/см² при $f=15$ кГц («кавитационный порог»).

Большое влияние на возникновение и течение кавитации оказывает вязкость жидкости. Так, для возбуждения кавитации в касторовом масле с

высокой вязкостью требуется звуковое давление примерно в 2 раза выше, чем для возбуждения кавитации в керосине, вязкость которого составляет на два порядка меньше. С повышением температуры жидкости кавитационный порог снижается, однако эта зависимость не является линейной из-за одновременного уменьшения вязкости жидкости.

Амплитуда давления в ударных кавитационных волнах оценивается по формуле Рэлея (выведенной для несжимаемой невязкой жидкости) для максимального давления в жидкости на расстоянии $r=1,587R$ от центра пузырька с конечным радиусом R :

$$P = 0,163P_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^3, \quad (7.105)$$

где R_0 – начальный радиус пузырька, P_0 – гидростатическое давление в жидкости. При $R_0/R=30$ оценка по этой формуле дает $P_0 \approx 4,5 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$ (т.е. 4500 атм).

Продолжительность захлопывания пустого кавитационного пузырька τ оценивается по формуле:

$$\tau = 0,915R_0 \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}. \quad (7.106)$$

В течение полупериода ультразвуковой волны обычно захлопывается большая часть кавитационных полостей. Только при высоких частотах в жидкости существуют пузырьки, не захлопывающиеся в течение нескольких периодов колебаний.

При совпадении частоты ультразвуковой волны и частоты собственных пульсаций кавитационных пузырьков их колебания принимают резонансный характер. Собственная частота колебаний пузырька воздуха при атмосферном давлении равна

$$f = \frac{0,328}{R}.$$

При этом резонансе возникающие давления, согласно расчетным данным, могут превышать гидростатическое в 150 000 раз.

Процесс захлопывания является быстрым, поэтому сжатие воздуха в нем можно считать адиабатическим процессом, что обуславливает скачок температуры газа в пузырьке, который можно оценить с помощью уравнения адиабатического процесса:

$$T_0 R^{3(\gamma-1)} = T R_x^{3(\gamma-1)}, \quad (7.108)$$

где R_x – текущий, R – максимальный радиус пузырька, T_0 – начальное, T – текущее значение температуры, $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$. Расчеты по этой формуле показывают, что при определенных условиях температура газа при сжатии пузырька может повышаться до 2000 К.

Кавитация приводит к появлению целого ряда побочных эффектов, которые на практике могут оказаться вредными. Например, они неблагоприятно сказываются на работе гидравлических машин, турбин, насосов, гребных винтов кораблей и т. д., так что приходится принимать

специальные меры по их устранению. Это обусловлено кавитационной эрозией – износом твердой поверхности в кавитирующей жидкости. К числу этих побочных явлений относятся, например, появление акустического ветра, скорость которого возрастает с увеличением интенсивности протекания кавитации; образование микропотоков жидкости вблизи колеблющихся кавитационных пузырьков; образование ударных волн в жидкости при захлопывании полостей и связанное с этим развитие кавитационной эрозии, интенсивность которой зависит от содержания газа в пузырьках (уменьшается с ростом содержания газа); ионизация газа в кавитационной полости в результате ее захлопывания (в результате адиабатического нагревания при сжатии), вызывающая так называемую сонолюминесценцию (ультразвуковую люминесценцию), образование активных химических радикалов, которые инициируют химические реакции (это вызывает химическое действие ультразвука), и др. Интенсивность протекания кавитации под действием ультразвука существенно зависит от температуры и статического давления жидкости; с повышением давления степень кавитационной эрозии быстро возрастает.

Увеличение интенсивности ультразвуковой волны вызывает усиление кавитационной эрозии до определенного предела в соответствии с соотношением между временем захлопывания пузырька τ , возрастающим с увеличением интенсивности ультразвука и периодом колебаний в ультразвуковой волне. При дальнейшем усилении ультразвука скорость захлопывания и энергия ударной волны спадают, а механическая эрозия ослабевает. Однако этот предел реализуется лишь на высоких частотах (сотни кГц) при очень больших интенсивностях ультразвука, достигаемых при фокусировке концентраторами ультразвука.

На явлении кавитации основаны многие технологические процессы с использованием ультразвука. Так, ультразвуковая очистка основана на действии ударных волн, возникающих при захлопывании кавитационных пузырьков. Скорость такой очистки велика, (процесс занимает считанные секунды), а ее эффективность значительно выше, чем достигаемая другими традиционными методами. Если при этом процесс протекает в жидкости, химически активной по отношению к удаляемой пленке загрязнения, то процесс носит характер «ультразвукового травления». Это является основой ультразвукового лужения при пайке материалов, при котором достигается быстрое удаление окисной пленки и хороший контакт припоя с чистым металлом. При этом эффективность кавитационной очистки настолько велика, что при помощи ультразвука можно лудить не только металлы, но также и керамику, стекло и т. п.

Под воздействием ударных кавитационных волн возникает интенсивное диспергирование твердых и жидких материалов. Это используется для получения эмульсий и суспензий, отличающихся монодисперсностью, величина которой плавно регулируется изменением частоты ультразвука. Особое распространение этот метод эмульгирования

приобрел в пищевой технологии. Одним из таких процессов является получение аэрозолей путем распыления жидкости. Низкочастотное распыление в диапазоне частот в десятки кГц обладают большой производительностью и применяется на практике, в частности, для распыления жидкого горючего. Механизм распыления связан с образованием поверхностных волн большой амплитуды, от гребней которых обрываются маленькие капельки под действием инерционных сил. Высокочастотное распыление жидкостей – в диапазоне нескольких МГц – носит кавитационный характер и обладает меньшей производительностью, но полученный аэрозоль – высокой степенью монодисперсности. Поэтому этот способ распыления применяется для получения аэрозолей лекарственных веществ, используемых, например, в процессе ингаляции.

Действие ультразвука используется для ускорения процессов экстрагирования, диффузии и сушки материалов; особенно важна при этом возможность снижения температуры процесса и тем самым его применение для неустойчивых к нагреву или окислению веществ. Физическая сущность процесса заключается в интенсификации процессов массообмена в жидкости в результате разрушения динамического пограничного слоя у поверхности веществ. Этот же процесс лежит в основе ускорения и улучшения качества закалки металлов путем введения ультразвуковых волн в закалочную ванну. Гидродинамические силы, возникающие под воздействием ультразвука могут вызывать также и обратный диспергированию процесс коагуляции, т.е. сближение взвешенных частиц аэрозоля и ускорение их слияния, причем этот эффект распространяется на аэрозоли с частицами сколь угодно малых размеров.

Зависимость характеристик акустического поля в атмосфере от состава воздуха, в частности, от степени его запыленности, используется в акустических пылемерах. Запыленность измеряется по изменению энергии колебаний от источника (генератора звука или ультразвука), воспринимаемых приемником в измерительной камере, в которую подается исследуемый воздух.

Под воздействием звуковых (или ультразвуковых) волн в воздухе мелкие частицы, содержащиеся в пыли, вовлекаются в колебания, и частота их соударений возрастает, что усиливает тенденцию к коагуляции частиц пыли и ускорению их оседания. На этом основано действие акустических пылеуловителей, применяемых в закрытых аппаратах химической, цементной промышленности и т. п. Они наиболее эффективны при больших степенях запыленности воздуха – $1-5 \text{ г/м}^3$ и более.

Ультразвуковое облучение расплавов способствует улучшению качества отливки металлов. Это обусловлено коалесценцией газовых пузырьков под действием гидродинамических сил, что приводит к уменьшению относительного объема раковин и газовых включений в расплаве. Явление кавитации приводит к увеличению числа зародышей кристаллизации в объеме расплава, что обуславливает

мелкокристаллическую структуру затвердевшего металла; при этом наличие акустических потоков обеспечивает гомогенность отливки сплавов металлов с различными свойствами.

Ультразвуковое резание материалов позволяет производить механическую обработку хрупких материалов (керамики, стекла, кварца) любой твердости при обеспечении высокой точности обработки и степени чистоты поверхности. Торец режущего инструмента колеблется с ультразвуковой частотой, вбивая абразивные частицы в поверхность обрабатываемой детали. Этот способ резания широко применяется, в частности, при изготовлении полупроводниковых элементов из германия и кремния.

Ультразвуковая сварка применяется при сваривании деталей резко различных размеров, когда возникает опасность перегрева более мелкой детали, а также при сварке разнородных материалов. Температура зоны сваривания ниже температур плавления материалов (холодная сварка), поэтому основным механизмом воздействия ультразвука является, по-видимому, ускорение процесса взаимной диффузии свариваемых материалов в зоне контакта. Размягчение термопластичных пластмасс под действием ультразвука используется для ультразвуковой сварки этих материалов.

Широкое распространение приобрело применение ультразвука в биологии и медицине как средства исследования и воздействия на ткани и органы живых организмов. Особо важным при этом является возможность четкой локализации воздействия при применении высокочастотных фокусирующих ультразвуковых систем. В зависимости от интенсивности ультразвука различают 3 основных типа его воздействий. При слабых интенсивностях ($0,1-1 \text{ Вт/см}^2$) воздействие ультразвука выражается в ускорении обменных процессов некоторым прогревом и микромассажем, что используется в ультразвуковой терапии. При средних интенсивностях (десятки Вт/см^2) возникают специфические реакции угнетения, в частности, нервных тканей, что используется в экспериментальной биологии и патологии. При больших интенсивностях ультразвука (сотни Вт/см^2) возникает необратимое угнетение с последующим полным разрешением. Эти явления лежат в основе ультразвуковой хирургии. При этом можно фокусировать ультразвуковую энергию, создавая тем самым достаточно мощное локальное воздействие на определенный участок тела без необратимых повреждений прилегающего окружения. Такой способ предложен, например, для разрушения опухолевых образований мозга без трепанации черепа. (Описан в книге «Материалы нейрохирургической конференции» под ред. А.И. Арутюнова, Харьков, 1969 г.)

ГЛАВА 8 МОЛЕКУЛЯРНОЕ СТРОЕНИЕ ВЕЩЕСТВА

8.1 Законы идеальных газов

Молекулярная физика представляет собой раздел физики, в котором исследуется взаимосвязь между свойствами вещества и его молекулярной («микроскопической») структурой. В круг явлений, изучаемых молекулярной физикой, входят: фазовые превращения (в частности, изменения агрегатного состояния вещества – испарение, плавление и т. д.), равновесие фаз, свойства разреженных газов и веществ в конденсированном состоянии (физика жидкостей и кристаллов) и другие вопросы. Молекулярная физика является теоретической основой материаловедения и в качестве таковой указывает пути создания веществ с заданными свойствами – металлических сплавов, строительных материалов, полимеров, металлокерамики, полупроводников и т. п.

Основы молекулярной физики были заложены еще в глубокой древности (атомистическое учение Демокрита). Они формируются в виде следующих основных положений:

- 1) носителями свойств являются мельчайшие частицы – молекулы, которые, в свою очередь, состоят из носителей свойств элементов-атомов (в простейшем случае молекула может состоять из одного атома, см. ниже);
- 2) молекулы находятся в состоянии хаотического (теплового) движения;
- 3) молекулы взаимодействуют друг с другом, причем характер этого взаимодействия зависит от расстояния между ними.

Число молекул в единице объема вещества обычно очень велико, поэтому их совокупность подчиняется статистическим закономерностям; это означает, что состояние отдельной молекулы или малой их группы может значительно отличаться от «усредненного» состояния вещества в целом. По этой причине «молекулярная» и «статистическая» физика являются по существу синонимами, хотя исторически развитие атомно-молекулярных представлений и статистики (теории вероятностей) шло в значительной мере независимыми путями.

Различие между молекулами и образующими их атомами является, отнюдь, не простым вопросом и было понятно лишь в XX столетии. Молекула является мельчайшим носителем свойств данного вещества, вступающего в характерные для него химические реакции, в то время как атом является мельчайшей частицей элемента, образующего характерные для него химические соединения. Если атом является химически мало активным, то есть не образует соединений, то одновременно является молекулой химически инертного вещества; при обычных условиях состояние такого вещества – химически инертный газ (например, гелий, неон и др.). Напротив, другие атомы отличаются высокой химической активностью и легко вступают в соединения; тогда они образуют двух- и многоатомные молекулы

(так, атом элемента «кислорода» О образует двухатомную молекулу вещества кислорода O_2 , трехатомную молекулу озона O_3 , а также входит в состав многих других молекул веществ, например, воды).

Второе положение молекулярно-кинетической теории – наличие хаотического «теплового» движения – соответствует тому факту, что в природе имеются источники тепла, поддерживающие в материальных телах определенный, «температурный баланс». Например, Земля нагревается лучами Солнца, в противном случае на ней царил бы «космический холод». Получая энергию, молекулы вещества приобретают некоторую скорость, а следовательно, кинетическую энергию $\frac{1}{2}mV^2$, не зависящую от направления вектора скорости \vec{V} (величина $(\vec{V})^2$ – скаляр). Ввиду случайного характера процессов получения и отдачи энергии молекулы вещества движутся во всевозможных направлениях со всевозможными скоростями, однако обмен энергиями при их случайных сближениях – столкновениях – приводит к тому, что в соответствии со статистическими законами молекулы имеют скорости и энергии, близкие к «средним» значениям. Среднее значение тепловой энергии хаотического движения молекул характеризует «температуру» вещества при определенных условиях.

Наличие сложной внутренней структуры атомов и молекул, содержащих электрически заряженные элементарные частицы, обуславливает существование сил взаимодействия, проявляющихся при достаточном сближении молекул и быстро убывающих с увеличением расстояния между молекулами. Основные характеристики этих межмолекулярных взаимодействий будут отдельно рассмотрены ниже, в п. 8.3. Здесь же отметим, что ввиду этих сил состояние вещества зависит прежде всего от среднего расстояния между молекулами \bar{l} , которое по порядку величины равно $\bar{l} \sim n_m^{-1/3}$, где n_m – число молекул в единице объема (наряду с величиной n_m , можно охарактеризовать состояние вещества его плотностью $\rho = n_m m$, где m – масса молекулы, определяемая как $\frac{\mu}{N_a}$, μ – масса одного моля вещества, $N_a \approx 6,02 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹ – число Авогадро). При уменьшении плотности или концентрации молекул среднее расстояние между ними возрастает, и силы межмолекулярного взаимодействия ослабевают. При малых плотностях молекулы вещества движутся независимо друг от друга и взаимодействуют лишь при кратковременных соударениях, при которых они ведут себя как твердые «шарики», изменяя направление и величину скорости в результате соударения. Такое состояние вещества называется газообразным. Если взаимодействия между молекулами не проявляются во всем рассматриваемом интервале плотностей, то вещество является «идеальным газом». Такое состояние характерно для любого вещества при высоких температурах и низких давлениях и весьма распространено в природе. Законы идеальных газов являются простейшими по сравнению с закономерностями поведения вещества в других состояниях,

в которых существенны межмолекулярные взаимодействия. Поэтому рассмотрим эти законы более подробно.

Находясь под внешним давлением P при температуре T масса M газа с молекулярной массой μ занимает определенный объем V . Все эти параметры связаны универсальным соотношением, одинаковым для всех газов и называемым уравнением Менделеева-Клапейрона.

$$PV = \frac{M}{\mu} RT, \quad (8.1)$$

где $R = 8,3 \text{ Дж/моль} \cdot \text{К}$, R – универсальная газовая постоянная (1 моль – количество вещества, содержащее $N_a = 6,02 \cdot 10^{23}$ молекул), $R = kN_a$. «Макроскопические» параметры состояния P и T , измеряемые приборами, связаны с «микроскопическими» параметрами – средней энергией теплового движения молекул газа E и концентрацией молекул (их числом в единице объема газа) n соотношениями:

$$(a) \quad P = \frac{2}{i} nE, \quad (б) \quad T = \frac{2E}{ik}, \quad (8.2)$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$ – постоянная Больцмана, $k = R/N_a$, i – «число степеней

свободы» молекулы, равное 3 для одноатомных, 5 – для двухатомных и 6 – для многоатомных молекул. Из формул (8.2) (а, б) следует соотношение:

$$P = nkT. \quad (8.3)$$

Средней энергии молекул \bar{E} соответствует «среднеквадратичная» скорость молекул $\sqrt{V^2} = \sqrt{\frac{2E}{m}}$ (m – масса молекулы). Все i молекулы идеального газа в совокупности обладают кинетической энергией

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m v^2, \quad (8.4)$$

которая характеризует тепловую энергию или «внутреннюю энергию» идеального газа U . Для заданной массы газа определенной природы величина U зависит только от температуры, т. е. является «функцией состояния» идеального газа.

Из уравнения (8.1) видно, что изменение одного из параметров состояния (P, V, T) при фиксированном значении второго приводит к закономерному изменению третьего параметра. Процессы изменения состояния газа, при которых один из параметров остается неизменным, называют «изопроцессами» они будут рассмотрены в гл. 10. Однако существенно то, что при изменении состояния газ может совершать внешнюю работу, если при этом его объем возрастает. Например, при нагревании газа при постоянном давлении его объем в результате расширения возрастает на некоторую величину ΔV и совершается работа $P \cdot \Delta V$. Поскольку, в зависимости от условий проведения процессов, изменение объема может быть очень большим, и давление газа – высоким, то ясно, что газ может совершать большую полезную работу: на этом основано

применение газа в качестве основного рабочего тела в тепловых двигателях (см. гл. 10).

К теплофизическим свойствам идеального газа относятся его удельная (c) и молярная (C) теплоемкости, которые связаны соотношением $C = \mu c$. В зависимости от условий нагревания газа, различают молярные теплоемкости при постоянном объеме (C_V) и постоянном давлении (C_P), которые выражаются соотношениями:

$$C_V = \frac{i}{2}R, \quad C_P = C_V + R = \frac{i+2}{2}R. \quad (8.5)$$

Как уже указывалось выше, при обычных условиях в единице объема газа содержится огромное количество молекул, совершающих хаотическое тепловое движение и лишь время от времени кратковременно взаимодействующих друг с другом при столкновениях. Поведению таких больших ансамблей частиц присущи статистические закономерности, изучаемые теорией вероятностей. Изложение этих вопросов, образующих предмет рассмотрения «статистической физики», выходит за рамки книги. Суть дела состоит в том, что большой ансамбль частиц обнаруживает закономерности, не присущие отдельным молекулам газа. Так, параметры «давление» и «температура» не имеют смысла применительно к одной или нескольким молекулам, а приобретают определенное содержание именно при достаточно большом числе молекул.

Все молекулы имеют совершенно различные направления и величины вектора скорости (теоретически от нуля до ∞), однако вероятность $\frac{dn}{n}$ обнаружения молекул со скоростями в интервале $(V, V + dV)$ является вполне определенной величиной:

$$\frac{dn}{n} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} V^2 \exp \left(-\frac{mV^2}{2kT} \right). \quad (8.6)$$

Это выражение называется распределением Максвелла. Максимум распределения характеризует «наиболее вероятную» скорость молекулы газа

$V_B = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$. Близкие к «наиболее вероятной» скорости V_B среднеарифметическая $\left(\bar{V} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \right)$ и среднеквадратичная скорости $\left(\sqrt{\bar{V}^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \right)$ молекул.

«Длина свободного пробега» молекулы между двумя последовательными столкновениями изменяется совершенно беспорядочно для каждой отдельной молекулы, однако в совокупности для всего ансамбля молекул характерно вполне определенное значение «средней длины свободного пробега» $\bar{\lambda}$, равное:

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi \bar{d}^2 n} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi \bar{d}^2 P}, \quad (8.7)$$

где \bar{d} – «средний эффективный диаметр» молекулы. Смысл этой величины раскрывается при рассмотрении процессов силового взаимодействия молекул (см. ниже). Средний промежуток времени τ между парными столкновениями молекул опопляется, очевидно, зависимостью в виде $\tau = \bar{\lambda}/\bar{v}$, где $\bar{\lambda}$ – средняя длина свободного пробега, \bar{v} – средняя скорость молекул.

При постоянной температуре величина $\bar{\lambda}$ обратно пропорциональна давлению и поэтому с его понижением возрастает. Однако это возрастание, естественно, ограничено размерами содержащего газ сосуда. Поэтому при определенном давлении в сосуде величина $\bar{\lambda}$ перестает изменяться. Состояние газа при таких (и более низких) давлениях называется «вакуумом». Формула (8.7) является частной, следует из более общей формулы, приведенной в п. 8.4.

Хаотическое движение молекул газа сопровождается переносом массы, импульса и энергии. Эти процессы называются «явлениями переноса» и имеют место не только в газах, но также и в жидкостях и твердых телах. Перенос массы из области с большей концентрацией молекул (и, следовательно, с большей плотностью газа $\rho = nm$) в область с меньшей концентрацией, т. е. под действием «градиента концентрации» (или градиента плотности) называется диффузией. Перенос импульса $m\bar{v}$ молекулами из одного слоя движущегося газа в другой, движущийся с иной скоростью, т. е. под действием «градиента скорости» сопровождается возникновением, согласно 2-му закону Ньютона, сил трения (вязкости) между этими слоями и называется «внутренним трением» или вязкостью. Перенос энергии $E \sim T$ из более горячего слоя газа в более холодный, т. е. при наличии «градиента температуры», сопровождается переносом тепла в газе и называется теплопроводностью. Все три явления переноса математически описываются сходными выражениями: количество массы (импульса, количество тепла), перенесенное через единичную площадку в газе в единицу времени, пропорционально градиенту плотности (скорости, температуры), а коэффициент пропорциональности называется коэффициентом диффузии (вязкости, теплопроводности). Выражение для «коэффициентов переноса» выводятся в молекулярно-кинетической теории газов и имеют вид (для диффузии, вязкости и теплопроводности, соответственно):

$$D = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda}, \quad \eta = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda}, \quad \lambda = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda} C_V \quad (8.8)$$

(смысл всех обозначений был указан выше). Поскольку, как указывалось выше, $\bar{\lambda} \sim 1/\rho$, а $\rho \sim P$, то величины η и λ не зависят от давления газа (и от его плотности) до тех пор, пока сохраняется зависимость $\bar{\lambda} \sim 1/\rho$. Когда $\bar{\lambda}$ становится сравнимой с размерами сосуда, содержащего газ, то при дальнейшем снижении P величина $\bar{\lambda}$ не изменяется, а ρ продолжает уменьшаться. Поэтому в условиях вакуума коэффициенты теплопроводности и вязкости уменьшаются с понижением давления. В сильно разреженных

газах наблюдаются и другие специфические эффекты. Одним из них является так называемая «тепловая эффузия» – перетекание газа от более холодных к более горячим областям сосуда, в результате чего в различных местах нагретых мест устанавливаются разные давления газа. Это обусловлено тем, что, в отличие от обычных давлений, когда течение газа подчиняется законам аэродинамики (см. гл. 6) и условием равновесия является равенство давлений, в условиях вакуума молекулы газа двигаются независимо друг от друга, образуя «эффузионный поток», при котором условием равновесия является равенство молекул, проходящих в единицу времени через единичную площадку в противоположных направлениях. Тепловую эффузию (называемую также «эффектом Кнудсена») можно наблюдать в природе: воздух, находящийся в мелких порах почвы, находится в состоянии «вакуума» даже при атмосферном давлении, поскольку размеры этих пор малы (могут быть меньше длины свободного пробега молекул воздуха при нормальных условиях). Поэтому в дневное время возникает эффузионный поток воздуха из нагретой почвы в прилегающий более холодный слой атмосферы, а в ночное время – поток в обратном направлении, что способствует газообменным процессам в почве, играющим значительную роль в жизни растений. Вблизи неравномерной поверхности в условиях вакуума возникает движение газа в направлении возрастания температуры – «тепловое скольжение», играющее важную роль в процессах теплопередачи от потока газа к движущемуся в нем твердому телу (эти вопросы рассматриваются в специальном разделе – аэродинамике газов, см. гл. 6). Специфические особенности состояния вакуума широко используются в технике.

Значение законов идеальных газов заключается в том, что «реальные» газы, с которыми приходится встречаться в природе и технике, с хорошей степенью точности подчиняются законам идеальных газов даже при сравнительно больших плотностях, т. е. высоких концентрациях молекул и малых средних расстояниях между ними. Существенные отступления от этих законов наблюдаются лишь при низких температурах и высоких давлениях (порядка десятков и сотен атмосфер). Как будет пояснено ниже, в п. 8-8, это объясняется «короткодействующим» характером межмолекулярных сил взаимодействия – их быстрым ослаблением на расстоянии. Действительно, положим для очень грубой оценки, что молекулярные силы перестают действовать на расстояниях порядка десяти молекулярных размеров, т.е. порядка 10^{-7} см. Тогда отклонения от законов идеальных газов должны наблюдаться при больших концентрациях молекул, т.е. при давлениях порядка 100 атм. (при 1 атм $n \approx 3 \cdot 10^{19}$ см⁻³).

Как мы увидим ниже, существенное отличие «реальных газов» от «идеальных» проявляется в условиях, когда начинается конденсация (сжижение) газа. В остальных случаях газ всегда можно в первом приближении считать «идеальным». Это относится к «рабочим телам» (газам), например, в тепловых двигателях; газам, входящим в состав

атмосферы, и т. д. (В дальнейшем встретимся с примерами теплотехнических расчетов на основе законов идеальных газов).

Помимо упоминавшегося выше применения газов для совершения работы в тепловых двигателях, газы широко применяются в технике и для многих других целей. В частности, работа может быть совершена предварительно сжатым газом при его расширении и без подвода тепла извне. Использование различных пневматических устройств, в которых используется энергия сжатого газа (в частности, воздуха), осуществляется в самых различных областях техники. Здесь, прежде всего, следует отметить пневматические двигатели, применяемые в качестве силовых приводов для различных инструментов (дрелей, отбойных молотков и др). В отдельных пневмодвигателях работу совершает сжатый воздух при расширении в цилиндрах с поршнями (как и в тепловых двигателях), а в турбинах – поток воздуха под большим давлением направляется на лопатки турбины и вращает ее. Пневмодвигатели первого типа, получили большее распространение благодаря простоте конструкции: они могут быть «встроены» в самые различные ручные инструменты с массой от 2 до 10 кг (при мощности до 1,75 кВт), причем давление воздуха в пневматических двигателях достигает 10 атм (1 МН/м^2).

Пневматические инструменты имеют ряд чрезвычайно важных практических достоинств; например, использование пневматических отбойных молотков в угольных шахтах ввиду отсутствия электрического искрообразования, характерного для электродвигателей, обеспечивает взрывобезопасность работ, а также продолжительную безотказную эксплуатацию инструмента в условиях повышенной влажности и запыленности. «Мощным» инструментом является, например, пневматический молот с массой падающей части до 1000 кг, в котором сжатый воздух из компрессора поступает в рабочий цилиндр и сообщает «бабе» молота возвратно-поступательное движение с помощью кривошипно-шатунного механизма. Значительное распространение в промышленности получил пневматический транспорт, служащий для перемещения сыпучих материалов и штучных грузов по трубопроводам энергией сжатого газа. Достоинствами установок пневматического транспорта являются их универсальность, герметичность системы и т. п. Давление в трубопроводах обычно достигает 8 атм. Системы пневматического транспорта применяются для перемещения материалов со складов в производственные помещения, разгрузки и загрузки бункеров, вагонов и судов, перемещения приборов, инструментов и полуфабрикатов на предприятиях и в учреждениях. Разновидностью пневматического транспорта является «пневматическая почта», служащая для перемещения документов, писем и другого на предприятиях связи, в банках, библиотеках и др. учреждениях. Длина трубопроводов в установках «внешней» пневматической почты достигает сотен км, а диаметр – до 1020 мм. Применение труб большого диаметра позволяет перемещать грузы с массой до 10 т со скоростью до 60 км/ч.

При возведении постоянных или временных строительных сооружений – например, складов, зрелищных и спортивных сооружений, передвижных пунктов медицинского и технического обслуживания, мостов, плотин и др. – используются пневматические строительные конструкции, представляющие собой оболочки из мягких, гибких материалов. Сжатый воздух подается или непосредственно в оболочки, или в несущие конструкции – опоры – для них. Оболочки таких конструкций изготавливаются из полимеров или волокнистых материалов (стекловолокна). Достоинствами пневматических конструкций являются быстрота монтажа, малая масса и небольшая стоимость.

При создании современных систем автоматического управления в настоящее время широко используется пневмоавтоматика – комплекс приборов и устройств, служащих для получения информации, ее преобразования и хранения (пневматические датчики, регуляторы, линейные системы, средства индикации и представления информации), а также пневматические исполнительные механизмы. Системы пневмоавтоматики используются во многих устройствах управления технологическими процессами, в особенности медленно протекающими, поскольку эти системы срабатывают сравнительно медленно. Основными преимуществами пневмоавтоматики (как и указанных выше пневматических инструментов) являются возможность длительной безотказной работы в условиях сильной загрязненности и запыленности промышленного воздуха, наличия сильных электрических и магнитных полей и взрывоопасности, особенно в химической, нефтяной, угольной промышленности. В настоящее время создана и успешно развивается отрасль пневмоавтоматики – пневмоника, в которой применяются устройства, принцип действия которых основан на аэродинамических эффектах, например, на взаимодействии воздушных струй, вихреобразований в потоке, турбулизации течения и т. д. Устройства из комплекса пневмоники широко используются, в частности, в производственных системах автоматического управления, выполняющих логические функции. Элементы пневмоники используются в устройствах для измерения различных механических и электрических величин, в регуляторах, устройствах для индикации и т. д. во многих отраслях промышленности.

Помимо функций «рабочего тела», служащего для совершения механической работы, газы исполняют в технике многие другие функции. Природные и искусственные горючие газы (водород, метан, коксовый газ и др.) используют в качестве топлива в черной металлургии, при производстве цемента, стекла, керамики и др. Применение в нагревательных и термических печах горючих газов (особенно природных) способствует повышению КПД, снижению затрат и улучшению качества продукции. Поэтому в общем топливном балансе в машиностроении горючие газы занимают около 40%. В топливном балансе электростанций природные горючие газы занимают около 20%: их применение повышает КПД котельных установок и снижает расходы.

Природные газы, в том числе и горючие, используются в технологических процессах в химической промышленности в качестве исходных агентов при производстве около 200 видов различных продуктов. Наибольшее распространение получили воздух и кислород, а также хлор, фтор и др. Ацетиленоводородная смесь используется при газовой сварке и позволяет достигнуть температур 3200°C . Большую роль играют газы, как средства повышения характеристик инструментальных и конструкционных сталей путем химико-термической обработки поверхности листового материала и готовых стальных деталей в процессах азотирования, хромирования, цементации и др.

Во многих случаях используются малоактивные газы (азот, криптон, ксенон и др.). В частности, в электроламповой промышленности эти газы применяются для наполнения ламп накаливания с целью повышения долговечности лампы за счет уменьшения скорости испарения нити накаливания. Газоразрядные лампы заполняются ксеноном, парами натрия и ртути, водородом и др. газами. Электрический разряд в газе используется не только в этих лампах, но также и во многих др. электронных приборах, служащих в качестве выпрямителей переменного тока, генераторов электрических колебаний и т. д. Вопросы рационального выбора газов – наполнителей для источников света будет подробно рассмотрен при изложении основ светотехники в т. 3 курса.

Широко применяются газы в технике также в качестве теплоносителей. В частности, продукты горения (дымовые газы) используют для обогрева изделий и материалов в нагревательных печах, а также для получения горячей воды, нагретого воздуха. В различных системах (теплообменниках), в системах отопления помещений и др. в качестве теплоносителя часто используется воздух. Легкие газы, например, водород, используются для наполнения дирижаблей и аэростатов.

Применение сжиженных газов будет рассмотрено особо.

8.2 Межмолекулярные взаимодействия. Реальные газы

О наличии сил взаимодействия между молекулами, проявляющихся при сравнительно небольших расстояниях между ними, уже упоминалось выше. Действием этих сил объясняется огромное число опытных фактов, в частности, перехода из одного агрегатного состояния в другое, как и само существование этих состояний.

Природа межмолекулярных взаимодействий – электрические силы, возникающие между электрическими системами – атомами, состоящими из положительно заряженного ядра и отрицательно заряженных электронных оболочек, окружающих ядро. При этом, в зависимости от характера расположения атомов в молекуле, она может иметь симметричное распределение положительных и отрицательных зарядов, так что постоянный дипольный момент (см. т. II) у молекулы отсутствует (в этом случае

молекула называется «неполярной»), или же несимметричное распределение зарядов (типичным примером является молекула воды), при котором дипольный момент молекулы отличен от нуля (такие молекулы называются «полярными»). Наиболее универсальным видом взаимодействия, присущим как неполярным, так и полярным молекулам, является «дисперсионное» (или «лондоновское», по фамилии предложившего этот вид сил ученого Ф. Лондона) межмолекулярное притяжение. Его сущность в полной мере раскрывается лишь в квантовой механике (см. т. III). Однако наглядно можно себе представлять дисперсионные силы как результат электрического взаимодействия между переменными во времени «мгновенными диполями», обязательно возникающими в результате движения электронов по орбитам в атомах и молекулах. Энергия дисперсионного взаимодействия зависит от расстояния между молекулами r по закону: $U_3 \sim \text{const}/r^6$. Если молекулы имеют дипольные моменты, то основным видом сил притяжения между ними на далеких расстояниях является «ориентационное» взаимодействие между электрическими диполями; энергия этого взаимодействия U_0 при высоких температурах и малой плотности молекул пропорциональна r^{-6} , как и U_3 , а при низких температурах $U_0 \sim r^{-3}$. Наряду с этим, между полярными молекулами существует также «индукционное» взаимодействие, которое обусловлено тем, что молекулы не являются абсолютно жесткими системами и в электрическом поле могут деформироваться и приобретать «индуцированные» дипольные моменты; индукционное взаимодействие возникает между постоянным диполем 1-й молекулы и индуцированным моментом 2-й молекулы, и его энергия действия на далеких расстояниях носит характер притяжения, причем энергия этого взаимодействия пропорциональна r^{-6} .

При сближении молекул силы притяжения возрастают лишь до некоторого «равновесного расстояния», а при дальнейшем сближении притяжение сменяется отталкиванием. Это объясняется взаимным

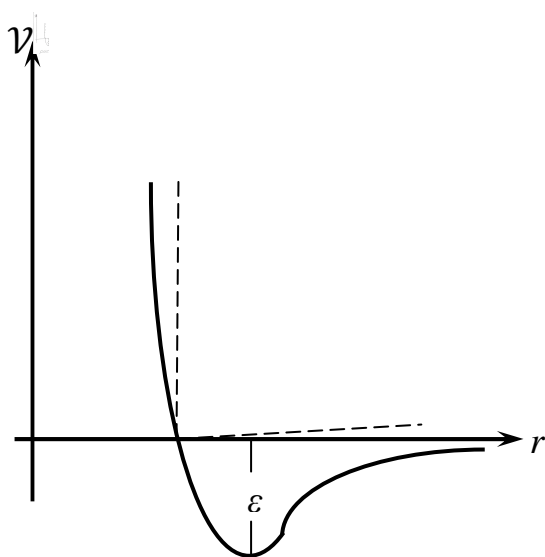


Рис. 8.1

«внедрением» внешних электронных оболочек молекул, в результате которого на передний план выступает электростатическое отталкивание между одноименно заряженными электронами. С уменьшением расстояния эти силы отталкивания возрастают очень быстро — примерно как r^{-12} . Таким образом, для полного потенциала взаимодействия между неполярными молекулами хорошим приближением является «потенциал Леннарда-Джонса»:

$$U(r) = 4\epsilon \left[\left(\frac{\sigma}{2} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{2} \right)^6 \right], \quad (8.9)$$

где ε и σ – параметры, смысл которых ясен из рис. 8.1 (сплошная линия). Поскольку $F = -\frac{dU}{dr}$, то согласно (8.9), на далеких расстояниях молекулы притягиваются с силой $F \sim r^{-7}$, а на близких – отталкиваются с силой $F \sim r^{-13}$. Величина σ есть наименьшее расстояние между неподвижными молекулами ($U(\sigma) = 0$); максимальная энергия притяжения между молекулами ε имеет место на расстоянии $r = \sigma\sqrt[6]{2}$ между ними. Упрощением этой картины является модель «твердых сфер» (пунктир на рис. 8.1): $U = \infty$ при $r < \sigma$ и $U = 0$ при $r > \sigma$; эта модель успешно используется особенно при качественном исследовании сложных молекулярных процессов ввиду ее простоты и наглядности. Применяются и др. виды потенциала $U(r)$. Для полярных молекул также предлагались различные выражения для потенциала взаимодействия, например, потенциал Штокмайера, в котором выражение (8.9) дополняется членом вида $U \sim r^{-3}$, учитывающим дипольное взаимодействие.

Путем изучения явлений переноса в реальных газах при пониженных температурах, свойств кристаллов при низких температурах и т.д. можно определить параметры потенциалов взаимодействия. Например, значения параметров ε/k (K) и $\sigma(\text{Å})$ потенциала (8.9), найденные по данным о вязкости газов: для Ne – 35,5K и 2,79 Å⁰, для N_2 – 91,5K и 3,68 Å⁰, для O_2 – 113K и 3,43 Å⁰, и т. д. соответственно. По этим данным можно делать качественные выводы о характерных размерах различных молекул, в температурах, при которых можно ожидать значительных отступлений от законов идеальных газов, и т. п. В частности, величина σ может быть выбрана в качестве меры «диаметра» молекул α , входящего в формулу (8.7) (см. выше).

Рассмотрим теперь проявления сил межмолекулярного взаимодействия в различных физических процессах. Как уже упоминалось, в результате наличия сил притяжения между молекулами возможен переход из газообразного состояния в жидкое, а затем в твердое состояние – «конденсация»; именно эта возможность отличает «реальный газ» от «идеального». Простейший опыт по конденсации газа можно представить себе следующим образом. В некоторый сосуд с газом вводится поршень, сжимающий газ при неизменной температуре (изотермический процесс). При сравнительно небольших давлениях действует закон Бойля-Мариотта $PV = \text{const}$ для идеального газа. Однако при малых объемах наблюдаются отступления от этого закона: давление начинает возрастать медленнее, чем следует по закону $P \sim 1/V$, а затем вообще перестает возрастать. Если сосуд с газом сделан прозрачным, то при давлении, называемом давлением насыщенного пара (P_0), будет наблюдаться появление жидкости на дне сосуда. При дальнейшем вдвигании поршня высота слоя жидкости возрастает, а давление остается неизменным. После того, как рабочая поверхность поршня соприкоснется с уровнем жидкости, давление вновь начнет возрастать, но значительно круче, чем в начале процесса. Таким образом, реальная изотерма будет, вообще говоря, существенно отличаться

от «идеальной» ($PV=const$). Однако такой опыт удается не всегда. Если его проделать, например, с азотом при комнатной температуре, то жидкость в сосуде не образуется, а реальная изотерма будет мало отличаться от «идеальной» даже при очень высоких давлениях. Таким образом, вид изотермы реального газа существенно зависит от температуры и рода газа. Типичное семейство этих изотерм (диаграмма Эндрюса) показано на рис. 8.2. Двум описанным выше опытам соответствуют изотермы 1 и 2 – с «горизонтальным участком» $P=P_0$ и без него. Если опытным путем определить полное семейство изотерм для данного газа, то при некоторой «критической» температуре T_k изотерма носит «переходный» характер – горизонтальный участок «вырождается» в точку перегиба К, соответствующую «критическому» состоянию вещества при определенном «критическом давлении» P_k и «критическом объеме» V_k (разумеется, при этом должна быть задана масса вещества m ; обычно под V_k подразумевается «удельный объем», приведенный к единице массы вещества). В критическом состоянии исчезает различие между жидкостью и ее паром (например, видимая граница жидкости). Смысл «диаграммы Эндрюса» заключается в том, что при температуре выше критической (область косой штриховки на рис. 8.2) газ никаким сжатием нельзя сконденсировать; именно это имеет место для атмосферных газов при комнатной температуре. Критические

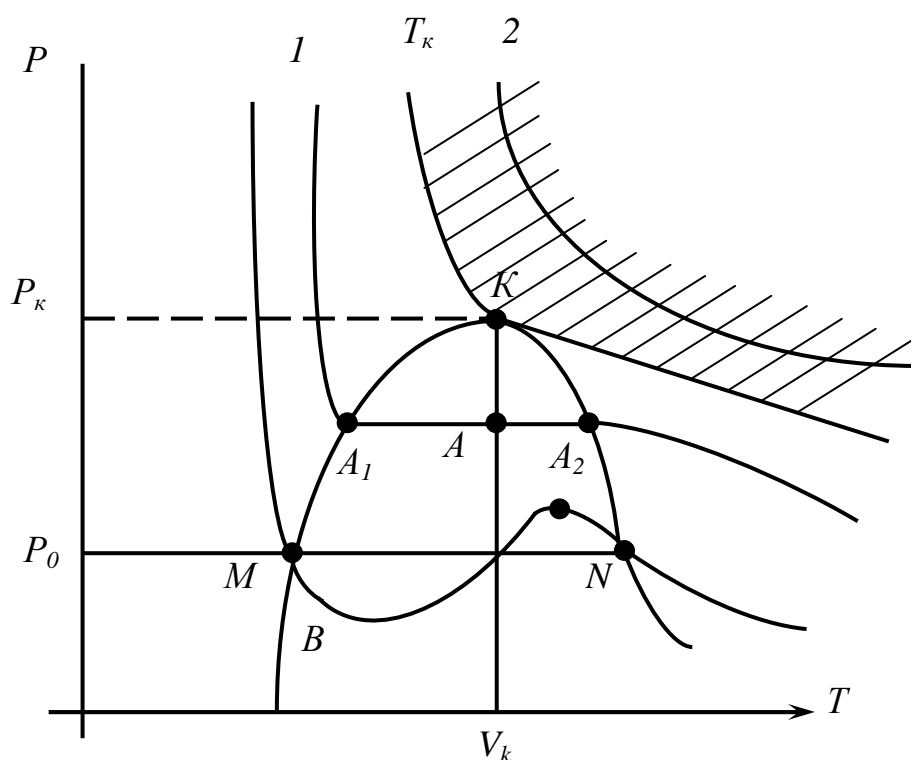


Рис. 8.2

температуры для них очень низки: O_2 – 91 К, N_2 – 77 К, H_2 – 20 К, что и обуславливает трудность их снижения (см. ниже, п. 8. 4).

Область горизонтальной штриховки на рис. 8.2, в которой давление очень резко возрастает при сжатии, очевидно, соответствует жидкому состоянию вещества. Ввиду большой плотности жидкости, т. е.

малости расстояний между молекулами, попытки сжать жидкость вызывает противодействие из-за смены сил межмолекулярного притяжения силами

отталкивания, как было описано выше. Поэтому для сжатия жидкости даже на доли процента требуются огромное давление – тысячи атмосфер, и говорят о «практической несжимаемости» жидкости. Итак, в указанной области вещество может находиться только в жидком состоянии.

В остальной части диаграммы возможно как «однофазное», так и «двухфазное» состояние вещества. Справа от спадающей ветви жирно выделенной «колоколообразной» линии вещество находится в газообразном состоянии, однако при соответствующем сжатии может начать конденсироваться. Внутри указанной линии при некотором давлении P_0 находятся в равновесии два состояния («фазы») вещества – жидкость и ее «насыщенный» пар под соответствующим давлением. При этом положение точки А в этой области указывает соотношение в данном состоянии согласно «правилу рычага».

Теоретическое описание характера изотерм реального газа может быть получено на основе уравнения состояния, учитывающего межмолекулярные взаимодействия на далеких и близких расстояниях. Один из способов учета этих взаимодействий был предложен Ван-дер-Вальсом (1873 г.). Из-за наличия сил отталкивания для движения молекул доступен объем, меньший геометрического объема сосуда с газом на некоторую величину b , так что в уравнении состояния следует заменить величину V на $V-b$. Простой расчет показывает, что если принимать молекулам определенный диаметр d , то величина b равна учетверенному объему всех молекул газа в сосуде: $b=4NI/6\pi d^3$. Далее, в результате наличия сил межмолекулярного притяжения пристеночный слой молекул газа оказывает некоторое добавочное (к внешнему) давление на газ, которое в первом приближении пропорционально квадрату плотности или обратно пропорционально объему газа. Поэтому величину P в уравнении состояния следует заменить на $p+a/V^2$. Величины b и a называются «поправками Ван-дер-Вальса»; по смыслу их введения должно быть $b \ll V$ и $a/V^2 \ll P$. При допущении о возможности независимого учета указанных сил взаимодействия уравнение состояния газа (для 1 моля) $PV=RT$ переходит в уравнение Ван-дер-Вальса:

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT. \quad (8.10)$$

Для произвольного числа молей газа $\nu = \frac{M}{\mu}$ это уравнение принимает вид:

$$\left(P + \frac{a\nu^2}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT. \quad (8.11)$$

Уравнение (8.10) при $T=const$ описывает «изотермы Ван-дер-Вальса». Если переписать в виде кубического (по V) уравнения

$$PV^3 - (RT + Pb)V^2 + aV - ab = 0, \quad (8.12)$$

то видно, что в зависимости от T уравнение может иметь 1 и 3 действительных корня. При высоких $T(>T_k)$ уравнение имеет один корень, и теоретическая изотерма качественно имеет вид кривой 2 на рис. 8.2. При $T < T_k$ изотерма имеет вид кривой 1, где горизонтальный участок MN изменен

на линию, показанную пунктиром. Возникает естественный вопрос о физическом смысле этого «волнообразного» участка изотермы Ван-дер-Вальса. Теоретический анализ показывает, что участки NC и MB соответствуют неустойчивым – «метастабильным» – состояниям вещества, которые можно реализовать при специальной постановке эксперимента. Участок NC соответствует «перенасыщенному пару», давление которого больше давления насыщенного пара при данной температуре. Попадание в него даже небольшой капельки жидкости или других «центров конденсации» (например, заряженных частиц) вызывает быстрый переход перенасыщенного пара в насыщенный. Поэтому такое состояние удастся создать лишь на короткое время. Например, перенасыщенный водяной пар можно получить путем быстрого (адиабатического) расширения влажного воздуха; при попадании в него центров конденсации, например, ионов, на их пути образуется «туман», состоящий из мельчайших капелек жидкости, а пар становится насыщенным. На этом принципе основано действие камеры Вильсона – одного из важнейших экспериментальных средств ядерной физики (см. т. II). Участок MB на рис. 8.2 соответствует «перегретой жидкости», которая не занимает при отсутствии в ней «зародышей кипения» – пузырьков воздуха, или при наличии слишком мелких пузырьков. Однако случайное появление в «перегретой жидкости» достаточно крупных пузырьков приводит к ее быстрому закипанию и повышению давления пара до величины, соответствующей давлению насыщенного пара. На этом принципе созданы «пузырьковые камеры», также использующиеся для визуализации следов ионизирующих частиц в ядерных исследованиях (см. т. III). Что касается состояний, соответствующих «восходящему» участку изотермы Ван-дер-Вальса ВС, то они являются неустойчивыми и в эксперименте не реализуется.

С помощью уравнения Ван-дер-Вальса выразить «критические» параметры вещества (P_k, V_k, T_k) через величины «поправок» a и b . Действительно, в критическом состоянии все три корня уравнения (8.12) совпадают и равны V_k , поэтому уравнение должно приводиться в виде:

$$P_k(V - V_k)^3 = 0. \quad (8.13)$$

Возводя в куб и сравнивая коэффициенты при V^3 , V^2 и т. д. в (8.13) и (8.12), можно найти выражения:

$$V_k = 3b, \quad P_k = \frac{a}{27b^2}, \quad T_k = \frac{8a}{27bR}. \quad (8.14)$$

Величина $K_k = \frac{RT_k}{P_k V_k} = 8/3 \approx 2,67$ называется «критическим коэффициентом» (для реальных газов измеренные величины K_k могут заметно отличаться от 2,67).

Если вместо величин P, V и T ввести относительные безразмерные параметры – «приведенные» величины

$$\varphi = \frac{V}{V_k}, \quad \pi = \frac{P}{P_k}, \quad \tau = \frac{T}{T_k}, \quad (8.15)$$

то уравнение Ван-дер-Вальса принимает вид:

$$\left(\pi + \frac{3}{\varphi^2}\right)\left(\varphi - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}\tau. \quad (8.16)$$

Согласно (8.14), имеем:

$$V = 36\varphi, \quad P = \frac{a\pi}{27b^2}, \quad T = \frac{8a}{27bR}\tau. \quad (8.17)$$

Состояния газа, характеризуемые одними и теми же величинами (π , φ , τ), для разных веществ, называются «соответственными». Согласно уравнению (8.16), в которое не входят никакие индивидуальные константы веществ, при совпадении двух величин (например π и φ) для двух разных газов должны совпадать и значения третьей величины (τ). Это положение называется «законом соответственных состояний».

8.3 Газовые смеси

В естественных условиях газы в чистом (однородном) виде не существуют. При необходимости те или иные газовые смеси создаются искусственно. Типичной газовой смесью в природе является воздух, который является не только средой обитания, но и рабочим телом многих машин, механизмов, аппаратов и приборов. Поэтому целесообразно указать некоторые его свойства.

Основными компонентами воздуха являются азот (78,09%) и кислород (20,95%). Другие газы, содержащиеся в воздухе в небольших количествах, можно рассматривать как примеси: концентрация инертных газов $\approx 1\%$; углекислого газа – 0,03%; остальных газов в совокупности примерно $\approx 1\%$. В воздухе содержатся и молекулы воды, концентрация которых претерпевает большие колебания и зависит от местности и времени года, высоты над уровнем моря и конкретных метеорологических условий.

Плотность и температура (и в определенной мере состав) воздуха изменяются с изменением высоты над уровнем моря. Изменение плотности описывается барометрической формулой Больцмана $\rho = \rho_0 \exp(-mgh/KT)$, где ρ_0 соответствует плотности непосредственно над поверхностью Земли (т. е. при $h = 0$). Функция изменения температуры с высотой h имеет экстремум вблизи $h \approx 10 - 15$ км. То есть, с увеличением высоты температура сначала понижается и затем начинает вырастать, достигая примерно 100°C на высотах 100-200 км (в зависимости от солнечной активности). Разумеется, возможные изменения параметров воздуха должны учитываться при конкретных инженерных расчетах, связанных с использованием воздуха, как рабочего тела.

Кроме воздуха имеется множество газовых смесей, изучение которых представляет теоретический и практический интерес. Поэтому рассмотрим некоторые общие их свойства.

Газовые смеси характеризуются особенностями входящих в них компонент, а также количественными их соотношениями, которые определяются значениями долей (в процентном или дробном выражении) каждой из компонент.

Различают массовые доли, объемные доли и молярные доли.

Массовые доли определяются как отношение масс отдельных компонент m_i смеси к общей массе газовой смеси $m_{см}$ в виде $\mu_1 = m_1/m_{см}, \mu_2 = m_2/m_{см}, \dots \mu_i = m_i/m_{см}$, при этом сумма долей масс $\sum_{i=1}^n m_i = 1$.

Объемные доли – отношением приведенных (по температуре и давлению) парциальных объемов отдельных компонент $V_1, V_2, \dots V_i$ к полному объему смеси $V_{см}$ при одинаковой температуре и одинаковом давлении, что и для компонент, т. е. $\gamma_1 = \frac{V_1}{V_{см}}, \gamma_2 = \frac{V_2}{V_{см}}, \dots \gamma_i = \frac{V_i}{V_{см}}$.

Плотность газовой смеси $\rho_{см} = \gamma_1 \rho_1 + \gamma_2 \rho_2 + \dots + \gamma_n \rho_n$, где $\rho_1, \rho_2, \dots \rho_n$ – плотности отдельных компонент смеси.

Молярные доли определяются отношением числа киломолей отдельных компонент к общему числу киломолей смеси.

Массовая доля i -ой компоненты смеси определяется:

$$\mu_i = \gamma_i \rho_i / \sum_{i=1}^n \gamma_i \rho_i. \quad (8.18)$$

Объемная доля i -ой компоненты смеси

$$\gamma_i = \frac{\mu_i}{\rho_i \sum_{i=1}^n \mu_i / \rho_i}. \quad (8.19)$$

Уравнение состояния реальных газов (уравнение Ван-дер-Ваальса) применимо и для газовых смесей с возможными уточнениями входящих в него коэффициентов a и b (см. таблицу). Обычное уравнение Ван-дер-Ваальса имеет вид:

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT, \quad (8.20)$$

а уточненное – имеет вид:

$$P = \frac{NkT}{V} \left(1 + \frac{NB(T)}{V} + \frac{N^2C(T)}{V^2} + \dots\right), \quad (8.21)$$

где $B(T), C(T)$ – вириальные коэффициенты.

Значения констант a и b для некоторых газов

Газ	a (м ⁴ /кг)	$b \cdot 10^{-3}$ (м ³ /кг)
Аргон	5,28	0,63
Кислород	9,24	0,81
Азот	10,7	1,07
Аммиак	62,3	1,42
Водяной пар	71,8	1,09

Используется также уравнение Дитеричи в виде

$$P(V - b) = RT \exp\left(-\frac{a}{RTV}\right). \quad (8.22)$$

Парциальное давление каждой компоненты газовой смеси равно давлению, которое было бы, если бы эта компонента занимала бы весь объем, занимаемой смесью при данной температуре, т.е. давление газовой смеси равно сумме парциальных давлений компонент газовой смеси (закон

Дальтона). Этот закон, строго говоря, справедлив для идеального газа. Для реальных газов он остается практически справедливым при умеренных давлениях и температурах (далеких от критических).

После этих общих сведений о свойствах газовых смесей рассмотрим особенности газокинетических процессов в них.

При анализе газокинетических процессов в газовых смесях необходимо, прежде всего, исключить (или предусмотреть) влияние на них возможных химических реакций, изменений внутренней энергии при взаимодействиях молекул разных компонент (например, таких как диссоциация и рекомбинация, возбуждение и излучение и т. п.), которых не было бы в однородных газах.

Далее при рассмотрении процессов столкновений молекул в газовых смесях следует учесть различие в размерах молекул, принадлежащих разным составляющим смеси, поскольку это влияет на сечение их столкновений, а значит и на важные параметры столкновений (частоту столкновений, длину свободного пробега и т. п.). Заметим, что для однородного газа оно определяется простейшей формулой – $\sigma = \pi d^2$, где d – диаметр молекул газа; для двухкомпонентной смеси – формулой $\sigma = \frac{\pi}{4}(d_1 + d_2)^2$, где d_1 и d_2 – соответственно диаметры молекул одного (d_1) и другого (d_2) газа в смеси.

При определении сечения столкновений молекул сложной, многокомпонентной смеси газов следует определить сечение столкновений, как некоторое усредненное значение, учитывающее эффективно различие в диаметрах молекул всех компонент газовой смеси.

Ниже приводится пример анализа газокинетических процессов в газовых смесях, учитывающий отмеченные их особенности.

Пусть рассматриваемая газовая смесь состоит из S сортов, молекулы которых представляют собой гладкие и абсолютно упругие тела сферической формы. Каждый сорт обозначен индексом p или q , которые могут принимать значения от 1 до S . Эффективные диаметры молекул сортов p и q соответственно обозначены d_p и d_q . Среднюю относительную скорость обозначим \bar{V} . Полное сечение столкновений молекул сорта p и сорта q равно:

$$\sigma_{pq} = \frac{\pi}{4}(d_p + d_q)^2 = \pi d_{pq}, \quad d_{pq} = 1/2(d_p + d_q). \quad (8.23)$$

Для упрощения рассмотрения молекула сорта p принимается как пробная, а молекулы сорта q как полевые (или наоборот, что не влияет на результаты)

Средняя частота столкновений молекулы сорта p с молекулами сорта q определится зависимостью:

$$v_{pq} = n_q \overline{\sigma_{pq} V_{pq}}, \quad (8.24)$$

где V_{pq} – относительная скорость сталкивающихся молекул; $\bar{\sigma}_{pq}$ – среднее значение сечений столкновений, когда диаметры молекул сортов p и q сильно отличаются. В противном случае, вместо $\bar{\sigma}_{pq}$ можно применить $\sigma = \pi d^2$,

где d – диаметр молекулы.

Тогда частота столкновений пробной молекулы p с полевыми молекулами q будет определяться формулой

$$v_{pq} = \pi d_{pq}^2 n_q \bar{v}_{pq}, \quad (8.25)$$

где n_q – число молекул сорта q .

Суммируя по всем типам сталкивающихся молекул, получаем для средней частоты столкновений молекул сорта p

$$v_p = \sum_{q=1}^S (n_q \overline{\sigma_{pq} v_{pq}}). \quad (8.26)$$

Усредняя по всем сортам пробных молекул, получаем среднюю частоту столкновений в виде:

$$v = \sum_{p=1}^S \left(\frac{n_p}{n} v_p \right), \quad (8.27)$$

где n – общая числовая плотность всех сортов.

Зная среднюю тепловую скорость \bar{v}_p молекул сорта p , частоту ее столкновений, находим ее среднюю длину свободного пробега в виде:

$$\bar{\lambda}_p = \left[\sum_{q=1}^S \left(n_q \overline{\sigma_{pq} v_{pq}} / \bar{v}_p \right) \right]^{-1}. \quad (8.28)$$

Или, исключив скорости, средняя длина свободного пробега для газовой смеси:

$$\bar{\lambda} = \sum_{p=1}^S \left(\frac{n_p}{n} \left\{ \sum_{q=1}^S \left[\pi d_{pq}^2 n_q \left(1 + \frac{m_p}{m_q} \right)^{1/2} \right] \right\} \right)^{-1}. \quad (8.29)$$

Значение длины свободного пробега оказывает большое влияние на все важные свойства газов, связанные с явлениями переноса, как это видно, например, из формул (8.8), определяющих коэффициенты диффузии, вязкости и теплопроводности, хотя эти формулы строго справедливы для идеальных газов. Для газовых смесей эти формулы требуют уточнений.

В специальной литературе имеются формулы, относящиеся к различным типам газовых смесей: одноатомные с одноатомными, одноатомные с многоатомными, многоатомные с многоатомными, полярные с неполярными и т. п. Они, как правило, содержат эмпирические коэффициенты, поправочные числа, отражающие особенности компонентов, громоздки. Так, например, для смесей неполярных газов предложено соотношение (формула Брокау) в виде:

$$\bar{\lambda}_{\text{см}} = \frac{1}{2} (\lambda' + \lambda''); \quad \lambda' = x_1 \chi_1 + x_2 \chi_2 + \dots; \quad 1/\lambda'' = \left(x_1/\lambda_1 + x_2/\lambda_2 + \dots \right), \quad (8.30)$$

где x_1, x_2, \dots – представляют собой множители перед значениями коэффициентов теплопроводности компонент газовой смеси, равные их молярным долям.

Уточненный (с поправкой Эйкена) коэффициент теплопроводности для

многоатомного газа имеет вид:

$$\lambda = \mu \left(2,5 \frac{3R}{M} + \left(C_V - \frac{3R}{M} \right) \right),$$

где M – молекулярный вес, μ – коэффициент вязкости.

Для частного случая газовой смеси из двух компонент 1 и 2 общие средние длины свободного пробега молекул определяются:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_1 &= \left(\sqrt{2} n_1 \sigma_{11} + n_2 \sigma_{12} \sqrt{1 + m_1/m_2} \right)^{-1} \\ \bar{\lambda}_2 &= \left(\sqrt{2} n_2 \sigma_{22} + n_1 \sigma_{21} \sqrt{1 + m_2/m_1} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (8.31)$$

Средняя длина свободного пробега молекул газа 1 с молекулами газа 2 выражается формулой:

$$\bar{\lambda}_{12} = \left(\sigma_{12} n_2 \sqrt{1 + m_1/m_2} \right)^{-1}. \quad (8.32)$$

Если молекулы газа 1 и молекулы газа 2 движутся со средними скоростями \mathcal{V}_1 и \mathcal{V}_2 , то среднее число соударений молекул газа 1 с молекулами газа 2 будет определяться формулой:

$$\nu_{12} = \left(\sigma_{12} n_2 \sqrt{\mathcal{V}_1^2 + \mathcal{V}_2^2} \right)^{-1}. \quad (8.33)$$

Общее число столкновений молекул газа 1 с молекулами газа 1 (т.е. между собой) и с молекулами газа 2 будет определяться формулой:

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \sqrt{2} n_1 \sigma_{11} \mathcal{V}_1 + n_2 \sigma_{12} \sqrt{\mathcal{V}_1^2 + \mathcal{V}_2^2} \\ \nu_2 &= \sqrt{2} n_2 \sigma_{22} \mathcal{V}_2 + n_1 \sigma_{21} \sqrt{\mathcal{V}_1^2 + \mathcal{V}_2^2}. \end{aligned} \quad (8.34)$$

8.4 Взаимодействие молекул газа с поверхностью «твердых» тел

Выше были рассмотрены процессы, протекающие непосредственно в самой газовой среде. Между тем, вещества в газовом состоянии (однородные или в смесях) в статическом или динамическом состоянии всегда контактируют с поверхностью твердых или жидких тел. Это происходит и в природных условиях без вмешательства человека и в различных применениях газов в деятельности человека. Процессы, происходящие на границах соприкосновения (контакта) веществ в разных агрегатных состояниях весьма многообразны, сложны и значимы для теории и практики. Они изучаются в разных разделах физической науки, а в будущем возможно и формирование самостоятельного ее раздела (как «физика граничных явлений» или «физика контактных явлений»). Об этом говорят одни только перечисленные возможные комбинации соприкасающихся веществ в различных их агрегатных состояниях – твердом (Т), жидком (Ж),

газообразном (Г) и плазменном (П) (Т-Т; Т-Ж; Т-Г; Т-П; Ж-Ж; Ж-Г; Ж-П; Г-Г; Г-П; П-П). Из этого перечня очень кратко рассмотрим лишь одно из этих состояний (Т-Г). При этом из рассмотрения будет опущен большой круг явлений, связанных с химическими взаимодействиями газов с поверхностью твердого тела.

При взаимодействии молекул газа с поверхностью твердого тела возможны два случая – отражение молекул и поглощение молекул. В первом случае имеет место два вида отражения – зеркальное отражение и диффузное отражение. В случае поглощения также наблюдается две возможности – прилипание молекул к поверхности и проникновение молекул вглубь поверхности. Рассмотрим их в отдельности.

При зеркальном отражении (в строгом определении) происходит абсолютно упругое взаимодействие молекул с поверхностью твердого тела. Если по отношению к поверхности падения разложить скорость молекулы на нормальную и касательную, то при зеркальном отражении нормальная составляющая будет менять свой знак на противоположный, а касательная составляющая будет оставаться неизменной. Такая схема является идеализированной, а в реальных условиях, даже при взаимодействии с очень гладкими поверхностями касательная составляющая скорости молекул претерпевает изменения в большей или меньшей степени, чем, собственно, объясняется всегда наблюдаемое на практике возникновение так называемого пограничного слоя при относительном движении газа.

Диффузное отражение происходит в результате того, что падающие на поверхность молекулы испытывают отражение от «микронеровностей», характеризующихся не только макроскопическими представлениями о «гладкости» поверхности, но и структурой поверхности на уровне атомарного ее строения, т.е. когда «неровности» поверхности имеют размеры порядка межатомных расстояний (порядка 10^{-9} - 10^{-10} м). При диффузном отражении молекул их скорости после отражения, в общем, не зависят от их скоростей падения на поверхность. Обычно считается, что распределение нормальных составляющих скоростей всего ансамбля отраженных от поверхности молекул, подчиняется закону Максвелловского распределения скоростей для равновесного газа. Однако, температура газа, состоящего из отраженного ансамбля молекул, может не совпадать (что чаще всего имеет место) с температурой поверхности твердого тела.

Одной из важных характеристик процесса взаимодействия молекул газа с поверхностью твердого тела (и жидкостей) является так называемый коэффициент аккомодации α , который определяется зависимостью вида:

$$\alpha = \frac{T_2' - T_1}{T_2 - T_1} \leq 1, \quad (8.35)$$

где T_1 – температура ансамбля молекул, падающих на поверхность, T_2 – температура поверхности тела, T_2' – температура ансамбля молекул, отраженных от поверхности.

Определение коэффициента аккомодации α по (8.35) справедливо в том случае, если молекулы газа, отраженного от поверхности, подчиняются распределению Больцмана, которое, в общем, применимо для газов с относительно небольшой плотностью (например, для идеальных газов), в которых происходят только парные столкновения молекул.

Коэффициент аккомодации α в несколько другой, более общей, но фактически эквивалентной (8.35) форме можно представить в виде:

$$\alpha = \frac{q_i - q_r}{q_i - q_w}, \quad (8.36)$$

где q_i и q_r – соответственно потоки энергии падающих и отраженных молекул, q_w – поток энергии, который был бы унесен молекулами при диффузном отражении молекул, составляющих газ с температурой $T_r = T_w$, где T_w – температура поверхности твердого тела.

Коэффициент аккомодации теоретически может изменяться от нуля до единицы: $\alpha=0$ при отсутствии поглощения энергии падающих молекул газа поверхностью и $\alpha=1$ при полном поглощении энергии падающих молекул (и равновесном их отражении, приняв температуру, равную температуре поверхности).

На значение коэффициента аккомодации влияет исходное соотношение температуры газа и температуры поверхности твердого тела.

Аккомодация энергии молекул, падающих на поверхность, уменьшается с увеличением отношения энергии поступательного движения молекул к тепловой энергии поверхности тела. Практически определение коэффициента аккомодации проще осуществить согласно (8.35) по температурным измерениям. Однако, учитывая отсутствие строгости в установлении соответствия состояния газа из отраженных молекул распределению Больцмана, предложено определять коэффициент аккомодации как величину, характеризующую процесс передачи энергии и импульса молекул газа поверхности твердого тела.

В этом случае переданная от газа к телу энергия Q и сила F , действующая на поверхность, выражаются соответственно в виде:

$$Q = \gamma(T_2 - T_1), \quad F = \beta(T_2 - T_1). \quad (8.37)$$

Тогда коэффициент аккомодации определяется как отношения $\alpha' = \gamma/\gamma_0$ и $\alpha'' = \beta/\beta_0$, где γ_0 и β_0 – соответствующие коэффициенты при условии, что молекулы газа покидают поверхность, придя с ней в температурное равновесие. Такова общая картина интегрального взаимодействия газа с поверхностью твердого тела.

Рассмотрим теперь процессы индивидуального взаимодействия молекул газа с атомами поверхности твердого тела. Здесь, как и рассмотренные выше виды соударений молекул газа между собой, возможны упругие и неупругие соударения молекул с атомами поверхности твердого тела. При этом молекулы могут или отражаться, или проникать вглубь поверхности или «прилипнуть» к ней. Осуществление того или другого вида

взаимодействия молекулы зависит от его энергии и импульса движения, с одной стороны, и с другой – от свойств и структуры поверхности твердого тела.

Не останавливаясь на конкретных, довольно сложных расчетах, приведем общую методологию анализа этих явлений. При соударении молекулы с тем или другим атомом твердого тела атом может прийти в колебательное или лимитационное движение относительно положения равновесия. Если амплитуда больше постоянной решетки, атом, в принципе, может покинуть поверхность. Однако для этого необходимо, чтобы энергия, полученная атомом при ударе молекулы газа, была не менее его связи на поверхности твердого тела (для кристаллических тел, например, металлов, эта энергия порядка нескольких электро-вольт; для золота энергия связи атома в решетке $H \approx 3-5$ эВ). Средняя поступательная энергия молекул газа, как было показано выше, при нормальных условиях (т. е. температура $\approx 0 \div 10^2$ °С, давление $\approx 10^5$ Па) значительно меньше этой пороговой энергии (в чем легко убедиться, приняв во внимание соотношение $1 \text{ эВ} \approx 10^4 \text{ К}$)

В то же время следует иметь в виду, что в высокоэнергетическом «хвосте» максвелловского распределения, в общем, могут быть молекулы со скоростями, много превышающими средние скорости молекул газа.

Число молекул, обладающих энергией, близкой пороговой энергии, можно определить для конкретных условий по формуле Максвелла-Больцмана:

$$N_i = N e^{\frac{E_i}{kT}} / \sum_i e^{\frac{E_i}{kT}}, \quad (8.38)$$

где N – полное число молекул газа, сумма \sum_i берется по возможным значениям полной энергии.

Число таких высокоэнергетичных молекул в газе оказывается незначительным. Но можно допустить (в принципе) возможность такой ситуации, когда одному и тому же атому на поверхности твердого тела передается энергия от нескольких молекул газа, причем сталкиваясь с атомом последовательно. Количественная оценка реализации такой ситуации при известных параметрах газа может быть осуществлена по приведенным выше соотношениям, приняв за сечение столкновений на поверхности твердого тела при известном его атомно-молекулярном строении (например, для металлов примерно размер кристаллической решетки). Возможность реализации такой ситуации оказывается тоже незначительной. Далее, при самых «благоприятных» условиях по числу высокоэнергетического обмена энергиями между молекулами газа с атомами поверхности твердого тела, для осуществления возможности накопительного «суммирования» энергий, получаемых атомом при последовательных столкновениях с молекулами газа, необходимо, чтобы время между каждыми последовательными столкновениями было меньше времени релаксации (т. е. времени,

необходимого для восстановления равновесного состояния возбужденного атома).

Перейдем к рассмотрению процессов взаимодействия молекул газа с поверхностью твердого тела, когда молекулы газа не покидают эту поверхность. Здесь возможны несколько различных ситуаций. Среди них имеется обширный круг явлений, связанных с химическими взаимодействиями молекул газа с веществом твердого тела. Эти явления в виду их специфики, требующей привлечения фундаментальных знаний по химии, мы опускаем из рассмотрения, как и процессы, протекающие при движении газа по поверхности твердого тела. Далее, атомы и молекулы газа, взаимодействуя с поверхностью тела, не только могут на ней остаться, но могут также проникать вглубь поверхности путем диффузии, по выходящим на поверхность дефектам кристаллической решетки, по границам блоков, по дислокациям и т.п.

Одним из важных для практики проявлений сил межмолекулярного взаимодействия является адгезия – возникновение сил сцепления на границе контакта между твердыми (или жидкими) телами (т. е. «прилипания»). Частным случаем адгезии является когезия, т. е. слипание тел одинаковой химической природы. Предельным случаем адгезии по существу является рассматриваемое ниже явление адсорбции – присоединение молекул вещества из газовой фазы или раствора к твердой поверхности (или поверхности жидкости). Во всех этих случаях действуют силы одного из указанных выше типов – силы Ван-дер-Вальса, ионные, металлические или водородные связи.

Для заметного проявления адгезионных явлений необходимо сблизить поверхности тел на расстояние порядка радиуса действия указанных сил. Обычно этому препятствия всегда имеются на поверхности неровности (шероховатости), глубина которых может быть на несколько порядков больше радиуса сил взаимодействия. Поэтому адгезия проявляется в полной мере при сильном сжатии твердых тел, при котором обеспечиваются указанные условия контакта, или же при нанесении смачивающей жидкости на твердую поверхность. Например, при холодной сварке металлов усилие сжатия обеспечивает их значительную пластическую деформацию, при которой неровности практически устраняются, и возникает прочный адгезионный шов. Второй из указанных случаев возникает при склеивании различных тел, с помощью клеящих жидкостей, с последующим их затвердеванием. При этом смачивание жидкостью обеспечивается, если работа адгезии (зависящая от сил сцепления между молекулами твердого тела и жидкости) превышает работу когезий (зависящую от сил сцепления между молекулами жидкости). При этом жидкость растекается по всей поверхности твердого тела, и в результате образуется прочный клеевой шов. Аналогичные явления происходят при лужении и пайке металлов; при этом поверхность металла приходится подвергать специальной химической обработке (травлению) с целью улучшить его смачиваемость припоем, в

противном случае качество пайки будет низким. Такие же проблемы возникают при нанесении лакокрасочных и иных покрытий на твердую поверхность.

Хороший адгезионный контакт может быть обеспечен также путем выращивания кристаллов одной из фаз покрытия на поверхности другой твердой фазы различными способами. Таким путем осуществляется получение, в частности, тонких защитных пленок на поверхностях металлов во избежание их истирания, коррозии и т. д., а также образование гальванических (катодных) покрытий на металлах – метод электрокристаллизации. Учет явлений адгезии необходим во многих областях техники, например, процессы обработки пищевых продуктов, осуществляются при обязательном учете адгезионных свойств продуктов, в противном случае неизбежны большие потери продуктов при их тепловой и механической обработке.

К числу весьма многообразных проявлений сил межмолекулярного взаимодействия относится адсорбция – осаждение веществ из газовой фазы (или раствора) на поверхности твердого тела (или жидкости). Тело, на поверхности которого имеет место адсорбция некоторого вещества, называется адсорбентом, а это вещество – адсорбатом. Адсорбция вызывается силами притяжения между молекулами адсорбентом и адсорбата; эти силы могут иметь, в частности, дисперсионную природу (силы Ван-дер-Вальса), если молекулы адсорбента неполярны, или же электростатическую природу в случае полярного адсорбента.

Силы Ван-дер-Вальса обусловлены взаимодействием «мгновенных диполей», возникающих вследствие движения электронов по атомным орбитам, и их взаимной поляризации. Такие силы обычно малы и быстро убывают с расстоянием. Электростатические силы обусловлены воздействием электростатического поля, создаваемого полярными молекулами адсорбента у его поверхности, на молекулы адсорбата, которые в результате превращаются в «постоянные диполи». В случаях, когда на поверхности располагаются ионы одного знака или аналогичным образом ориентированные диполи, адсорбционные силы являются особенно прочными. Это имеет место, в частности, в важном для практики случае адсорбции на гидроокисях, т. е. соединениях окислов с водой. Ярко выраженная полярная природа молекул воды проявляется при этом в большой прочности адсорбционной связи, обусловленной, в частности, водородными «мостиками» между группами ОН на поверхности и молекулами адсорбированного вещества.

В указанных случаях молекулы адсорбата обычно сохраняют свою химическую природу и определенную подвижность и могут быть удалены (десорбированы) с поверхности адсорбента, например, посредством нагревания (или понижения давления паров адсорбата над поверхностью адсорбента при адсорбции из газовой фазы). То есть процесс адсорбции является обратимым. В этих случаях говорят о физической адсорбции. Если

же адсорбат образует в результате адсорбции химическое соединение с адсорбентом на его поверхности, то адсорбция обычно является необратимой и называется химической адсорбцией (хемосорбцией). Частным случаем физической адсорбции является капиллярная конденсация парообразного адсорбата в порах на поверхности адсорбента. При адсорбции обычно выделяется некоторое количество теплоты (теплота адсорбции), что обусловлено энергетическим выигрышем при сближении молекул адсорбата и адсорбента. Величина этого «выигрыша» зависит от интенсивности межмолекулярного взаимодействия, т. е. от природы адсорбционных сил, указанной выше, и потому может варьировать в широких пределах. В связи с этим теплота адсорбции зависит от природы взаимодействующих молекул и при физической адсорбции находится в пределах 1-5 ккал/моль для простых молекул и 10-20 ккал/моль для больших молекул; теплота хемосорбции может достигать 100 ккал/моль.

Адсорбированное вещество на поверхности образует «адсорбированный слой», толщина которого зависит от природы молекул и условий протекания процесса адсорбции. При адсорбции газов и паров их молекулы обычно образуют мономолекулярный слой («монослой») на поверхности адсорбента. Если взаимодействие между молекулами адсорбата мало, а поверхность адсорбента однородна, что приближенно имеет место во многих важных для практики случаях, то величина адсорбции при постоянной температуре может быть выражена в виде уравнения изотермы адсорбции Ленгюра:

$$\theta = K_p / (1 + K_p) \quad (8.39)$$

или

$$P = \theta / K(1 + \theta) . \quad (8.40)$$

Здесь $\theta = \frac{\alpha}{\alpha_m}$ – степень заполнения поверхности адсорбента (α_m – предельная величина для плотноупакованного монослоя), P – давление газа, K – константа, зависящая от характера взаимодействия между адсорбентом и адсорбатом. При низких давлениях ($K_p \ll 1$) $\theta \approx K_p$; при высоких давлениях ($K_p \gg 1$) $\theta \rightarrow 1$, т. е. достигается насыщение. При наличии взаимодействия между молекулами адсорбента уравнение изотермы усложняется; простейшим является уравнение, предложенное А.В. Киселевым:

$$P = \theta / [K(1 - \theta)(1 + K_n \theta)], \quad (8.41)$$

где K_n учитывает указанный эффект взаимодействия; при малых K_n это уравнение переходит в уравнение Ленгюра (8.19).

Уравнение Ленгюра в виде (8.18) может быть обобщено на случай газовой смеси, из n комплектов, в которой взаимодействием между молекулами компонентов можно пренебречь:

$$\theta_i = K_i P_i / (1 + \sum_{i=1}^n K_i P_i) \quad (8.42)$$

(индекс 1 относится к одному из компонентов).

Явление адсорбции весьма широко распространено в живой и неживой природе и находит практическое применение в различных областях техники.

В частности, адсорбционное понижение прочности твердых тел (эффект Ребиндера) и его практические приложения были уже описаны выше, в гл. 3. Наиболее широко применяется адсорбция для разделения смесей, очистки и осушки газов и жидкостей (например, в противогасах для адсорбции вредных (отравляющих) веществ из воздуха). Для этих целей используются специальные адсорбенты, обладающие большой «адсорбционной емкостью». В качестве адсорбентов используются тела с дисперсной структурой (большим объемом пор), обуславливающей огромную площадь адсорбирующей поверхности (по сравнению с видимыми размерами) адсорбента – активированные угли, силикагели и др. Например, удельная адсорбирующая поверхность (на грамм адсорбента) для силикагелей достигает $1000 \text{ м}^2/\text{г}$. Такие высокоэффективные адсорбенты получают с помощью различных технологических процессов, например, путем активирования «природных» грубодисперсных тел посредством химической обработки (например, активный уголь получают в результате обработки кокса газами – окислителями), методами коллоидной химии (получение силикагелей), синтезом пористых кристаллов (например, цеолитов) – «молекулярных сит», адсорбирующих молекулы определенных размеров (до 10 Å), и др. методами. Такие адсорбенты используются также в качестве поглотителей газов, например, в медицине; в качестве носителей катализаторов реакций в химической промышленности; при введении смачивателей в полиграфической промышленности и строительстве и наполнителей в полимеры и смазки, в различных процессах флотации, крашения и т. п. В электронике адсорбция пленок металлов и их окислов используется для модификации свойств поверхности катодов электронных ламп и др. электровакуумных приборов с целью снижения работы выхода электрона из катода и повышения его термоэмиссионной и фотоэмиссионной способности. Другие практические применения адсорбций еще будут упоминаться ниже.

8.5 Элементы вакуумной техники

Особые свойства газов в состоянии «вакуума» привели к тому, что обширная совокупность методов и приборов, предназначенных для создания и измерения вакуума, образовала особую область техники – вакуумную технику. Следует сразу заметить, что понятие «вакуума» не является вполне четким. Приведенное выше определение часто относят к «среднему вакууму», подразумевая под «вакуумом» просто состояние газа при давлениях ниже атмосферного (если при этом еще $\bar{\lambda} \ll d$, то говорят о «низком» вакууме, если $\bar{\lambda} \gg d$ – о высоком вакууме). Встречаются также представления о «вакууме» как пространстве, практически не содержащем молекул газа (в этом смысле говорят, например, о «космическом вакууме», в котором плотность материи составляет приметно 10^{-30} г/см^3 , т. е. одна молекула газа приходится в среднем на 10^7 - 10^8 см^3). Наиболее определенным

является понятие, сформулированное в п. 8.1. При этом для различных размеров сосуда получаются различные давления, соответствующие «вакууму». Чем меньше размер сосуда, тем более высокие давления уже определяют «вакуум». Выше уже отмечалось, что в мелких капиллярах (парах) с диаметром менее 1 мкм состояние «вакуума» наступает уже при давлениях, близких к атмосферному. В обычных вакуумных установках используются узлы (камеры) с размерами порядка 10 см, при этом низкому вакууму соответствует давление ≈ 100 Па (1 мм рт. ст.), среднему вакууму – порядка 10^2 - $0,1$ Па (10^{-3} мм рт. ст.), а высокому – ниже 0,1 Па (10^{-3} мм рт. ст.). В камерах, используемых для имитации «космического вакуума», с размерами до нескольких десятков метров, «высокий» вакуум достигается при давлениях ниже 10^{-3} Па (10^{-5} мм рт. ст.). Наименьшие давления, достигаемые современными методами разряжения («откачки») газов, составляют 10^{-13} - 10^{-14} Па (10^{-15} - 10^{-16} мм рт. ст.); при этом на 1 см³ объема приходится всего несколько десятков молекул газа. Область давлений ниже 10^{-6} Па (10^{-8} мм рт. ст.) часто называют «сверхвысоким» вакуумом.

Вакуум используется в технике в самых разнообразных целях. Прежде всего, следует указать на производство электровакуумных приборов как важнейшую область электротехнической и электронной промышленности. В электронных лампах (диодах, триодах, магнетронах, клистродах и др.) источником электронов является раскаленный катод, срок службы которого во многом определяется условиями вакуума. Кроме того, в этих приборах создается направленный устойчивый поток заряженных частиц («ток в вакууме»), и работа прибора основана на возможности управления этим потоком, это возможно только при наличии достаточно высокого вакуума в колбе лампы. Важнейшей стадией производства разнообразных электровакуумных и газоразрядных приборов является вакуумная обработка, в ходе которой приборы проходят откачку, прогрев и обезгаживание с целью удаления адсорбированных газов с поверхностей всех деталей, а затем, если прибор является вакуумным, в рабочем режиме в нем устанавливаются средства поддержания вакуума в приборе в процессе его эксплуатации – геттеры (см. ниже).

Большое практическое значение имеет применение вакуума в металлургии при осуществлении ряда технологических процессов. Так, в основе современных методов получения материалов высокой степени чистоты лежат вакуумные процессы – плавка, испарение и перегонка. При этом используются давления до 10^{-2} Па (10^{-4} мм рт. ст.), а иногда и ниже. Вакуумная плавка осуществляется в специальных электропечах и широко используется при производстве высококачественных сталей и чистых металлов (а также сплавов) для изготовления изделий со строго заданными специальными свойствами. В процессе плавки эффективно осуществляется отделение из металла различных примесей – газовых включений (азота, кислорода, водорода), неметаллов и посторонних металлов. К числу других распространенных в металлургии вакуумных процессов относится

«вакуумное литьё», при котором заполнение литейной формы расплавленным металлом осуществляется в вакууме. Давление обычно составляет 40-0,3 Па ($0,3-2 \cdot 10^{-3}$ мм рт. ст.). При таком способе литья из металла практически полностью удаляются газовые включения, что позволяет получать тонкостенные, плотные отливки высокого качества. При этом применяются различные способы литья, например, вакуумное всасывание металла в форму, литье в вакууме под давлением, вакуумно-центробежная заливка с использованием инерционных центробежных сил и др. Для производства фасонных отливок из специальных, инструментальных и конструкционных сталей используется сочетание вакуумного литья с упомянутым выше методом вакуумной плавки. Следует отметить также вакуумный метод формования изделий из пластмасс и других легкообрабатываемых материалов (гипс, алюминий), например, различных емкостей, деталей холодильников и т. п. Листовой материал закрепляют на форме, нагревают до состояния размягчения, а затем создают в полости между формой и листом невысокий вакуум – порядка 10^4 Н/м² (100 мм рт. ст.); при этом образующаяся разность давлений создает деформацию листа в соответствии с заданной формой. Некоторые изделия полусферической формы изготавливают методом свободного формования, при котором форма не используется, а полусфера свободно формируется в пространстве вакуумной камеры. Применение такого метода формования во многих случаях оказывается предпочтительнее обычных методов глубокой вытяжки материалов под действием пуансонов (штампов).

Низкая теплопроводность газа в состоянии разрежения используется в устройствах для термоизоляции как в различных приборах для научных исследований, так и в бытовых приборах (например, термосах).

Большое количество технологических процессов целесообразно проводить в условиях вакуума. К таким процессам относится, в частности, вакуумная сварка (сварка при пониженном давлении). Она осуществляется электронным пучком в вакуумной камере при давлении 10^{-3} Па (10^{-5} мм рт. ст.). Метод применяется для сваривания химически активных и тугоплавких материалов. Возможна также сварка различных металлов и твердых сплавов методом пластического деформирования в вакуумной камере или же в восстановительной среде. Наиболее рациональным является применение этих методов при наличии специальных высоких технических требований к изделиям со сравнительно небольшими габаритами.

В вакууме осуществляют очистку и разделение высокомолекулярных соединений, продуктов полимеризации, сложных эфиров, спиртов и т. д.; при этом создают давления порядка 10^{-1} Па (10^{-3} мм рт. ст.). В электротехнической промышленности вакуум применяют в процессах очистки (обезгаживания) и пропитки изоляционных материалов и кабелей: заливки конденсаторов и трансформаторов, сушки пластмасс и т. д. Сублимационная сушка термочувствительных материалов в замороженном состоянии чрезвычайно широко распространена в пищевом производстве и в

фармпромышленности. Таким путем сушат, например, яичный белок, ферменты, донорское молоко, антибиотики, вакцины, бактериальные культуры. Удаление растворителей и концентрирование растворов осуществляют в вакууме при невозможности нагревания веществ (например, взрывчатых). В условиях среднего и высокого вакуума (10^{-4} - 10^{-4} Па) проводят обработку тканей в процессе крашения, металлизацию бумаги, керамики и матриц для грамофонных пластинок, нанесение защитных и декоративных пленок в различных отраслях производства (при изготовлении бытовых и специальных оптических зеркал, елочных и др. украшений, отражателей автомобильных и самолетных фар). В условиях вакуума производят восстановление металлов из руд, а также их химическое соединение и рафинирование. Вакуумные приборы и устройства используются для разделения суспензий (например, вакуум-фильтры), в медицине (например, вакуум-экстраторы) и т. д.

Особое значение имеет использование вакуума в научных исследованиях. При этом создаются условия повышенной чистоты, необходимые для точного контролирования изучаемых явлений, например, при исследовании свойств поверхностей и т. д. Кроме того, в условиях вакуума, как уже упоминалось выше, можно создавать направленные пучки нейтральных и заряженных частиц, что важно во многих научных исследованиях. Очень важны условия вакуума в оптических исследованиях, в которых возможно сильное поглощение света газами. Типичным примером этого рода является «вакуумная спектроскопия», или спектроскопия в области вакуумного ультрафиолета – спектральные исследования в далекой ультрафиолетовой области длин волн (с длиной примерно от 200 до 0,5 нм). Излучение в этой области спектра сильно поглощается кислородом воздуха, начиная от $\lambda \approx 185$ нм, поэтому при атмосферном давлении оно не могло бы пройти через спектральный прибор. В то же время исследования в этой области имеют большое научное и прикладное значение; здесь находятся спектры однозарядных и многозарядных ионов (для меди, например, удалось наблюдать спектры восемнадцатикратно ионизированных атомов), электронные молекулярные спектры, спектры многих звезд и туманностей и т. д. Расшифровка этих спектров дает ценную физическую и астрофизическую информацию, в особенности при исследованиях высокотемпературной плазмы. Поэтому для преодоления указанной трудности приемник и источник излучения (например, вакуумная искра) и сам спектральный прибор (обычно – дифракционная решетка) помещают в вакуумированный объем при рабочем давлении 10^{-2} - 10^{-3} Па (10^{-4} - 10^{-5} мм рт. ст.). Особенности работы спектральных приборов в этой области будут подробнее рассмотрены в т. III курса.

В последние десятилетия особую актуальность приобрели исследования поведения материалов в условиях сверхвысокого вакуума в связи с вступлением в эру освоения Космоса. Проблемы «космического материаловедения» изучаются с помощью вакуумных камер, больших

размеров, в которых создаются 10^{-12} - 10^{-14} Па. Это ставит новые задачи в области совершенствования вакуумной техники.

Основой вакуумной техники являются методы и средства получения низких давлений, т. е. откачка, которая осуществляется с помощью вакуумных насосов различных типов. Основными параметрами, характеризующими работу насосов, являются: предельное (остаточное) давление, т. е. наименьшее давление, достигаемое с помощью насоса: быстрота откачки – объем газа, откачиваемый насосом в единицу времени (в заданном интервале давлений), а также максимальное давление на выходе насоса («выпускное давление»).

Для получения предварительного разрежения (до 1-0,1 Па) обычно используют механические («форвакуумные») насосы, выпускное давление которых равно атмосферному. Обычно применяются вращательные многопластинчатые насосы, в рабочей камере которых вращается ротор, содержащий в прорезях подвижные пластины, скользящие по внутренней поверхности камеры. Засасываемый в камеру газ сжимается пластинками до давления, при котором открывается выпускной клапан, и газ выбрасывается в атмосферу. Такие насосы простейшей конструкции обладают большой скоростью откачки (более 100 л/с), однако обеспечивают сравнительно низкий вакуум (10 Па). Более высокую степень разрежения создают вращательные насосы с масляным уплотнением, рабочая камера которых заполняется маслом (или же погружается в масляную ванну). Быстрота откачки «газобалластных» насосов этого типа достигает 750 л/с, предельное давление – 10^{-1} Па. Очень высокий вакуум достигается с помощью турбомолекулярных насосов, в которых сложный ротор, представляющий собой систему дисков, сообщает молекулам газа дополнительную скорость при своем вращении; в частности, с помощью насоса Беккера достигается вакуум до 10^{-8} Па.

Для получения среднего и высокого вакуума обычно применяются диффузионные насосы, в которых используется явление диффузии молекул газа в области струи рабочего вещества – пара – за счет перепада парциального давления. В настоящее время применяются паромасляные насосы, в которых рабочим веществом служат пары специальных вакуумных масел. Обычно используются трехступенчатые диффузионные насосы, обеспечивающие вакуум до 10^{-6} Па при скорости откачки несколько сотен л/с.

Действие сорбционных насосов основано на поглощении (сорбции) газов активными поглотителями (*Ti*, *Zr*, *Ba*, *Mo*) при комнатной и более низких температурах (с охлаждением жидким азотом или водородом). Такие насосы обеспечивают эффективную откачку газов типа H_2 , O_2 , CO , CO_2 , паров H_2O . Инертные газы поглощаются только при низких температурах. Наиболее широко распространены «бариевые» и «титановые» насосы. Они требуют максимального выпускного давления не выше 10^1 - 10^2 Па и поэтому используются в качестве высоковакуумных насосов в сочетании с насосами

предварительного разрежения. Титановый насос с охлаждением до температур $<77\text{K}$ обеспечивает предельный вакуум до 10^{-13} мм рт. ст. с быстротой откачки до 10^6 л/с. Такие насосы помещаются внутрь больших вакуумных камер и обеспечивают нужные условия для многих научных исследований.

Часто используются комбинации сорбционных насосов с ионными насосами, действие которых основано на удалении ионизированных в разряде молекул газов сильным электрическим полем. Комбинированные ионно-сорбционные насосы при наличии предварительного разрежения до 10^2 Па создают вакуум 10^5 Па (в пределе – до 10^8 Па), при быстроте откачки до нескольких тысяч л/с (в зависимости от рода газа). Следует также упомянуть о криогенных насосах, действие которых основано на поглощении газов поверхностями, охлажденными до очень низких температур («водородной» – 20K или «гелиевой» – $4,2\text{K}$). Упомянувшиеся выше геттеры, используемые в электровакуумных приборах для поддержания в них высокого вакуума, представляют собой вещества, активно поглощающие или связывающие различные газы. В качестве таких веществ применяются тантал, цирконий, барий, ниобий и др. Геттеры вводятся в электровакуумный прибор в разнообразных конструктивных исполнениях – в виде покрытий, нанесенных на аноды или сетки, порошковых покрытий, проволочных таблеток, отрезков проволок и т. д.

Не менее важной составной частью вакуумной техники является вакуумметрия – совокупность методов измерений и контроля низких давлений газа. Существует большое количество вакуумметров различных типов, действие которых основано на разных физических принципах и применяющихся в определенных диапазонах давлений. В диапазоне давлений от атмосферного (10^5 Па) до $10^{-0,1}$ Па (10^{-1} – 10^{-3} мм рт. ст.) применяются механические вакуумметры жидкостного и деформационного типов. В жидкостных приборах используется связь гидростатического давления с высотой столба жидкости (ρgh): давление газа на жидкость в U-образной трубке вызывает изменение разности уровней жидкости в коленях, которое фиксируется обычно визуальным способом. В качестве рабочих жидкостей применяются ртуть, вакуумное масло и др. В деформационном вакуумметре газ давит на чувствительную мембрану, деформация которой считывается по перемещению соединенной с ней стрелкой по шкале. Более низкие давления до 10^{-3} Па – можно измерять с помощью компрессионных вакуумметров, действие которых основано на законе Бойля-Мариотта. В этих приборах определенный объем газа отделяется и сжимается до определенного объема и давления в капилляре, и исходное давление определяется по известным геометрическим параметрам прибора.

Чрезвычайно широко распространены в лабораторных условиях тепловые, особенно термопарные, вакуумметры, действие которых основано на описанном выше эффекте снижения теплопроводности газа при

понижении давления в условиях вакуума. В герметичном баллоне имеется металлическая нить, нагреваемая проходящим по ней током; температура нити зависит от интенсивности теплоотвода от неё через газ. При снижении давления теплопроводность газа уменьшается, а температура нити возрастает (при повышении давления – уменьшается). Температура нити определяется (в термопарном вакуумметре) с помощью термопары, присоединенной к нити. Интервал действия этих приборов – 10^3 - 10^{-2} Па.

Для измерения высокого вакуума обычно применяют ионизационные вакуумметры, диапазон работы которых очень широк – от атмосферного давления до 10^{-12} Па; обычно они используются, однако, при давлениях порядка 10^{-3} Па и ниже. Очень часто вакуумметры термопарного и ионизационного типа объединяются в один комбинированный вакуумметр (типа ВИТ), что предоставляет большие удобства при практическом использовании. В начале процесса откачки измерение производят термопарным вакуумметром, а после снижения давления 10^{-1} - 10^{-2} Па прибор перекачают на «ионизационный» режим. Датчиками для измерения при этом служат монтируемые совместно на вакуумной установке «термопарная лампа» (ЛТ) и «ионизационная» монометрическая лампа (типа ЛМ). В ионизационной лампе создается ионизация газа электронами, ускоренными электрическим полем между двумя электродами – анодом и катодом, и образующиеся ионы собираются коллектором; сила тока на коллектор является мерой давления газа, поскольку теперь ионизация газа зависит от давления. Для измерения сверхвысокого вакуума используются также магнитно-разрядные вакуумметры, действие которых основано на зависимости тока электрического разряда в магнитном поле от давления газа. Применение комбинации электрического и магнитного полей позволяет повысить степень ионизации газа, что облегчает измерение очень низких давлений. Для измерения среднего и высокого вакуума используют также вакуумметры вязкостного, радиометрического и некоторых др. типов.

Помимо основных средств вакуумной техники – насосов и вакуумметров – в её комплекс входят также различные вспомогательные средства, прежде всего, вакуумная арматура, обеспечивающая управление и контроль работы системы – регулирующие и запорные вентили (в частности, запорные краны – металлические или стеклянные), вакуумные затворы в местах перекрытия откачки с большим проходным сечением, вводы в систему электроэнергии, охлаждающей воды и т. д., смотровые окна для контроля протекающих в вакууме процессов. Места соединений в вакуумной системе герметизируются резиновыми или свинцовыми кольцевыми прокладками, помещенными между фланцами, скрепленные болтами. Часто применяются гибкие соединения – сильфоны – и др. средства создания подвижности узлов вакуумной системы. Для изготовления высоковакуумных систем применяются материалы, обладающие рядом специфических свойств – малой газопроницаемостью, способностью при низком давлении собственных паров, а также хорошими механическими (прочностными)

свойствами. Для изготовления корпусов установок, насосов, вентилях и др. арматуры используются металлические материалы, обычно – конструкционные стали. Для соединительных трубок, ламп, колб (газовых резервуаров) и т.д. применяются различные сорта стекла. Для уплотнения мест соединений используются вакуумные замазки (эпоксидная смола) и смазки (например, для уплотнения стеклянных кранов). В качестве рабочих жидкостей для насосов и жидкостных вакуумметров используются вакуумные масла различных сортов; обычно применяются минеральные и кремнийорганические масла. Для форвакуумных насосов у нас применяют, например, масла ВМ-4, ВМ-6 и др. с давлением пара не выше 10^{-4} Па, а для высоковакуумных (диффузионных) насосов – масла ВМ-1, ВМ-2 и т. п. с давлением не выше $5 \cdot 10^{-6}$ Па. Однако в реальной вакуумной системе может оказаться много источников газовой выделения, и в результате давление паров будет высоким, так что запланированный высокий вакуум получить не удастся. В таких случаях весьма эффективным приемом борьбы с газовой выделением является «вымораживание» паров в ловушках, охлаждаемых жидким азотом. Они, по существу, относятся уже к области «криогенной» техники и будут несколько подробнее описаны ниже, в п. 8.4.

Развитие и совершенствование методов вакуумной техники продолжается и в настоящее время. Однако, помимо этой «земной» техники, выход в Космос открыл новые возможности исследования свойств и поведения материалов непосредственно в условиях глубокого «космического» вакуума (содержащего молекулу газа на десятки м^3). Эти исследования проводятся широким фронтом на искусственных спутниках Земли, космических кораблях и орбитальных космических станциях.

Рассмотрим коротко применение адсорбции в вакуумной технике. Для создания высокого вакуума (с давлением ниже 10^{-8} тор, или 10^{-6} Па) при большой скорости откачки (более 1800 л/с) часто используются адсорбционные насосы с металлическими адсорбентами, активированным углем, силикагелем и др., причем для интенсификации адсорбции адсорбент часто охлаждают до низких температур. Большими достоинствами таких насосов является простота конструкции и отсутствие выделений рабочего вещества из насоса (масла и т. д.) в вакуумную систему. Очевидным недостатком является постепенное насыщение адсорбента откачиваемым газом, в результате чего эффективность откачки снижается со временем, и необходимо осуществлять регенерацию адсорбента – удаление адсорбированного вещества. Наибольшее применение адсорбированные насосы нашли в тех установках, где требуемая высокая скорость откачки не может быть обеспечена внешними (механическими и паромасляными) насосами. В частности, во многих научных и технических исследованиях применяются вакуумные камеры больших размеров, в которых осуществляются различные процессы (например, сварка в вакууме). В этих случаях требуемые параметры откачки обеспечиваются перемещением

адсорбционных (например, титановых) насосов непосредственно внутрь камеры.

8.6 Элементы техники низких температур

Как было пояснено выше, для перевода газа в жидкое состояние необходимо вначале охладить его до температуры ниже критической, а затем сжать до давления насыщенного пара, что для большинства газов не составляет проблемы. Однако для некоторых газов, в частности, входящих в состав земной атмосферы, критические температуры очень низки и составляют несколько десятков кельвинов, поэтому их предварительное охлаждение образует сложную техническую проблему. С другой стороны, сжиженный газ при низкой температуре кипения является эффективным хладагентом и может использоваться в разнообразных научных и технических целях (см. ниже). Таким образом, создание способов сжижения газов с низкими температурами кипения привело к развитию самостоятельной области техники – криогенной техники, что в свою очередь, стимулировало научные исследования, также образовавшие самостоятельную область науки – физику низких температур. Коротко остановимся на некоторых основных достижениях физики и техники низких температур (детальному изложению соответствующих проблем посвящена весьма обширная научно-техническая литература).

Вначале рассмотрим некоторые основные методы криогенной техники. К ним относятся, прежде всего, способы сжижения газов (азота, водорода, гелия и др.) и их транспортировка и хранение в жидком состоянии; получение чистых газов, например, азота, кислорода и аргона из воздуха и др. Кроме того, разработаны методы охлаждения различных приборов и устройств, например, сверхпроводящих магнитов, трансформаторов, узлов ЭВМ, а также биологических объектов. Это привело к созданию самостоятельных направлений в криогенной технике, в частности, криоэлектронике и криобиологии.

Основными методами сжижения газов в промышленных масштабах являются метод дросселирования, основанный на эффекте Джоуля-Томсона, и метод расширения газа с совершением внешней работы. В лабораторной практике применяются и некоторые другие методы, например, адиабатическое размагничивание. Эффект Джоуля-Томсона является специфичным для реальных («неидеальных») газов и заключается в том, что при прохождении газа под действием градиента давления через локальное гидродинамическое сопротивление, например, вентиль, кран и т. п. («дросселирование» газа), без теплообмена с окружающей средой и без совершения внешней работы, температура реального газа изменяется. Это объясняется тем, что при таком расширении реального газа необходимо совершить работу против сил сцепления его молекул; если например, преобладают силы притяжения, то эта работа будет совершена за счет

кинетической энергии молекул газа, что приведет к понижению температуры («положительный эффект» Джоуля-Томсона). Положительный знак эффекта имеет место лишь в определенном интервале давлений и температур. В соответствующем – «дроссельном» – цикле сжижения газ сжимается в компрессоре и затем предварительно охлаждается в теплообменнике с хладагентом с целью создания условий для положительного эффекта Джоуля-Томсона. В результате последующего дросселирования через дроссельный вентиль газ охлаждается и частично сжижается; жидкость направляется в сборник, а несжиженный газ поступает в теплообменник и служит хладагентом для охлаждения порций сжатого газа. В цикле с детандером газ после сжатия в компрессоре и предварительного охлаждения в теплообменнике поступает в детандер, где он адиабатически расширяется и совершает работу, что приводит к интенсивному охлаждению газа. Существуют детандеры поршневого и турбинного типов; турбодетандер был впервые применен П. Л. Капицей в 1934 г. в установке для сжижения гелия. Технически проще оказывается использовать охлажденный в детандере газ в качестве хладагента для теплообменника, после прохождения которого сжатый газ дросселируется и сжижается. Для повышения эффективности сжижения часто используются несколько детандеров на различных уровнях охлаждения. Используются также сжижительные установки, работающие по циклу теплового насоса – в них используется метод расширения газа без совершения внешней работы (см. гл. 10): эти машины не обеспечивают сжижение только одного газа – гелия – для его сжижения приходится пристраивать дополнительную дроссельную ступень). Метод адиабатического размагничивания применяется для создания сверхнизких температур, отличающихся от нуля на доли кельвина. Этот метод основан на так называемом магнитокалорическом эффекте – изменении температуры магнетика, помещенного в магнитное поле, при адиабатическом изменении напряженности поля (см. т. II). Если вещество является парамагнетиком, то для охлаждения его необходимо размагничивать. Обычно цикл охлаждения включает несколько ступеней, что позволяет получать температуры порядка 10^{-6} К и ниже. Этот метод используется при исследованиях в области ядерной физики, физики твердого тела, квантовой электроники и т. д.

Большое практическое значение имеет проблема хранения и транспортировки сжиженных газов с минимальными потерями, ввиду значительной энергоемкости процессов их получения в промышленных масштабах. Обычно для этих целей используются так называемые «сосуды Дьюара» с двойными стенками, между которыми создан высокий вакуум (до 10^{-3} Па); при этом используется эффект понижения теплопроводности газа в условиях вакуума (см. п. 8.2). Кроме того, для снижения также и радиационного теплообмена (см. гл. 9) стенки, обращенные к вакуумированному пространству, полируются и покрываются тонким слоем серебра или меди. Лабораторные сосуды Дьюара небольшой емкости обычно изготавливаются из стекла, а сосуды, предназначенные для перевозки больших

количеств сжиженных газов – из металлических материалов. Наиболее ответственные детали сосудов Дьюара, определяющие теплоотвод извне – внутренние шейки (сочленения) – изготавливаются из материалов с низкой теплопроводностью (мельхиор, нержавеющая сталь) и имеют малую толщину. Сосуды такого типа (малых размеров) применяются в быту для хранения веществ с более высокой температурой по сравнению с окружающей средой.

Весьма большое распространение нашло применение сжиженных газов в ракетной технике и ядерной энергетике. В частности, жидкий кислород используется в качестве составной части ракетного горючего – как топливо и как окислитель; это позволило получить большое значение удельного импульса силы двигателей (см. гл. 10). В настоящее время потребность в жидком кислороде для ракетной техники продолжает возрастать. Однако перспективным является использование жидкого азота или жидкого фтора, а также жидкого водорода, который при гелиевых температурах (4,2К) может храниться весьма продолжительное время. На этом пути можно повысить удельную тягу двигателей и увеличить возможную продолжительность полета ракеты. В ядерной энергетике весьма важный продукт – дейтерий – получается методом низкотемпературной дистилляции, для которого требуется глубокое охлаждение. Упомянутые выше пузырьковые камеры, применяемые в ядерной технике, заполняются жидким водородом или ксеноном, которые легко поддерживать в состоянии «перегретой жидкости». Жидкие хладагенты используются и в вакуумной технике для целей, также упоминавшихся выше – для охлаждения газопоглощающих поверхностей сорбционных насосов, ловушек для вымораживания паров загрязнений в системах высокого вакуума и т. д. Сжиженные газы (например, водород и кислород) могут успешно использоваться в топливных элементах электрохимических генераторов. Применение методов глубокого охлаждения для охлаждения проводящих частей различных электрических машин в электроэнергетике – турбогенераторов, электродвигателей, трансформаторов, электромагнитов, накопителей энергии – позволяет резко снизить их электрическое сопротивление (до 800 раз) и тем самым уменьшить потери мощности в этих машинах и уменьшить их габариты и массу. Аналогичные эффекты достигаются путем глубокого охлаждения сверхдальних линий электропередачи; при этом в результате снижения потерь на омический нагрев можно существенно повысить плотность тока и передаваемую мощность, а также сократить общую стоимость различных энергетических установок.

Как уже упоминалось выше, в результате успехов криогенной техники в последнее время успешно развивается новая отрасль электроники – криоэлектроника, в которой используются особенности взаимодействия электромагнитного поля с веществом при низких температурах (ниже 90 К). В этом отношении большую роль сыграло создание малогабаритных охладителей – «микроохладители», обеспечивающих холодопроизводитель-

ность в несколько Вт при массе до 300 г. Существуют микрокриогенные устройства различных типов; их действие основано на применении дросселей или детандеров, а также твердых газов (азота, аргона или водорода). Они обеспечивают охлаждение до температур в интервале 77-1,7 К различных элементов электронно-вычислительных машин, квантовых генераторов и усилителей, радиоэлектронных систем космической техники и сверхдальней связи и т. п.

Одним из «первенцев» криоэлектроники был миниатюрный коммутационный элемент для логических, запоминающих и др. схем – криотрон, действие которого основано на явлении сверхпроводимости. Криотроны потребляют очень малую энергию имеют малые габариты (до 1 мкм²) и обладают исключительным быстродействием (доли наносекунды). Поэтому пленочные криотроны получили широкое распространение в вычислительной технике.

В решении проблемы сверхдальней радиосвязи большую роль сыграла разработка методов борьбы с шумами в радиоаппаратуре, ограничивающими возможности приема слабых сигналов, путем применения «криоэлектронных» усилителей – полупроводниковых приборов, работающих при температуре 90 К и ниже (подробнее они будут рассмотрены в т. II). Они отличаются очень малым потреблением мощности (порядка 10⁻² Вт) и ничтожным уровнем шумов. Низкие температуры используются также для повышения добротности объемных резонаторов в СВЧ генераторах в 10-100 раз путем охлаждения до 20 К (водородные температуры). В сантиметровом и дециметровом диапазоне используются резонаторы со сверхпроводящими стенками, в которых достигается добротность порядка 10⁹ и выше, что позволяет повысить стабильность частоты генераторов до 10⁻⁹-10⁻¹⁰. Развитие криоэлектроники продолжается и во многих перспективных направлениях.

Криогенная техника все шире используется в современной биологии и медицине, в особенности для консервации крови, костного мозга, тканей и органов и др. биологических объектов. При этом возникает множество сложных проблем. При замораживании биологических тканей, содержащих большое количество воды, образуются кристаллы льда, острые грани которых разрушают клетки, так что замораживание приобретает биологически необратимый характер. При быстром охлаждении можно добиться превращения воды в очень мелкокристаллическую твердую структуру, не вызывающую повреждения. Однако при размораживании в интервале температур вблизи – 100°С, имеет место рекристаллизация – образование новой, крупнокристаллической структуры, что опять-таки приводит к повреждению клеток. Этого можно было бы избежать лишь путем сверхбыстрого отогревания замороженных тканей (менее чем за 3-5 с). Применение современных методов нагрева – в СВЧ поле, под давлением и т. д. – позволяет достигнуть этого эффекта лишь для сравнительно небольших биообъектов. Поэтому при решении проблем криоконсервации

тканей и органов, а также больших количеств крови применяют «криопротекторы» (глицерин, сахар, гликоли), которые, проникая в клетку, ослабляют эффект кристаллизации воды и позволяют сохранить жизнеспособность биообъектов после замораживания и последующего отогрева на удовлетворительном уровне. Помимо указанных выше медицинских целей, криоконсервация применяется также в животноводстве для длительного хранения спермы домашних животных (крупного рогатого скота и др.), используемой для целей искусственного осеменения.

Совокупность методов использования эффекта охлаждения в лечебных целях образует новую отрасль медицины – криотерапию. Этот эффект используется для ослабления воспалительных процессов, в качестве крововосстанавливающего и болеутоляющего средства. При выполнении крупных операций на сердце, головном мозге и др. органах применяют гипотермию – общее охлаждение организма. В 60-х гг. большие успехи были достигнуты в области криохирургии – совокупности методов использования низких температур для разрушения органов и тканей, подлежащих удалению из организма. Локальное замораживание кожи осуществляется сравнительно просто, в то время как замораживание «глубинных» тканей вызывает значительные трудности. Аппаратура для этих целей, в которой используется жидкий азот (77К), была создана лишь сравнительно недавно. В настоящее время метод криохирургии наиболее успешно используется при операциях на головном мозге. Для криогенной деструкции (разрушения) глубоколежащих образований мозга в него вводят канюлю – тонкую металлическую трубку с резервуаром для заливки жидкого азота; на конце канюли создается температура около -70°C , что вызывает, образование в заданном месте ледяного шарика диаметром 5-9 мм. После выкипания азота шарик тает, а оттаявшая ткань отмирает. Модификация этого метода используется для замораживания опухолевой ткани, в значительных объемах (диаметром до 55 мм). Метод криохирургии находит все более широкое применение при глазных операциях, при удалении миндалин, полипов носоглотки, опухолей носа и др. операциях.

О применении низких температур для замораживания пищевых продуктов с целью их длительного хранения будет более подробно сказано в гл. 10 при рассмотрении холодильной техники. Обычно применяются охлаждения до температур не ниже -35 – -40°C ; этого эффекта можно достигнуть обычно без применения жидких хладогенов. Однако они используются при хранении больших масс продуктов.

Как уже упоминалось выше, особое значение имеет применение криогенной техники в фундаментальных и прикладных научных исследованиях при низких температурах. Совокупность большого количества достижений в этой области образует «физику низких температур». Сущность этих достижений заключается в том, что при обычных температурах тепловые движения атомов, молекул, электронов создают «шум», маскирующий многие фундаментальные эффекты. Применение низких

температур позволяет устранить этот шум и изучить многие тонкие явления (обычно квантовой природы). Типичным примером является «плавление» твердого гелия при 0К под действием «нулевых» колебаний, являющихся следствием квантовомеханического принципа неопределенности (см. т. III). Другим ярким примером наблюдения качественно новых физических эффектов при низких температурах является открытие сверхпроводимости и сверхтекучести. Явление сверхпроводимости заключается в падении электрического сопротивления вещества постоянному току при определенной «критической» температуре, составляющей обычно несколько кельвинов (например, *Hg* – 4К, *Zn* – 0,9К, *Pb* – 7,2К, *Mo* – 0,9К и т. д.). При переходе в сверхпроводящее состояние структуры кристаллической решетки, механические, оптические и некоторые другие свойства остаются практически неизменными, в то время как электрические и магнитные свойства скачкообразно изменяются. Созданный каким-либо способом ток в сверхпроводнике в виде кольца со временем практически не затухает, и магнитный поток внутри этого кольца («замороженный» поток) также сохраняется. В сверхпроводящем состоянии имеют место и другие уникальные свойства, что обусловило все более широкое применение эффекта в различных электрических приборах и устройствах, о чем уже упоминалось выше.

При температуре 2,17К (« λ – точка») в жидком гелии при давлении насыщенных паров (37,8 мм рт. ст.) происходит особого рода превращение («фазовый переход») – «гелия-I» в «гелий-II». Гелий-II отличается от гелия-I значительно большей теплопроводностью, большой теплоемкостью, иным ходом зависимости плотности от температуры, а также свойством «сверхтекучести», открытым П. Л. Капицей в 1938 г. – способностью протекать через капилляры, практически не обнаруживая вязкого трения. Эти необыкновенные свойства гелия-II – единственной в природе «квантовой жидкости» – могут быть поняты лишь на основе квантовомеханической теории (см. т. III).

Исследования свойств кристаллических твердых тел при сверхнизких температурах дает ценную информацию о распространении элементарных возбуждений («квазичастиц») в твердом теле, что позволяет теоретически предсказать его электрические, магнитные, оптические и другие физические свойства. Важную роль сыграло применение низких температур при изучении резонансных явлений в твердых телах – электронного, парамагнитного и ядерного резонанса. Охлаждение до температур, близких к абсолютному нулю, используется в ядерной физике для создания мишеней и источников с поляризованными ядрами при изучении особенностей анизотропного рассеяния элементарных частиц; эти эксперименты сыграли значительную роль, в частности, в решении проблемы сохранения четкости при ядерных взаимодействиях (см. т. III).

Большое практическое значение имеют низкотемпературные исследования пластичности и прочности материалов. При понижении

температуры кристалл сжимается, и в результате этого модуль упругости возрастает. Помимо этого эффекта, снижение температуры приводит к уменьшению скорости термоактивированного движения дислокаций и, следовательно, к уменьшению скорости пластической деформации при заданном уровне напряжений. При этом обычно усиливаются хрупкие свойства материалов и может измениться преимущественный механизм пластической деформации, например, при «блокировке» основных систем скольжения, возрастает роль пластической деформации двойникованием. Исследования механических свойств материалов при низких температурах приобретают особую актуальность в связи с конструированием космических летательных аппаратов, обшивка которых постоянно находится в контакте с «космическим» холодом, близким к абсолютному нулю.

Создание физики низких температур сопровождалось соответственным совершенствованием экспериментальной методики исследований. Во многих исследованиях используются специально сконструированные термостаты – криостаты, предназначенные для исследований при азотных, водородных и гелиевых температурах. Криостат по существу представляет собой описанный выше сосуд Дьюара, часто содержащий несколько «рубашек» - оболочек, заполняемых жидкими хладагентами, и имеющий внутреннюю рабочую камеру для размещения экспериментальной установки.

Особую область физики низких температур образуют методы точного измерения температуры. Для этой цели обычно используются платиновые термометры сопротивления, градуированные в соответствии с Международной температурной шкалой, основанной на шести воспроизводимых температурах (называемых «первичными постоянными точками»); в области от 90 до 300K она практически совпадает с термодинамической шкалой (отличие не превышает $0,02^\circ$). Для более грубых измерений используются медные термометры сопротивления, термоэлементы и терморезисторы (полупроводниковые нелинейные сопротивления, зависящие от температуры). При более низких температурах для воспроизведения термодинамической шкалы используются газовые термометры, действие которых основано на изменении давления или объема газа в зависимости от его температуры. В качестве термодинамического тела ранее использовался водород, в настоящее время – гелий и азот (азот – для области высоких температур, в которой гелий легко проникает через стенки резервуара термометра). При температурах ниже 1 K используются методы термометрии. В них зависимость магнитной восприимчивости парамагнитной соли χ от температуры – закон Кюри: $\chi = C/T$. По измеренной величине χ и известной постоянной Кюри C можно вычислить так называемую «магнитную температуру» T_M , которая при низких температурах может отличаться от «истинной» температуры T (при $T=0,1$ K это расхождение составляет примерно 0,05K). Применяются и другие методы точного измерения низких температур.

8.7 Свойства жидкостей. Краткие сведения

Из изложенного выше, в п. 8-3, ясно, что жидкость представляет собой «конденсированное состояние» вещества, в котором молекулы сблизилась настолько, что уже могут удерживаться в положениях равновесия молекулярными силами, так что плотность жидкости в сотни раз превышает плотность газа. В то же время молекулы сохраняют еще относительную свободу передвижения, поскольку при температурах, характерных для жидкого состояния, они еще имеют достаточную кинетическую энергию теплового движения. Поэтому молекула сохраняет некоторое равновесие положение в жидкости лишь в течение некоторого короткого времени – «времени оседлой жизни», которое составляет порядка 10^{-11} с. Находясь в положении равновесия, молекула жидкости в среднем окружена 12 ближайшими соседями и совершает тепловые колебания с периодом порядка $\tau_0 \sim 10^{-12}$ с. Такая ситуация называется «ближним порядком», в отличие от «дальнего порядка» в кристаллах (см. п. 8.8): он сохраняется лишь на ограниченных расстояниях – в пределах так называемых «координационных сфер». В первой из них содержится около 12 молекул, во второй – около 6 и т. д.; в то время как для кристаллов эти числа являются вполне определенными, в жидкости эти «координационные числа» уменьшаются с повышением температуры. При этом «истинные» числа ближайших соседей у каждой молекулы испытывают сильные колебания – «тепловые флуктуации», даже вблизи температуры затвердивания жидкости. При более высоких температурах эти флуктуации возрастают, и «координационные числа» теряют смысл, что соответствует переходу в газообразное состояние, в котором на одну молекулу приходится около 0,03 ближайших соседей. Межмолекулярные расстояния в жидкости в разных местах различны, однако имеют некоторое вероятностное распределение по величине. Наиболее часто встречаются расстояния, близкие к наименьшим возможным при наиболее плотной «шаговой» упаковке.

Переходы молекул жидкости на «оседловое место» осуществляются в виде «термоактивированных» скачков, связанных с преодолением потенциального барьера, обусловленного силами притяжения между молекулами (см. выше, величина ε на рис. 8.1). Поэтому указанная выше величина «времени оседлой жизни» молекулы τ может оцениваться по формуле:

$$\tau = \tau_0 \exp\left(W/KT\right), \quad (8.43)$$

где W – «энергия активации» скачка (близкая по смыслу к упомянутой величине ε). Величина τ характеризует вязкость жидкости: для маловязких («обычных») жидкостей она составляет $\tau \sim 10^{-11}$ с, как указывалось выше, а для таких «твердых» жидкостей, как смолы, стекло и т. п. (их относят так же к «аморфным телам», см. ниже), величина τ может достигать 10^5 - 10^6 с.

Наличие постоянно совершающихся случайных «перескоков» молекул из одних положений в другие определяет их основные механические и др. свойства. Основным специфическим свойством жидкостей является их «текучесть», т. е. отсутствие сопротивления сдвигу (что характерно также и для газов). Если к жидкости приложена постоянная сдвигающая сила, то появляется преимущественное направление скачков молекул, совпадающее с направлением этой силы, и возникает поток жидкости в этом направлении, т. е. «сдвиговая деформация», скорость развития которой определяется скоростью течения. При малой величине сдвигового усилия частота скачков практически не изменяется, так что величина потока оказывается прямо пропорциональной силе. Таким образом, течение («сдвиг») в жидкости вызывается сколь угодно малым сдвигающим усилием, что и подразумевается в понятии «текучесть жидкости». Мерой текучести является коэффициент пропорциональности скорости потока внешней силе; обратная величина характеризует вязкость жидкости. Течение под действием нагрузки (простейшим видом внешней силы, приложенного к жидкости, является сила тяжести, действие которой используется, например, при переливании жидкости из одного сосуда в другой) является характерной «реакцией» жидкости на постоянные или медленно изменяющиеся по сравнению со временем τ внешние силы. Если же к жидкости приложена быстропеременная (например, импульсная или ударная) нагрузка, то жидкость проявляет свойства, сближающие ее с твердым телом – упругость, прочность и хрупкость. В жидкости могут возникать кратковременные упругие деформации растяжения-сжатия и сдвига, разломы и трещины и т. д. (при медленно изменяющихся нагрузках эти явления маскируются текучестью жидкости).

Тепловые свойства жидкости определяются ее термодинамическим уравнением состояния $f(P, V, T)=0$. Простейшим уравнением состояния является приведенное выше уравнение Ван-дер-Ваальса. Однако теоретические расчеты теплоемкости жидкостей обычно дают результаты, плохо согласующиеся с экспериментальными данными, поскольку теплоемкость сильно зависит от природы молекул жидкости и ее структуры. Удовлетворительной теории теплопроводности жидкостей также в настоящее время еще нет. Однако ряд качественных закономерностей установлен с достоверностью. Обычно коэффициент теплопроводности жидкости убывает с повышением температуры, поскольку он определяется силовым взаимодействием молекул, которое ослабевает с ростом расстояния между молекулами при нагреве жидкости (напротив, теплопроводность газов возрастает с повышением температуры). Коэффициент сжимаемости обычно возрастает с повышением температуры и уменьшается при повышении давления (теплопроводность обычно возрастает с давлением). Как правило, электропроводность чистых жидкостей мала, за исключением расплавленных металлов и растворов электролитов (см. ниже).

Многими специфическими особенностями обладает самая распространенная на Земле жидкость – вода. В отличие от большинства жидкостей, плотность воды с повышением температуры возрастает, достигая максимума вблизи 4°C , а затем вновь уменьшается. При затвердевании объем воды увеличивается приметно на 10%. Удельная теплоемкость воды имеет аномально большую величину по сравнению с другими жидкостями. Коэффициент теплопроводности воды, в отличие от обычных жидкостей, в интервале температур от 0°C до 150°C возрастает, а коэффициент вязкости уменьшается. Электропроводность воды определяется содержанием в ней растворенных веществ; водные растворы многих веществ являются электролитами, что объясняется аномально большой диэлектрической проницаемостью воды (см. т. II). Все эти аномалии объясняются специфической структурой воды и формой ее молекул. Атомы водорода соединены с атомом кислорода ковалентными связями, образующими угол, приблизительно равный 105° . В жидком состоянии, как и в твердом, молекула воды обычно окружена четырьмя ближайшими соседями и образует с ними «водородные связи» (см. п. 8.8), что приводит к образованию рыхлого – «ажурного» – пространственного каркаса, внутри которого «плавают» подвижные ассоциаты – образования из нескольких молекул воды. Именно этой «ажурной» структурой объясняются указанные выше аномалии воды. В частности, при повышении температуры усиление теплового движения может вызвать как «разрежение», так и «уплотнение» воды (аномалия плотности); рост внешнего давления приводит к разрушению «пространственного каркаса» и к увеличению подвижности молекул, что вызывает аномалию вязкости.

Уникальные свойства воды обусловили, в частности, то, что она является основой органической жизни на Земле. Вода содержится в тканях всех живых организмов и выполняет в них самые разнообразные, прежде всего, транспортные функции путем переноса растворенных в ней веществ, например, кислорода, переноса ионов, участвующих в работе нервной системы организма, питательных веществ и т. д. Покрывая большую часть поверхности Земли, большие массы воды (океаны и моря) играют определяющую роль в формировании климатических условий жизни на Земле. Вода выполняет также самые разнообразные (особенно теплообменные) функции во многих областях науки и техники, а также в быту.

Большое практическое значение имеют явления на границе раздела между жидкостью и ее паром или твердой поверхностью. Молекулы в поверхностном слое обладают избыточной потенциальной энергией, обусловленной наличием некомпенсированных сил притяжения со стороны молекул в объеме жидкости, которые стремятся «втянуть» молекулы с поверхности внутрь жидкости. Поэтому жидкость имеет тенденцию к сокращению своей поверхности (при заданном объеме ввиду практической несжимаемости жидкости). Наименьшую площадь поверхности при заданном

объеме имеет сфера, поэтому при отсутствии всех других сил (например, в условиях невесомости) жидкость принимает форму «сферической капли», необязательно малых размеров (классические опыты описаны в общих курсах физики). Увеличение площади свободной поверхности на некоторую величину ΔS требует затраты некоторой работы ΔA , и величина

$$\sigma = \frac{\Delta A}{\Delta S} \quad (8.44)$$

называется коэффициентом поверхностного натяжения жидкости. При этом действующая сила F создает натяжение пленки, которая удерживается силами сцепления жидкости с твердой опорой по некоторому контуру с длиной периметра l . Можно показать, что определение

$$\sigma = \frac{F}{l} \quad (8.45)$$

эквивалентно определению (8.23). Величина σ уменьшается с повышением температуры и в «критическом» состоянии (см. выше) обращается в нуль.

Коэффициент поверхностного натяжения жидкости зависит и от среды, с которой граничит жидкость, поскольку на «поверхностные» молекулы жидкости действуют силы не только со стороны «глубинных» молекул жидкости, но и со стороны молекул граничащей с ней среды. Например, на границе с воздухом измеренное значение коэффициента поверхностного натяжения воды при 0°C составляет 75,7 дн/см, а на границе с насыщенным водяным паром – 73,2 дн/см. Для малолетучих жидкостей это различие невелико, и обычно в таблицах указывают величину σ для границы «жидкость-воздух». Поверхностное натяжение жидкостей измеряется многими способами, например, по массе капли, отрывающейся от вертикальной трубки под действием силы тяжести (метод сталактометра); по величине максимального давления, необходимого для продавливания пузырька газа в жидкость; по форме капли, помещенной на твердую поверхность и др. Поверхностное натяжение имеет место также на границе раздела «жидкость-жидкость», а также между твердым телом и жидкостью или газом. Поверхностное натяжение твердых тел оценивается косвенными методами, с учетом их внутренней структуры.

Некоторые вещества, называемые «поверхностно-активными» (ПАВ), могут адсорбироваться в значительных количествах на поверхностях, изменяя их состояние, в частности, величину поверхностного натяжения. В узком смысле этот термин применяется для веществ, способных уже в небольших концентрациях резко снижать величину σ жидкости, например, воды. Типичными ПАВ являются органические вещества, молекулы которых содержат группы, резко различающиеся по характеру взаимодействия с данной жидкостью (например, с водой). К ним относятся все моющие средства (мыла), смачиватели, эмульгаторы и др. В настоящее время выпускается огромное количество различных ПАВ в виде твердых порошков (стиральные порошки), кусков (мыла), хлопьев, гранул и т. д., а также жидких и пастообразных продуктов, находящихся широкое применение в самых разнообразных областях народного хозяйства и в быту. Мыла и

моющие средства, создающие эффект «пенообразования», применяются для санитарно-гигиенических и технических нужд.

Поверхностно-активные вещества используются в качестве вспомогательных средств при обработке тканей и подготовке сырья в текстильной промышленности, в различных технологических процессах химической, нефтехимической и пищевой промышленности, в горнорудной и обогащательной промышленности для повышения эффективности процесса флоктации. В машиностроении применение ПАВ облегчает механическую обработку материалов, особенно металлических, а также повышает эффективность диспергирования жидких и твердых материалов. В производстве паст, эмульсий и т. п. ПАВ используются в качестве стабилизаторов высококонцентрированных дисперсных систем. Живые организмы сами вырабатывают поверхностно-активные вещества, входящие в состав желудочного сока, крови и т. п. и повышают эффективность биологических процессов.

Поверхностное натяжение играет значительную роль во многих естественных и технологических процессах, особенно в разнообразных поверхностных явлениях. При искривлении поверхностей раздела жидкостей в результате явлений смачивания и несмачивания, поверхностное натяжение вызывает капиллярные явления (подробнее см. ниже). В живых тканях поверхностное натяжение определяет форму клеток, не имеющих жестких граничных поверхностей (к ним относятся большинство животных клеток); в частности, клетки, находящиеся в жидкости (во взвешенном состоянии), принимают сферическую форму. О роли поверхностного натяжения в твердых телах см. ниже.

На границе раздела жидкости и твердого тела наблюдаются явления «смачивания» или «несмачивания»; в частности, капля жидкости на твердой поверхности может принимать форму, показанную на рис. 8.3 а или б. В точках на периметре капли действуют три силы поверхностного натяжения

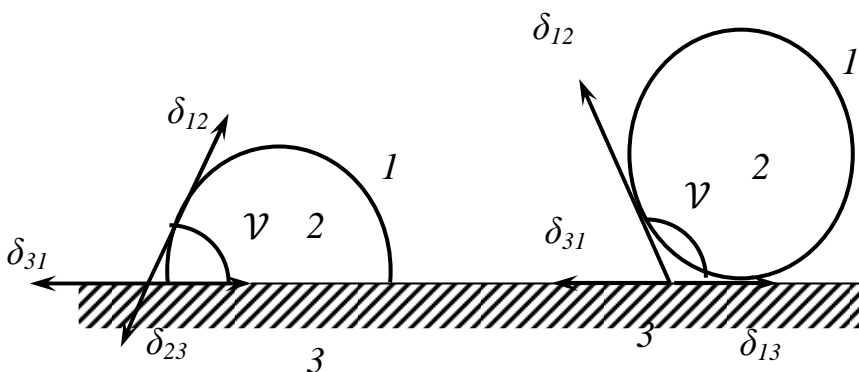


Рис. 8.3

($\sigma_{31}, \sigma_{12}, \sigma_{23}$), смысл которых ясен при учете индексов 1 (воздух), 2 (жидкость) и 3 (твердое тело). В состоянии равновесия должно выполняться условие:

$$\sigma_{13} - \sigma_{23} = \sigma_{12} \cos \theta, \quad (8.46)$$

где величина θ называется углом смачивания или краевым углом (величина $\cos \theta$ часто

называется просто «смачиванием»). Из (8.46) следует выражение для краевого угла ($0 \leq \theta \leq 180^\circ$):

$$\cos \theta = \frac{\sigma_{13} - \sigma_{23}}{\sigma_{12}}. \quad (8.47)$$

Величина

$$A = \sigma_{12}(1 + \cos \theta) \quad (8.48)$$

называется удельной работой (энергией) адгезии (адгезионного отрыва) жидкости, а величина

$$K = 2\sigma_{12} \quad (8.49)$$

удельной работой когезии жидкости. Заметим, что если $\sigma_{13} - \sigma_{23} > \sigma_{12}$, то краевой угол не образуется: это соответствует полному растеканию капли по поверхности твердого тела. Если $\theta = 180^\circ$, то $A = 0$, т.е. отсутствует какое-либо сцепление жидкости с поверхностью твердого тела. Напротив, при приближении $\theta \rightarrow 0^\circ$ работа адгезии стремится к работе когезии, т.е. оторвать жидкость от поверхности становится столь же трудно, как и «разорвать» жидкость. Этот эффект можно наблюдать на клеевых или паянных соединениях: при хорошем смачивании разрыв соединения происходит по толщине соединительного материала (клея или припоя), а при плохом смачивании имеет место отрыв этого материала от соединяемых поверхностей.

Смачивающая жидкость имеет тенденцию к «расползанию» по стенке содержащего ее сосуда, в результате чего поверхность жидкости у стенки искривляется. В больших сосудах этот эффект незначителен, поскольку под действием сил тяжести основная поверхность жидкости располагается горизонтально. Однако в тонких трубках – «капиллярах» – сила веса жидкости может стать недостаточной для преодоления указанной тенденции, и тогда «расползание» жидкости по смачиваемой его стенке трубки проявляется в виде «капиллярного подъема» жидкости. Условия проявления этого эффекта можно оценить, используя формулу Лапласа, согласно которой разность давлений ΔP по обе стороны искривленной поверхности жидкости, обусловленная действием сил поверхностного натяжения, определяется по формуле:

$$\Delta P = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (8.50)$$

где R_1 и R_2 – радиусы кривизны поверхности жидкости (мениска) в двух взаимно перпендикулярных сечениях (величина $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ называется «средней кривизной» поверхности). Например, если поверхность имеет форму кругового цилиндра радиуса R , то $R_1 = R$, $R_2 = \infty$, тогда $\Delta P = \frac{\sigma}{R}$. Если же мениск имеет сферическую форму, то $R_1 = R_2 = R$, и тогда

$$\Delta P = \frac{2\sigma}{R}. \quad (8.51)$$

Для мыльного пузыря, имеющего две свободные поверхности – наружную и внутреннюю – величина ΔP будет в 2 раза больше: $\Delta P = \frac{4\sigma}{R}$. Если соединить больший и меньший пузыри, то больший пузырь будет

расти, и меньший, в конце концов, исчезнет, поскольку давление в нем больше и возрастает с уменьшением его радиуса.

Таким образом, в цилиндрическом капилляре малого радиуса r , в котором мениск можно приближенно считать сферическим с радиусом R (причем из геометрических соображений нетрудно показать, что $R = r / \cos\theta$) жидкость будет подниматься до тех пор, пока разность давлений ΔP (8.51) не уравнивается гидростатическим давлением столбика жидкости высотой h $\Delta P = \rho gh$. Отсюда, для высоты капиллярного подъема жидкости получается формула Жюрена:

$$h = \frac{2\sigma}{\rho gh} \cos\theta. \quad (8.52)$$

Если жидкость не смачивает стенки капилляра, то угол смачивания $\theta > 90^\circ$ и $\cos\theta < 0$, так что $h < 0$; это означает, что в несмачиваемом капилляре, конец которого погружен в сосуд с жидкостью на глубину, большую h будет иметь место опускание уровня жидкости ниже основного уровня в сосуде на величину h согласно (8.52), причем мениск в капилляре будет выпуклым. Это явление можно наблюдать, например, при опускании стеклянной трубки в сосуд с ртутью.

Капиллярные явления наблюдаются в природе очень часто в виде капиллярного впитывания и капиллярной пропитки тел жидкостью. Простейшими примерами в быту являются действие губки и промокательной бумаги. Пористые тела, находящиеся во влажном воздухе «отсыревают», т. е. поглощают влагу из воздуха, в результате «капиллярной конденсации» – конденсация влаги в порах смачиваемого ею тела. Согласно уравнению

$$\frac{P_r}{P_0} = e^{\frac{\Delta P}{P_0}}, \quad (8.53)$$

давление насыщенного пара над искривленной поверхностью жидкости P_r отличается от давления над плоской поверхностью P_0 , причем ΔP определяется формулой (8.51), в которой R считается положительным для выпуклых и отрицательным для вогнутых поверхностей жидкости, P_0 – характеристическое давление для данной жидкости (например, для воды при $P_0 = 10^9$ дн/см²). Таким образом, давление насыщенного пара над выпуклой поверхностью возрастает, поэтому в капиллярах конденсация начинается раньше, чем в условиях насыщения атмосферы водяным паром. Это явление играет важную роль в процессах сушки, при удержании влаги почвами и др. пористыми (например, строительными материалами, а также используется в промышленности для улавливания жидкостей мелкопористыми материалами (сорбентами) в целях осушения атмосферного воздуха и др. газов. Одним из сил поверхностного натяжения является возникновение «капиллярных волн» на поверхности жидкости, подробно рассмотренное выше, в гл. 7.

Капиллярные явления играют большую роль в «дисперсных» системах, состоящих из мелких капелек или пузырьков (эмульсии, аэрозоли), а также при возникновении новой фазы – в явлениях кипения, конденсаций и т. д. Это объясняется тем, что с уменьшением радиуса кривизны разность

давлений ΔP , согласно формуле Лапласа, возрастает, и эффекты типа снижения давления насыщенного пара, согласно (8.53), также усиливаются.

В больших масштабах капиллярные явления в природе определяют такие процессы, как подъем грунтовых вод в почвах, подъем растительных соков по капиллярам в стволах деревьев и т. д. Процессы капиллярной пропитки применяются во многих областях промышленности (например, в кожевенном производстве).

Подавляющее большинство, встречающихся в природе, представляют собой не «чистые» жидкости, а растворы, содержащие несколько различных компонентов. Вообще говоря, растворы – это однородные (по физическим свойствам) смеси двух или более веществ, содержание которых в растворе может изменяться в более или менее широких пределах (этим растворы отличаются от химических соединений). Растворы могут быть газообразными, твердыми или жидкими, причем именно последние, обычно подразумеваются под растворами в узком смысле слова. Вода в природе всегда содержит большое количество растворенных в ней щелочей, солей и других примесей; например, морская вода содержит до 3% поваренной соли, а также множество др. неорганических и органических веществ. Природная нефть представляет собой раствор множества жидких углеводородов. В строительстве термином «раствор» обозначают более или менее однородные смеси вяжущего вещества и наполнителя с водой и т. д. Растворы широко распространены в научной, технической и повседневной практике.

Жидкие растворы обладают рядом специфических особенностей, отличающих их от «чистых» жидкостей. При этом свойства раствора зависят в первую очередь от его концентрации, т. е. от относительного содержания растворенных веществ, а также от химической природы этих веществ. Простейшим случаем является «бинарный» раствор, содержащий основной компонент – «растворитель» и примесь – «растворенное вещество». Содержание растворенного вещества в растворе может быть охарактеризовано весовой, объемной или молярной концентрацией, т. е. его относительным количеством (объемным или массовым) в единице массы или объема раствора, или же отношением числа молей растворенного вещества к общему числу молей раствора. В зависимости от величины концентрации различают разбавленные (слабые) или концентрированные (крепкие) растворы. Во многих случаях растворимость одного вещества в другом ограничена; раствор, содержащий предельное количество растворенного вещества, называется насыщенным (например, раствор соли в воде). Концентрация насыщенного раствора характеризует «растворимость» для данной пары веществ. Она существенно зависит от температуры раствора. Если растворение сопровождается выделением тепла, то «тепловой эффект» растворения считается положительным; это имеет место для многих солей и кислот. Например, при растворении 1 моля серной кислоты в воде (при нормальных условиях) выделяется 74,5 кДж тепла. Этот эффект настолько велик, что при растворении вода может закипать и испариться (ввиду этого,

например, правила техники безопасности требуют, чтобы при приготовлении растворов серной кислоты ее наливали в воду, а не наоборот). При повышении температуры растворимость таких веществ уменьшается. Если же растворение сопровождается поглощением тепла, то тепловой эффект растворения считается отрицательным, это имеет место, например, при растворении в воде сахара и многих солей. Например, растворение нашатыря в воде сопровождается поглощением 16,5 кДж тепла. При образовании смеси соли со снегом (или мелко раздробленным льдом) имеет место значительное охлаждение получающегося раствора (например, при использовании $\text{CaCl}_2 \cdot \text{H}_2\text{O}$ – до -55°C), что используется в холодильной технике (см. гл. 10).

Если раствор и чистый растворитель разделены перегородкой, проницаемой только для молекул растворителя, то будет происходить переход молекул растворителя в сосуд с раствором до достижения разности давлений между раствором и растворителем, называемой осмотическим давлением. Оно уравнивает давление на перегородку, создаваемое молекулами растворенного вещества, находящимися в растворе. Совокупность этих молекул в разбавленном растворе подобно идеальному газу, давление которого определяется законом Вант-Гоффа:

$$P_{\text{осм}} = \nu \frac{RT}{V} \quad (8.54)$$

(V – объем раствора, ν – число молей растворенного вещества). Явление осмотического давления играет большую роль, в живой природе. Соки, кровь и другие жидкости в биологических объектах (растениях, животных организмах) представляют собой растворы многих различных веществ, участвующих в биохимических реакциях. Живые клетки окружены полупроницаемыми оболочками – мембранами. Осмотическое давление, возникающее в результате диффузии растворителя через мембраны, достигает значений в десятки атмосфер для растительных клеток и играет большую роль в различных клеточных процессах. Осмотическое давление крови в организме человека составляет около 8 атм, а разность осмотических давлений крови и лимфы – всего 0,04 атм, что существенно для процессов водообмена между ними. Постоянство осмотического давления лимфы, крови и межклеточных жидкостей в организме обеспечивается сложной совокупностью физико-химических и физиологических процессов – осморегуляцией. Нарушение осморегуляции в организме может существенно нарушить функционирование клеток; обезвоживание организма вызывает падение осмотического давления и их сморщивание, а обессоливание может привести к набуханию и последующему разрыв оболочек клеток (это явление называется «осмотическим шоком»). Явление осмоса широко используется в лабораторной практике, например, при определении молекулярных характеристик полимеров, приготовлении концентрированных растворов и в биологических исследованиях. В промышленности осмос применяется, в частности, при получении некоторых полимерных материалов, очистке

высокоминерализованной воды по методу «обратного осмоса» и в некоторых других технологических процессах.

Наличие растворенного вещества в жидкости приводит к ряду специфических эффектов – повышению точки кипения, понижению точки замерзания, понижению давления насыщенного пара над поверхностью раствора и т. п. Количественные закономерности этих явлений носят достаточно точный характер только для разбавленных растворов. Для них вышеупомянутые эффекты носят линейный характер. Так, согласно закону Рауля, относительное уменьшение давления насыщенного пара растворителя равно относительному числу молей растворенного вещества в растворе. Используя этот закон, можно показать, что снижение температуры замерзания раствора пропорционально числу молей растворенного вещества в 1000 г растворителя, причем коэффициент пропорциональности называется криоскопической постоянной. Измерив эту величину, можно вычислить молекулярную массу растворенного вещества; этот метод называется криоскопией. Повышение температуры кипения раствора также пропорционально числу молей растворенного вещества, а коэффициент пропорциональности называется «эбулиоскопической постоянной». Соответствующий метод экспериментального определения массы молекул называется эбулиоскопией.

Заметим, что все эти закономерности справедливы для растворов «неэлектролитов», (или слабых электролитов), в которых не имеет места существенная электролитическая диссоциация; особенности растворов электролитов, содержащих растворенные ионы, будут рассмотрены в т. II.

Наглядное представление о растворимости дают «диаграммы состояния», на осях которых обычно откладывают температуру и концентрацию компонентов раствора. Типичный пример показан на рис. 8.4.



Рис. 8.4

Такой характер носит диаграмма состояния для смеси жидких азота и кислорода. Заштрихованная область соответствует двухфазному состоянию системы, состоящей из жидкой смеси и ее пара. Например, в точке C' смесь пара и жидкости содержит массы вещества и кислорода в отношении $\frac{M_2C}{M_1C}$, а массы жидкости и пара относятся как $\frac{DC}{EC}$. Линия АаВ называется «кривой пара», а АвВ – «кривой жидкости». Выше АаВ

раствор представляет собой однородную смесь, ниже АвВ – жидкую смесь. В точке Д на линии АаВ относительное содержание веществ пропорционально $\frac{M_2D}{M_1D}$, а в точке Е на линии АвВ – отношению $\frac{M_2E}{M_1E}$. Встречаются и более

сложные диаграммы состояния, которые приведены в специальной литературе (относительно твердых растворов см. ниже, п. 8-8).

8.8 Свойства твердых тел (краткие сведения)

Твердое тело характеризуется относительным постоянством формы и объема, что существенно отличает его от жидкости. Твердое тело, помещенное в некоторый сосуд, не принимает самопроизвольно его форму, как жидкость, хотя под большим давлением его можно заставить это сделать. Такой процесс осуществляется при обработке металлов давлением, в частности, прессованием. Однако при этом металл «течет», и его упорядоченная структура нарушается, так что, строго говоря, в процессе пресования он перестает быть «твердым телом». Далее, объем твердого тела может измениться лишь в процессах «гидростатического» (всестороннего) сжатия под огромными давлениями; и этот процесс связан с радиальным нарушением кристаллической структуры, т. е. с нарушением «твердости» тела.

Итак, твердое состояние характеризуется стабильным упорядоченным расположением молекул (атомов) в узлах «кристаллической решетки», т. е. периодической «сетки» точек в пространстве. В этом состоянии тело (кристалл) может находиться (при малости внешних воздействий) неограниченно длительное время. Молекулы (атомы) кристалла могут совершать лишь малые тепловые колебания вокруг положений равновесия в узлах решетки. При повышении температуры тела размах этих колебаний возрастает, что приводит к «тепловому расширению» тела приблизительно по линейному закону: $\Delta l = l_0 \alpha T$, где l_0 – некоторый начальный линейный размер тела, α – коэффициент теплового расширения. При достаточно высоких температурах амплитуда колебаний молекул (атомов) настолько возрастает, что сцепление между ними нарушается, и они приобретают «свободу передвижения», что соответствует переходу вещества в жидкое состояние, охарактеризованное выше.

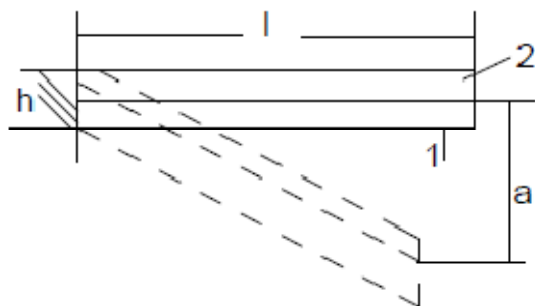


Рис. 8.5

Явление теплового расширения тел нашло многочисленные применения в различных областях техники. В качестве примера рассмотрим широко применяемый в теплоавтоматике и электроавтоматике термический биметалл (термобиметалл), состоящий из 2 металлов с резко различающимися коэффициентами теплового расширения. Обе части биметалла

жестко скреплены друг с другом. Это обычно достигается в процессе его изготовления методом последовательной отливки в форму обоих металлов,

после чего полученная биметаллическая болванка прокатывается до получения лент толщиной несколько мм. В качестве составных частей термобиметалла берут, например, инвар с величиной теплового расширения $\alpha \sim 0,15 \text{ K}^{-1}$ и сталь (или латунь, никель и др.) с $\alpha \sim 10^{-5} \text{ K}^{-1}$. При нагревании биметалла, возникающее в нем неоднородное поле термических напряжений вызывает изгиб ленты (рис. 8.5), причем в сторону металла с меньшим температурным коэффициентом расширения. Чувствительность биметаллического элемента характеризуется отклонением его свободного конца в результате прогиба на некоторое расстояние Δa_1 при нагреве на 1 К. Если толщина обоих металлов 1 и 2 одинакова, то расчёт дает для величины прогиба Δa в зависимости от нагрева ΔT выражение:

$$\Delta a = \frac{3}{4} \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{h} \right) l^2 \Delta T, \quad (8.55)$$

откуда для чувствительности элемента

$$\Delta a_1 = \frac{3}{4} \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{h} \right) l^2 \cdot 1. \quad (8.56)$$

Отсюда видно, что чувствительность биметалла быстро возрастает с длиной l , поэтому часто выполняют такие элементы в форме дуг, спиралей и т.п.

Термобиметаллы широко используются в различных приборах и устройствах в системах управления и регулирования – термометрах, реле, регуляторах температуры, автоматических выключателях тока и др. подобных приборах.

Указанная особенность – устойчивость физического состояния – отличает истинные твердые тела с кристаллическим молекулярным строением от так называемых «аморфных» тел. Эти тела также могут обладать кажущейся неизменностью формы и свойств, однако в действительности находятся в «метастабильном» (неустойчивом состоянии): при появлении «зародышей кристаллизации» (см. ниже) аморфное состояние более или менее быстро (в зависимости от внешних условий) может переходить в кристаллическое. Аморфные тела (смолы, стекло) обнаруживают «самопроизвольную» текучесть, которая может происходить очень медленными темпами (в течение многих суток, месяцев и лет). Отличить аморфное состояние от кристаллического экспериментальным путем можно различными методами (например, при нагревании кристаллического тела его плавление наступает при определенной температуре, в то время как аморфное тело при нагревании постепенно размягчается в довольно широком интервале температур (заметим, что на этом обстоятельстве, по существу, базируется вся стеклодувная техника). Кроме того, аморфное тело в отличие от кристаллического, не обладает анизотропией физических свойств (см. ниже), что также сравнительно легко обнаружить экспериментальным путем. Аморфное тело, по существу, представляет собой «переохлажденную жидкость», в которой имеется лишь «ближний порядок», но время «оседлой жизни» молекул очень велико (об

этой возможности уже упоминалось выше, в п. 8.5). К аморфным телам относятся многие строительные материалы – стекло, бетон, гипс и др.

Некоторые вещества, молекулы которых имеют вытянутую форму, далекую от сферической, в определенном интервале температур могут находиться в «жидкокристаллическом» или мезоморфном состоянии, которое по характеру расположения молекул занимает промежуточное положение между твердым (кристаллическим) и жидким (аморфным) состояниями. Так, для паразоксиманизола интервал жидкокристаллического состояния – 114-135°C, для дибензальбензидина – 234-260°C, и т. д. Расположение молекул в жидких кристаллах обнаруживает черты дальнего порядка, присущего кристаллам – наличие областей упорядоченной (например, нитеобразной) структуры. Это обусловлено специфическим характером взаимодействия между молекулами жидких кристаллов. При более низких температурах вещество приобретает кристаллическую структуру, а с повышением температуры приобретает все черты аморфной жидкости.

Характерной отличительной чертой жидких кристаллов является анизотропия их физических свойств, сближающих их с обычными кристаллами; по своим оптическим свойствам жидкокристаллическое вещество в толстых слоях ведет себя подобно системе хаотически ориентированных мелких кристаллов («зерен»). В то же время вещество в этом состоянии обладает большой текучестью: вязкость ряда жидких кристаллов лишь не намного больше вязкости воды.

Как уже упоминалось выше (и подробно рассматривается во всех общих курсах физики), для кристаллического твердого тела – монокристалла – характерно правильное геометрическое расположение молекул (атомов), периодически повторяющееся в пространстве на больших расстояниях (эта ситуация называется «дальним порядком») и обладающее различными элементами симметрии, которым соответствует «операции симметрии» (переводящие кристалл сам в себя). Например, если при отражении в какой-либо плоскости решетка переводится сама в себя, то говорят, что кристалл имеет «симметрию по отношению к отражению» в некоторой (одной или нескольких) плоскостях симметрии. Если при повороте вокруг некоторой оси на угол $2\pi/n$ ($n=2, 3, 4, 6$) кристалл также совмещается сам с собой, то говорят, что кристалл обладает «поворотной симметрией» относительно «оси симметрии» n -го порядка). Если кристалл переводится сам в себя при «преобразовании инверсии» относительно некоторой точки O , то эта точка называется «центром симметрии» кристалла. Существуют и некоторые другие элементы симметрии, на которых останавливаться не будем.

Реальную кристаллическую структуру можно представить как периодическую систему точек (узлов) – пространственную кристаллическую решетку, содержащую в каждом узле один или несколько атомов (молекул) – «базис». Для монокристалла характерна «симметрия по отношению к трансляции», это означает, что весь кристалл может быть получен повторением в трех пространственных направлениях одной и той же

минимальной совокупности узлов решетки – «элементарной ячейки», имеющей, вообще говоря, вид параллелепипеда с тремя различными сторонами и углами. Длины этих сторон – ребер элементарной ячейки – определяют основные периоды кристаллической решетки. Различные атомы (молекулы), входящие в состав базиса, образуют свои кристаллические решетки – решетки Браве, свойства симметрии которых в какой-либо мере определяют и симметрию всего кристалла, который можно представить себе как совокупность «вставленных» друг в друга решёток Браве. Их симметрия определяется геометрией элементарной ячейки. При этом сама элементарная ячейка может быть примитивной, т. е. содержать всего лишь 8 атомов в вершинах параллелепипеда, или же «сложной», т. е. содержать более 8 атомов. В частности, в «гранецентрированной» ячейке имеются еще атомы в центрах всех граней, а в «объемно-центрированной» – один добавочный атом в центре параллелепипеда. Однако использование этих представлений элементарных ячеек является часто вопросом удобства. Можно показать, что соответствующим выбором ориентации элементарной ячейки ее всегда можно сделать «примитивной». Однако это не всегда удобно, поскольку «сложная» ячейка может обладать более высокой симметрией, что облегчает анализ физических свойств кристалла – см. ниже.

Вид элементарной ячейки Браве определяет тип симметрии кристаллической решетки, по которому кристалл относят к одной из 7 «кристаллических систем». Наиболее высокой симметрией обладает «кубическая» система; элементарная ячейка имеет вид куба, причем может быть «примитивной» гранецентрированной («г.ц.к.» – кристаллы) и объемно-центрированной («о.ц.к.» – кристаллы). Если выбрать элементарную ячейку так, чтобы она во всех случаях была примитивной, то получатся косоугольные параллелепипеды, которые не будут обладать реальными свойствами симметрии, присущими этим кристаллам. Элементарная ячейка «ромбоэдрической» (или тригональной) системы (простая ячейка) получается деформацией растяжением кубической ячейки вдоль одной из ее диагоналей (образуется ромбоэдр с углами менее 90° и одинаковыми ребрами). Тетрагональная система характеризуется элементарной ячейкой (примитивной или объемно-центрированной) в виде прямой призмы с квадратом в основании. Кроме этих систем, существуют также ромбическая, моноклинная и триклинная системы, характеризующиеся переходом элементарной ячейки к наклонной косоугольной призме, обладающей наинизшей симметрией. К этим системам присоединяется еще «гексагональная» система, элементарная ячейка которой представляет собой шестиугольную прямую призму (если атомы в ней упакованы наиболее плотным способом, то говорят о «г.ц.к.» – кристалле).

Сложные кристаллические решетки также обладают трансляционной симметрией, но их «точечная» симметрия (по отношению к поворотам и отражениям) может существенно отличаться от симметрий «примитивных» решеток Браве, образующих сложную решетку. Кроме того, при переходе к

сложным пространственным решеткам появляются некоторые дополнительные элементы симметрии (винтовые оси и плоскости – решетки определяют ее «пространственную группу»). Как доказал русский ученый Е. С. Федоров (1890 г.), принципиально могут существовать кристаллы, относящиеся к 230 пространственным группам. Однако не ясно, все ли они могут реализоваться в природе; в минералогических исследованиях пока не обнаружено ни одного кристалла для 53 групп Федорова.

Основным свойством монокристалла является анизотропия его физических свойств, т. е. их зависимость от направления в кристалле. Неизбежность анизотропии легко продемонстрировать, например, на сопротивлении кристалла сдвигу. Нетрудно показать, что наиболее легко «сдвинуть» одну часть кристалла относительно другой в направлениях, параллельных плоскостям с наиболее плотной упаковкой атомов. Действительно, между такими плоскостями расстояния больше, чем между атомами в самих плоскостях, и силы сцепления между ними естественно, также меньше, что облегчает относительный «сдвиг» этих плоскостей. Аналогичные соображения часто оказывается возможным применить и для других физических свойств кристаллов.

Многие реальные кристаллические материалы, например, стали, чугун и др., имеют «поликристаллическую» структуру, т. е. состоят из множества мельчайших кристаллитов и «зерен» (маленьких монокристаллов), имеющих хаотическую взаимную ориентацию и связанных друг с другом молекулярными силами.

Хотя свойства таких материалов в значительной мере определяются свойствами монокристаллов, однако они, очевидно, являются изотропными, поскольку никаких выделенных направлений в таком материале нет.

В зависимости от того, какие именно частицы – молекулы, атомы или ионы – и от химической природы, различают 5 основных типов связи, в кристаллах. Если в узлах решетки находятся нейтральные атомы, связанные направленными валентными связями, то кристалл относится к «атомному типу». Ковалентная связь является весьма прочной: для ее разрушения (путем плавления) обычно приходится затратить более 200 ккал/моль тепловой энергии. Электроны атомов таких кристаллов «локализованы» в основном вдоль линий валентных связей. Эти особенности структуры обуславливают все основные физические свойства атомных кристаллов: твердость, хрупкость, низкую электропроводность, оптическую прозрачность и т. д. К ним относится, например, углерод (алмаз) и др. В узлах «ионных» кристаллов располагаются поочередно положительные и отрицательные ионы; типичным представлением являются соли типа $NaCl$, $CaCl$, CaF_2 и т. п. Энергия связи этих кристаллов также порядка 200 ккал/моль; их свойства во многом сходны со свойствами атомных кристаллов. Однако наличие заряженных, частиц в узлах решетки обуславливает и существенные особенности ионных кристаллов – наличие заметной электрической проводимости ионного типа, наличие оптических «центров окраски» и др. В

«металлических» кристаллах (металлах) в узлах решетки находятся положительные ионы; электроны (из внешних оболочек) освобождаются из своих атомов и образуют «электронный газ», обволакивающий ионный «остов» металла. Наличие «свободных» электронов обуславливает основные характерные свойства металлов: высокую электропроводность, теплопроводность, «металлический блеск», прочность, пластичность и др. Газы и жидкости при определенных условиях могут переходить в кристаллическое состояние. Так, например, кристаллическая вода – лёд – является кристаллом с водородными связями. Этот тип связи возникает между атомом водорода, ковалентно связанным с другим атомом (например, кислорода), и третьим атомом, который еще не использовал все свои электроны для образования химической связи. К таким кристаллам относятся, кроме льда, многие органические и неорганические вещества – метиловый спирт, этиловый спирт, циан, аммиак и др. В них энергия сцепления кристалла обычно составляет от 5 до 8 ккал/моль. Эти кристаллы плавятся при сравнительно низких температурах, обычно в высокой степени прозрачны, обладают низкой твердостью и электропроводностью. Наконец, некоторые вещества – углекислота, кислород, азот – в твердом состоянии образуют «молекулярные кристаллы», в узлах которых находятся нейтральные молекулы, связанные слабыми короткодействующими силами Ван-дер-Ваальса (см. п. 8.2). Естественно, что такие кристаллы обладают низкой энергией связи (обычно до 2 ккал/моль) и потому плавятся уже при очень низких температурах (десятки кельвинов).

Физические свойства кристаллов в значительной степени определяются наличием в них различных дефектов – нарушений правильного, упорядоченного расположения атомов. Эти дефекты бывают «объемными» (например, крупные пустоты – «поры»), «плоскими» (граница между зернами, поверхность, ограничивающая кристалл и др.), «линейными» (дислокации, о которых шла речь в гл. 3) и «точечными» (вакантные узлы решетки – дефекты по Шотки или «вакансии», смещения атомов в междоузлиях – дефекты по Френкелю, а также атомы примесных веществ). К дефектам относятся также тепловые колебания решетки, распространение которых в кристаллах представляет как движение особых частиц – «фононов» (см. т. III), избыточные электроны или недостающие электроны – «дырки» – на линиях валентных связей и т. д. Эти разнообразные дефекты возникают как в процессе выращивания кристалла, так и впоследствии в результате какого-либо внешнего воздействия. Обычно монокристалл выращивают из расплава, помещая в него небольшой кристаллик – «затравку», служащий зародышем (центром) кристаллизации, создавая некоторое «переохлаждение» (для непрерывного хода кристаллизации необходима более низкая температура по сравнению с точкой плавления) и медленно «вытягивая» кристалл из расплава по мере его роста. Этот процесс длителен, что обуславливает большую вероятность попадания в кристалл в процессе роста посторонних частиц, пузырьков газа, кристалликов других

веществ. С другой стороны, образование дефектов неизбежно обуславливается упомянутыми выше тепловыми колебаниями решетки, которые существуют при любой температуре выше абсолютного нуля. Поэтому даже при отсутствии всех внешних воздействий и «врожденных» дефектов в любом кристалле при заданной температуре всегда имеется некоторая «равновесная» концентрация дефектов, (например, вакансий). Вблизи температуры плавления эти дефекты достигают 1-2% общего числа атомов.

Наличие дефектов оказывает значительное влияние на механические свойства кристаллов, в частности, на их пределы текучести и прочности, электрические, тепловые и магнитные свойства (т. е. электропроводность, магнитную проницаемость, теплопроводность, оптические спектры поглощения и люминесценций) и т. д. Поэтому большое значение для техники и научных исследований имеет возможность управления физическими свойствами кристаллов путем целенаправленного введения в них дефектов определенного типа в известной концентрации. Особое значение этот прием имеет в современной полупроводниковой технике: введение примесей в полупроводники в ничтожных количествах (10^{-6} и меньше) позволяет увеличить их электропроводность в миллионы раз, причем создать нужный тип проводимости. Эти вопросы будут более подробно рассмотрены в т. II. Здесь мы коротко остановимся лишь на свойствах металлических сплавов – макроскопических однородных систем из 2 или более металлов (или неметаллов) с «металлическими» свойствами. Варьируя состав и методы получения и термообработки сплавов, можно получить весьма широкий спектр их механических, электрических и магнитных свойств.

Ряд свойств сплавов относят к «структурно-нечувствительным», т. е. определяемым, прежде всего, составом сплава: модуль упругости, плотность, температуру плавления, термоэлектродвижущую силу и др. Эти параметры обладают тем свойством, что их изменение приблизительно пропорционально концентрациям компонентов сплава. Это позволяет управлять ими путем легирования материала, т. е. введения небольших добавок определенных элементов (обычно это осуществляется путем растворения легирующих элементов в жидком металле). Легированием можно очень существенно изменить свойства основного материала, (например, прочность технического железа можно путем легирования повысить в десятки раз). Для легирования сталей используются хром, никель, молибден, кремний, вольфрам и др. элементы. Например, легирование вольфрамом быстрорежущих сталей обуславливает сохранение высокой твердости инструмента в процессе работы; введение алюминия в хромоникелевые сплавы приводит к повышению их прочности, и т. д. Управление «структурно-чувствительными» свойствами материалов (прочностью, пластичностью, магнитными свойствами и т. п., которые определяются, главным образом, особенностями кристаллической структуры

и наличием в ней дефектов, (например, дислокаций), осуществляется, в основном, посредством соответствующей термической и механической обработки. Например, одним из основных способов упрочнения сплавов является термомеханическая обработка, в которой сочетаются пластическое деформирование и нагрев (при определенных температурах в течение заданного времени). Режимы обработки определяются для конкретных сплавов путем экспериментальных исследований. Например, для повышения прочности инструментальных и некоторых конструкционных сталей применяется «низкотемпературная» термомеханическая обработка – пластическое обжатие на 70-90% при 350-500°C; в других случаях применяются высокотемпературные режимы обработки. Для улучшения магнитных свойств сплавов типа магнико (Co-24%, Ni-14%, Al-5%, Cu-3%, Fe-51%), перминвар (Fe-30%, Na-45%, Co-25%) и других; применяются разнообразные методы термомагнитной обработки. Для магнито-мягких материалов (типа перминвара) эта обработка проводится с целью увеличения магнитной проницаемости и уменьшения коэрцитивной силы, т. е. сужения петли магнитного гистерезиса (подробнее см. т. II). Обработка осуществляется при определенной температуре (ниже точки Кюри, при которой ферромагнитные свойства исчезают) в присутствии магнитного поля известной напряженности в течение заданного времени. Термомагнитная обработка высококоэрцитивных сплавов (типа магнико) осуществляется с целью увеличения остаточной индукции и коэрцитивной силы, т. е. расширения петли магнитного гистерезиса (приближения ее формы к прямоугольной). В настоящее время накоплен огромный экспериментальный материал, позволяющий выбрать рациональный режим механической, термической и магнитной обработки с целью получения сплавов (как металлических типа сталей, так и неметаллических – типа стекол) с необходимыми физическими и технологическими свойствами.

ГЛАВА 9 ТЕПЛО- И МАССООБМЕН

9.1 Теплообмен в природе и технике

Согласно 2-му началу термодинамики, перенос тепла осуществляется самопроизвольно от тел с более высокой к телам с более низкой температурой, т. е. при наличии неравномерного температурного поля. Поскольку любой механический, электромагнитный и т. п. процесс является диссипативным, т. е. сопровождается частичным превращением в тепловую энергию энергии других видов, то неравномерность распределения температуры является универсальным явлением природы. В космических масштабах протекание термоядерных реакций, явление гравитационного коллапса и др. сопровождаются возникновением гигантских «горячих точек» Вселенной – звезд и целых галактик, отдающих во Вселенную огромное количество тепловой энергии с излучением. Теплообмен в Солнечной системе определяет природные условия на планетах и, в частности, является источником жизни на Земле. В земной атмосфере также разыгрываются крупномасштабные процессы теплообмена, как в горизонтальном, так и в вертикальном направлениях, что обусловлено неравномерностью температуры различных слоев атмосферы. Процессы теплообмена протекают в глубинных слоях воды и рек, морей и океанов; в частности, теплые и холодные течения в океанах переносят гигантские массы воды на тысячи километров, и одновременно с этим огромные количества теплоты. Теплообмен имеет место и в глубинных слоях почвы, причем его характер и интенсивность протекания зависит от времени суток и времени года. В суточный теплообмен вовлекаются слои почвы до глубины, порядка 1 м, а в годовой теплообмен – до 20 м.

Процессы теплообмена чрезвычайно распространены в технике. При этом в одних случаях они лежат в основе технологических процессов, а в других – непременно сопровождают различные (механические или электромагнитные) явления из-за диссипации энергии. В теплообменниках различных типов осуществляется регулируемая теплопередача от одного теплоносителя к другому. В котлоагрегатах теплообмен имеет место между продуктами сгорания топлива и водой. Они используются для снабжения паром и горячей водой промышленных и отопительных котельных, для подачи пара на турбины тепловых электростанций и других целей. Теплообмен осуществляется в топливной камере, где происходит сгорание топлива и частичное охлаждение продуктов сгорания в результате передачи тепла от нагретых газов к трубам, по которым циркулирует вода. Далее горячие газы с температурой около 1000°C проходят через трубчатые пароперегреватели, водяной экономайзер и воздухоподогреватель, охлаждаясь в конце концов до $130\text{--}170^{\circ}\text{C}$ в результате процессов теплообмена от газов к воде и воздуху.

В рекуперативных теплообменниках (рекуператорах) теплообмен происходит между двумя движущимися теплоносителями с различными температурами через твердую стенку. Они используются, в качестве подогревателей воды и газа (воздуха), испарителей, конденсаторов и т. п. Трассы потоков теплоносителей (в виде стационарных каналов) в рекуператорах не изменяются. В отличие от них, в регенераторах передача осуществляется путем поочередного контакта теплоносителей (горячего и холодного) с одними и теми же поверхностями теплового аппарата. Например, регенератор с периодическими переключениями теплоносителей содержит несколько камер, в которые поочередно поступают горячие газы и нагреваемый воздух (или газообразное топливо). Типичный пример применения регенераторов – в качестве воздухонагревателей доменных печей (кауперы). В некоторых теплообменниках используется 1 теплоноситель. Так, в ядерных реакторах теплообмен (отвод тепла из активной зоны) осуществляется обычно с помощью жидкометаллических теплоносителей. В некоторых случаях имеет место непосредственный тепловой контакт различных теплоносителей; например, в градирнях происходит охлаждение воды атмосферным воздухом. Градирни применяются обычно в системах оборотного водоснабжения предприятий для охлаждения воды, отводящей тепло от различных тепловых аппаратов (теплообменников), компрессоров и т. д. Охлаждение является результатом интенсивного испарения воды, стекающей по специальному устройству – оросителю в виде пленок или капель под действием собственного веса; испарение 1% воды приводит к понижению температуры ее массы на 6°C . Теплообменники указанных (и ряда других) типов широко используются в теплоэнергетике, в химической и пищевой промышленности и т. д. Соответствующие технологические процессы и аппаратура для их осуществления описаны в специальной литературе (некоторые из которых указаны в списке литературы в конце тома). Здесь будут приведены лишь некоторые примеры.

Специфические процессы теплообмена получили специальные названия, используемые в технике. Так, теплообмен между поверхностью твердого тела и контактирующим с ней жидким или газообразным теплоносителем обычно называется теплоотдачей. Она может иметь место при свободном или вынужденном движении теплоносителя или при изменении его агрегатного состояния (например, испарении). Обычно принимается закон теплоотдачи Ньютона, согласно которому удельный тепловой поток, т. е. количество теплоты, отдаваемой единицей площади твердой поверхности теплоносителю (q), пропорционален разности температур между твердой поверхностью и средой (ΔT):

$$q = \alpha \Delta T. \quad (9.1)$$

Величина α называется коэффициентом теплоотдачи и зависит от целого ряда факторов – природы теплоносителя и материала теплоотдающей

поверхности ее геометрии, а также от скорости движения теплоносителя и самой разности температур ΔT . Обычно величину α определяют экспериментальным путем, например, в интервале температур до 100°C коэффициент теплоотдачи от металлических поверхностей к воздуху составляет обычно порядка 10 Вт/м². Теоретическая оценка α связана с механизмом теплоотдачи и обычно вызывает весьма значительные трудности, присущие, в общем, всей теории теплового пограничного слоя (см. ниже).

Теплоотдача может рассматриваться как часть более сложного процесса теплопередачи, т. е. теплообмена между двумя (жидкими или газообразными) теплоносителями через твердую стенку или поверхность раздела. Схема этого процесса и методика расчета будут рассмотрены ниже.

По физическому механизму, лежащему в основе переноса тепла, различают следующие основные виды теплообмена: теплопроводность, конвекция и лучистый теплообмен (как правило, на практике присутствуют все эти виды одновременно). Теплопроводность отличается от других видов теплообмена атомно-молекулярным характером переноса тепловой энергии, т.е. обменом энергией между атомами (молекулами) вещества. В газах теплопроводность представляет собой вероятностный процесс попадания молекул с большей энергией в слои газа с меньшей средней энергией, в результате чего эта энергия (т.е. температура слоя) возрастает. В жидкостях и твердых телах теплопроводность обусловлена взаимодействием близко расположенных атомов (молекул) и поэтому подчиняется существенно иным закономерностям, чем теплопроводность газов. В частности, теплопроводность жидкостей с повышением температуры уменьшается в связи с увеличением среднего расстояния между молекулами и ослаблением их взаимодействия, в то время как теплопроводность газов при этом возрастает. Теплопроводность твердых тел подчиняется квантово-механическим закономерностям, которые будут более подробно рассмотрены в т. II курса.

Конвекция (конвективный теплообмен) отличается от теплопроводности наличием массообмена, т. е. движением среды с различной температурой относительно теплоотдающей поверхности. Это движение может вызываться, например, подъемной силой, обусловленной наличием градиента плотности при неоднородности распределения температуры в среде; в этом случае говорят о «естественной» конвекции. Если движение жидкости или газа вблизи от теплоотдающей поверхности вызывается внешними силами, например, градиентом давления, то говорят о «вынужденной» конвекции.

Теоретическое рассмотрение конвекции основано на исследовании температурного поля в граничащей с теплоотдающей поверхностью среде. Уравнение баланса энергии для движущейся однородной жидкости плотностью ρ (с учетом сжимаемости) в общем виде:

$$\rho C_p \frac{DT}{d\tau} = \Phi - \frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_P \frac{\partial P}{\partial \tau} - \text{div} q, \quad (9.2)$$

где T и P – температура и давление текущей жидкости, соответственно, $\frac{D}{d\tau}$ – субстанциальная производная (температуры и давления), равная $\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \sum_{i=1}^3 \omega_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)$ (x_i – декартовы координаты, ω_i – проекции скоростей в этой системе координат), $q = -\lambda \text{grad} T$ – удельный тепловой поток (λ – коэффициент теплопроводности жидкости или газа), Φ – диссипативная функция, учитывающая переход механической энергии течения жидкости (газа) в тепловую, которая определяется выражением вида:

$$\Phi = A\mu \left\{ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left[2 \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} \right)^2 \right] - \frac{2}{3} (\text{div} \vec{W})^2 \right\}, \quad (9.3)$$

где μ – вязкость жидкости (газа), $A = 1/427$ Ккал/кГм – тепловой эквивалент механической энергии. Если распределение скорости и давления в жидкости уже найдено путем уравнений гидродинамики, то уравнение (9.2) может быть решено и получено распределением температуры вблизи теплоотдающей поверхности.

В отличие от обоих указанных видов теплообмена, лучистый теплообмен может осуществляться и при отсутствии промежуточной среды (т.е. в вакууме) за счет испускания, распространения, отражения, поглощения и пропускания лучистой энергии (энергии теплового излучения). Феноменологическая теория лучистого теплообмена основана на законе сохранения энергии, законе независимости световых пучков от разных источников (т.е. возможности арифметического сложения лучистых потоков от разных источников) и законов равновесного излучения. Расчеты лучистого теплообмена обычно проводятся на основе закона Стефана-Больцмана для «серых» тел (см. ниже).

Как уже указывалось выше, на практике эти виды теплообмена оказываются неразрывно связанными друг с другом. Рассмотрим, например, простейший случай конвективного теплообмена твердой поверхности с окружающей средой (жидкостью или газом). Опыт и теория показывают, что температура среды быстро изменяется от твердой поверхности до удаленных от нее точек среды. Это изменение сосредоточено в пределах тонкого теплового «пограничного слоя» (толщиной порядка долей мм), в пределах которого теплоотдача осуществляется механизмом теплопроводности, а за этими пределами имеет место собственно конвекция. Кроме того, при различии температур между теплоотдающей поверхностью и окружающей средой всегда имеет место лучистый (радиационный) теплообмен между ними (см. выше).

Таким образом, все перечисленные виды теплообмена находятся в неразрывной связи друг с другом, и их разделение носит в значительной мере условный характер. Закон теплообмена Ньютона для отдаваемого телом количества тепла имеет вид

$$dQ = \alpha F(T - T_1)d\tau, \quad (9.4)$$

где T и F – температура и площадь теплоотдающей поверхности, соответственно, T_0 – температура окружающей среды, α – коэффициент теплоотдачи, учитывающий в себе все перечисленные виды теплообмена и, вообще говоря, зависящий от $(T - T_0)$. Если $dQ \sim d\tau$ зависит только от $T - T_0$, то, полагая $q = \frac{dQ}{F d\tau}$, можно написать:

$$q = \alpha(T - T_0). \quad (9.5)$$

Это простое соотношение является, по существу, основой аналитической теории конвективного теплообмена.

В качестве примера учета различных механизмов рассмотрим теплопередачу, т. е. стационарный теплообмен между теплоносителями через разделяющую их твердую перегородку (плоскую стенку) толщиной δ . На рис. 9.1 схематически показано распределение температуры в направлении X ,

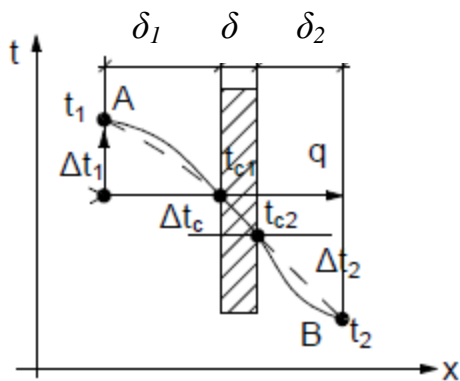


Рис. 9.1

перпендикулярном к стенке. В некоторой характерной точке A температура первого теплоносителя равна некоторому усредненному для него значению \bar{T}_1 , на граничащей с ним поверхности стенки температура равна T_{C1} . Тогда удельный тепловой поток от первого теплоносителя к стенке, согласно закону Ньютона (9.5), равен:

$$q = \alpha_1(\bar{T}_1 - T_2) = \alpha_1 \Delta T. \quad (9.6)$$

где коэффициент теплопроводности α_1 определяется, главным образом, конвективным и отчасти лучистым теплообменом между теплоносителем и стенкой. Далее тот же тепловой поток q (мы рассматриваем стационарный случай, при котором распределение температуры является установившимся, поэтому величина q во всех точках одинакова) передается через твердую стенку механизмом теплопроводности, которая количественно описывается законом Фурье (см. ниже, п. 9.4):

$$q = -\lambda \frac{\Delta T}{\Delta x} = -\lambda \frac{T_{C2} - T_{C1}}{\delta} = \frac{\lambda}{\delta} \Delta T_C, \quad (9.7)$$

где λ – коэффициент теплопроводности материала стенки; $\frac{\Delta T}{\Delta x}$ – градиент температуры внутри стенки, величина $\Delta T_C = T_{C1} - T_{C2}$ характеризует «температурный напор» в стенке. Наконец, на третьем участке теплообмена имеет место теплоотдача от поверхности стенки ко второму теплоносителю, также преимущественно путем конвективного и, отчасти, лучистого теплообмена. Закон Ньютона записывается теперь в виде:

$$q = \alpha_2(T_{C2} - \bar{T}_D) = \alpha_2 \Delta T_2. \quad (9.8)$$

Ввиду указанного выше стационарного характера теплообмена $q = \text{const}$, поэтому

$$q = \alpha_1 \Delta T_1 = \frac{\lambda}{\delta} \Delta T_c = \alpha_2 \Delta T_2. \quad (9.9)$$

Выражая отсюда ΔT_1 , ΔT_c и ΔT_2 через q и находя их сумму, получим общий тепловой напор:

$$\Delta T = \Delta T_1 + \Delta T_c + \Delta T_2 = q \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right) = qR. \quad (9.10)$$

Выражение (9.10) имеет формальное сходство с законом Ома для постоянного электрического тока $U=iR$: величина ΔT играет роль «напряжения», т. е. движущей силы для теплового потока («тока»). Поэтому величина

$$R = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \quad (9.11)$$

получила название «термического сопротивления». В данном случае оно состоит из трех слагаемых:

$$R = R_1 + R_c + R_2, \quad (9.12)$$

характеризующих «частные» термические сопротивления отдельных участков теплопередачи. Величины $R_1 = 1/\alpha_1$, $R_2 = 1/\alpha_2$ называют

«внутренними», а величину $R_c = \frac{\delta}{\lambda}$ – «внешним» термическим сопротивлением. Удобство величины R состоит в ее аддитивности, т. е. возможности сложения сопротивлений (или обратных им величин) отдельных участков, по аналогии с последовательным (или параллельным) соединением электрических проводников. Например, если разделяющая стенка состоит из n слоев из различных материалов, то

$$R_c = \sum_{i=1}^n R_{ci} = \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}. \quad (9.13)$$

Введем теперь величины:

$$\delta_1 = \frac{\lambda}{\alpha_1}, \quad \delta_2 = \frac{\lambda}{\alpha_2}. \quad (9.14)$$

Они характеризуют толщину «переходных» слоев на рис. 9.1, в пределах которых осуществляется переход от температуры теплоносителей к температуре поверхности стенки. Выражение (9.11) теперь можно переписать в виде:

$$R = \frac{\delta_1}{\lambda} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{\delta_2}{\lambda} = \frac{\delta_3}{\lambda}, \quad (9.15)$$

где величина δ_3 характеризует толщину «эквивалентной» стенки. Величина $\frac{\lambda}{\delta}$ характеризует «тепловую проводимость» стенки. Отношение коэффициента теплоотдачи α к тепловой проводимости $\frac{\lambda}{\delta}$ называется критерием (или числом) Био:

$$Bi = \frac{\alpha \delta}{\lambda}. \quad (9.16)$$

Эта величина широко используется при решении многих тепловых задач и является одним из важнейших критериев «теплового подобия» (см. ниже, п. 9.2).

Определение коэффициентов теплоотдачи α_1 , α_2 обычно осуществляется экспериментальным путем, поскольку теоретическая оценка этой величины затруднена наличием множества факторов влияния. К ним относятся, в частности, режим течения теплоносителя (при вынужденной конвекции), характер свободной конвекции, всегда имеющей место в реальных условиях, физические свойства теплоносителей, определяющие размеры системы, определяющая температура среды и т. п. Некоторые способы приближенной оценки коэффициентов теплоотдачи будут указаны ниже.

Одновременное проявление всех указанных выше основных видов теплообмена является типичным во всех реальных условиях. Например, уже упоминавшийся теплообмен в атмосфере Земли осуществляется, главным образом, следующими механизмами: конвекцией и адвекцией, т. е. вертикальным и горизонтальным переносом масс воздуха (мы видим здесь характерный пример процессов теплообмена, которые будут рассмотрены ниже в п. 9.5), и лучистым теплообменом, обусловленным поглощением и излучением (длинноволновой) радиации – водяным паром, углекислым газом и другими газами и аэрозолями, всегда содержащимися в земной атмосфере. Именно этим механизмом осуществляется в конечном счете теплоотдача от Земли в Космос (в среднем за сутки отдается количество тепла 1670 Дж/см^2). Кроме того, определенный вклад в теплообмен вносит выделение и поглощение тепла вследствие испарения воды и конденсации водяного пара особенно в тропических и экваториальных широтах, а также (в значительной мере) перенос тепла механизмом молекулярной теплопроводности; малый вклад последнего процесса обусловлен сравнительно невысокими значениями коэффициента теплопроводности газов. Теплообмен в морях и океанах осуществляется, главным образом, конвективным перемешиванием слоев воды в вертикальном направлении и горизонтальным перемешиванием масс воды океанскими течениями (внутренний теплообмен). При этом направление теплового потока претерпевает сезонные изменения: осенью и зимой поток тепла направлен снизу вверх (охлаждение), а весной и летом – сверху вниз (нагревание). В теплообмен между поверхностью моря и атмосферой (внешний теплообмен), помимо конвекции, вносит вклад и лучистый теплообмен.

Терморегуляция организма человека (и животных) осуществляется за счет теплоотдачи в окружающую среду путем излучения, испарений и конвекции. Например, у человека в условиях «теплового комфорта» (оптимальных для его жизнедеятельности) примерно 50 % всей теплопродукции организма отдается во внешнюю среду механизмом лучистого теплообмена, 25% – вследствие тепловыведения при испарении воды с поверхности кожи (и слизистых оболочек) и 25% – в результате процесса конвекции. В упоминавшихся выше теплотехнических устройствах – теплообменниках – теплопередача осуществляется в основном конвекцией и теплопроводностью, как было описано выше, но значительный вклад

может вносить и лучистый теплообмен, если хотя бы одним из теплоносителей является сильно излучающий газ. Аналогичным образом обстоит дело и во всех других реальных тепловых процессах.

Детальный учет всех протекающих одновременно процессов теплообмена (осложняющихся еще и массообменом – переносом вещества, как уже упоминалось выше) представляет исключительные трудности. Поэтому при решении инженерных задач обычно какой-либо из механизмов теплообмена считается преобладающим, а влиянием остальных механизмов пренебрегают. Так, при обтекании жидкостью нагретой пластины вклад конвекции в теплоотдачу является подавляющим по отношению ко всем другим процессам даже при сравнительно небольших скоростях потока. Напротив, перенос тепла в твердых материалах осуществляется практически исключительно за счет теплопроводности, поскольку конвекционные потоки отсутствуют из-за «жесткости» структуры, а лучистый теплообмен практически невозможен из-за сильного поглощения электромагнитного излучения в материалах (особенно, в металлах). Наконец, теплообмен между космическими объектами, например, между Солнцем и планетами, осуществляется исключительно «лучистым» способом; преобладание этого механизма теплообмена имеет место и во многих технологических процессах, например, в установках для инфракрасной сушки, см. т. III. Поэтому ниже мы рассмотрим способы количественного описания теплообмена в условиях, когда можно выделить преобладающий механизм, а другими видами теплообмена пренебречь; учет процессов массообмена будет кратко рассмотрен в п. 9.5.

9.2 Конвективный теплообмен

Конвективным теплообменом называют теплообмен между жидкостью или газом и поверхностью твердого тела путем конвекции, т. е. переноса тепла при пространственном перемещении слоев газа или жидкости. Этот вид теплопередачи чрезвычайно широко распространен в природе и имеет место во многих производственных процессах. Укажем некоторые примеры. Конвективные потоки в атмосфере вызывают многочисленные крупномасштабные явления, рассматриваемые в специальной литературе. Жидкометаллические теплоносители, проходя через активную зону ядерного реактора, обеспечивают теплосъем и вывод ядерной энергии из реактора. В различных типах реактивных двигателей конвекция обеспечивает необходимое охлаждение проточной части двигателя, причем надежность системы охлаждения в основном определяет и надежность работы двигателя в целом. Ввиду огромной практической важности этих вопросов явления, связанные с конвективным теплообменом, уже давно стали предметом тщательного изучения как теоретическими, так и экспериментальными методами. При этом сразу обнаружились большая внутренняя сложность этих явлений и многообразие процессов (механических, тепловых и других

протекающих вблизи границы твердого тела с движущейся жидкостью или газом). Поэтому конвективный теплообмен в настоящее время нельзя считать достаточно изученным с физической точки зрения; в ряде приложений по-прежнему используются полуэмпирические методы его описания.

Если жидкость находится в поле неоднородных внешних массовых сил (например, гравитационном поле Земли), то конвективный теплообмен носит характер естественной (или свободной) конвекции. Свободные или естественные конвективные течения возникают под действием разности плотностей, обусловленной неоднородностью температурного поля в жидкости или газе. При неоднородном распределении плотности действие силы тяжести, вообще говоря, не уравнивается силой Архимеда, и возникает подъемная сила, под действием которой более горячие слои поднимаются вверх, и их место у нагретой твердой поверхности занимают более холодные слои, которые, в свою очередь, начинают нагреваться и процесс повторяется. Как и всякий процесс теплопередачи, в результате свободной конвекции возникает тенденция к выравниванию температуры в жидкости или газе. Если же жидкость находится под действием внешних сил, приложенных на ее границе, или же массовых сил, приложенных внутри жидкости, то возникает вынужденная конвекция. При этом влияние внешних массовых сил может стать пренебрежимо малым, так что характер вынужденной конвекции может быть существенно иным, чем свободной конвекции.

Рассмотрим подробнее основные закономерности теплообмена при естественной конвекции, возникающей, например, вблизи вертикально поставленной нагретой пластины или горизонтально расположенного цилиндра или тела иной формы. Свободное движение слоев газа (или жидкости) возникает под действием подъемной силы, зависящей от разности температур между нагретым телом и тазом. Изменение плотности, связанное с различием температур, приближенно записывается как

$$\rho - \rho_0 = -\beta \rho (T - T_0), \quad (9.17)$$

где $\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P$ – коэффициент объемного расширения газа (или жидкости). Это создает подъемную силу, равную $(\rho - \rho_0)g$ (в ед. объема). Под действием этой силы возникает перемещение слоев газа, которое можно описать обычными уравнениями течения вязкой сплошной среды с учетом подъемной силы.

При описании явлений, связанных с обтеканием жидкостью или газом твердых поверхностей, широко используется теория «пограничного слоя», понятие о котором ввел Л. Прандтль в 1904 г. В простейшем случае уравнения движения сжимаемой жидкости в плоском стационарном пограничном слое имеют вид:

$$\rho \left(\omega_x \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial \omega_x}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \omega_x}{\partial y} \right) \quad (9.18)$$

с граничными условиями:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}(\rho\omega_x) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho\omega_y) = 0, \\ \omega_x(y=0) = \omega_y(y=0) = 0, \quad \omega_x(y=\delta) = \omega_0 = 0. \quad (9.19)$$

Здесь координата x направлена вдоль, y – перпендикулярно к обтекаемой поверхности, от координаты z все величины не зависят (плоский слой), ω_x, ω_y – компоненты скорости жидкости, P – давление в жидкости, ρ – плотность, μ – коэффициент вязкости жидкости, δ – толщина пограничного слоя. Условия (9.19) означают, что прилегающий непосредственно к твердой поверхности слой жидкости считается «прилипшим», т.е. неподвижным, а за пределами пограничного слоя скорость жидкости в направлении оси x всюду одинаковой (стационарной). Наряду с «динамическим» пограничным слоем, уравнением которого является (9.18) вводится «тепловой» пограничный слой с толщиной δ_T . Порядок отношения толщин определяется формулой:

$$\frac{\delta_T}{\delta} \sim \frac{1}{\sqrt{P_r}}, \quad P_r = \frac{\mu C_p}{\lambda} = \frac{\nu}{a}, \quad (9.20)$$

где P_r – критерий Прандтля, C_p и λ – удельная теплоемкость (при постоянном давлении) и теплопроводность, соответственно, ν – коэффициент кинематической вязкости, $\nu = \mu/\rho$, a – коэффициент температуропроводности. Уравнение энергии для плоского пограничного слоя имеет вид:

$$\rho \left[\omega_x \frac{\partial}{\partial x}(C_p T) + \omega_y \frac{\partial}{\partial y}(C_p T) \right] - \omega_x \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial y} \right)^2. \quad (9.21)$$

В сочетании с уравнением состояния и зависимостями $\mu(T)$, $\lambda(T)$ и $C_p(T)$ приведенные уравнения образуют замкнутую систему, решение которой позволяет определить величины $\omega_x, \omega_y, P, \rho, T, \mu, \lambda, C_p$ и тем самым количественно описать массотеплообмен при обтекании поверхности потоком жидкости или газа. Точное решение этих уравнений представляет значительные математические трудности и может быть получено лишь для некоторых простых частных случаев. Поэтому широко используются приближенные методы, основанные на применении интегральных соотношений импульсов энергии и массы. Детальное изложение этих методов можно найти в специальной литературе; некоторые пособия указаны в списке в конце книги. Рассмотрим лишь некоторые результаты, полученные для естественной конвекции в условиях, представляющих практический интерес.

Для описания стационарной естественной конвекции в неограниченном пространстве вблизи вертикальной нагретой пластины используется система уравнений пограничного слоя в виде:

$$\begin{cases} \omega_x \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial \omega_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial y^2} + g\beta(T - T_{\text{ж}}) \\ \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} = 0 \\ \omega_x \frac{\partial T}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \end{cases}, \quad (9.22)$$

где $T_{ж}$ – температура жидкости (или газа), член $g\beta(T - T_{ж})$ учитывает подъемную силу, которая, согласно изложенному выше, является в данном случае движущей силой процесса конвекции.

Решение этой системы методами, описанными в специальной литературе, позволяет описать характер конвективного течения вблизи нагретой пластины и распределение температур в пограничном слое у поверхности пластины. Затем определяется количества тепла q , отдаваемого пластиной жидкости, в зависимости от координаты вдоль пластины x :

$$q = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_x. \quad (9.23)$$

Наконец, с помощью общего соотношения

$$q(x) = \alpha(x)(T_{п} - T_{ж}) \quad (9.24)$$

($T_{п}$ – температура поверхности пластины) можно вычислять и локальный коэффициент свободного конвективного теплообмена $\alpha(x)$. Результаты расчета обычно выражаются в критериальной форме, с выведением локальных значений критериев Нуссельта (N_{Ux}) и Грасгофа (G_{rx}):

$$N_{Ux} = \frac{\alpha(x)x}{\lambda}, \quad G_{rx} = g\beta x^3 (T_{п} - T_{ж})/\nu^2. \quad (9.25)$$

Результат решения может быть представлен в виде:

$$N_{Ux} = 0,359 G_{rx}^{1/4}. \quad (9.26)$$

Отсюда видно, что коэффициент теплоотдачи обратно пропорционален $x^{1/4}$, т. е. убывает в направлении движения среды. Толщина динамического и теплового пограничного слоя пропорциональна $x^{1/4}$. Выводы теории подтверждаются экспериментальными исследованиями, методика которых описана в специальной литературе. Полное количество теплоты, отдаваемое одной стороной пластины в окружающую среду:

$$Q = b \int_0^l q(x) dx = \frac{4}{5} 0,508 b l^{3/4} C \lambda (T_{п} - T_{ж}), \quad (9.27)$$

$$(C = \sqrt{g(T_{п} - T_{ж})/4\nu^2 T_{ж}}),$$

(b – ширина, l – длина пластины). Зная величину Q , можно определить усредненный (по пластине) коэффициент теплоотдачи:

$$\bar{\alpha} = \frac{Q}{bl(T_{п} - T_{ж})}, \quad (9.28)$$

а также среднее значение критерия Нуссельта $\bar{N}_U = \frac{\bar{\alpha} l}{\lambda}$. Соответственно, введя величину $G_{rx} = g\beta x^3 (T_{п} - T_{ж})/\nu^2$, можно вместо (9.26) получить уравнение для расчета теплоотдачи от пластины к окружающей среде:

$$\bar{N}_U = 0,478 G_{rx}^{1/4}. \quad (9.29)$$

Это решение относится к граничному условию I рода: $T_n = const$. При граничном условии 2 рода, когда на поверхность пластин задан постоянный тепловой поток

$$q = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_п = const. \quad (9.30)$$

Анализ показывает, что решение в этом случае мало отличается от приведенного выше (при $P_r=0,1\div 100$) расхождение составляет не более 1-2%.

При больших разностях $T_{\text{п}} - T_{\text{ж}}$ приходится учитывать зависимость теплофизических характеристик (μ , λ , C_p , ρ , β) жидкости или газа, обтекающего пластину, от температуры. Результаты проведенных многочисленных исследований с учетом этого обстоятельства показали, что влияние зависимости указанных параметров T с достаточной для инженерной практики точностью можно учесть, введя определяющую температуру $T^* = T_{\text{п}} - 0,38(T_{\text{п}} - T_{\text{ж}})$. При этом величина $\beta=1/T_{\text{ж}}$, а $P_r=0,7\div 1,0$. В зависимости от материала обтекающей жидкости (газа) были предложены и другие эмпирические формулы $N_U(G_r P_r)$.

Другим практически важным случаем является естественная конвекция при обтекании бесконечно длинного горизонтального цилиндра с диаметром d . В этом случае решение уравнений пограничного слоя дает:

$$N_{U_x} = 0,604 f(\varphi) \cdot G_{rx}^{1/4} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{1/4}, \quad (9.31)$$

где координата x отсчитывается вдоль контура цилиндра, функция $f(\varphi)$ зависит от угла φ , отсчитываемого от передней критической точки. Формула (9.31) относится к ламинарному течению жидкости (газа) и значению $P_r=0,73$. При $l=d$ и одинаковых числах Грасгофа средний коэффициент теплоотдачи для вертикальной пластины в 1,29 раза больше, чем для горизонтального цилиндра.

При свободной конвекции в ограниченном пространстве толщина теплового слоя становится сравнимой с размерами пространства. Эти условия реализуются в ряде областей техники – в задачах теплоизоляции трубопроводов и зданий, переноса тепла в отсеках и баках космических летательных аппаратов, в пористых средах и т. д. Особый практический интерес представляют случаи конвективного переноса тепла через щели или прослойки, заполненные жидкостью или газом. Теоретическое рассмотрение весьма сложных явлений конвективного теплообмена в этих случаях представляет значительные трудности, поэтому широкое применение нашли экспериментальные оптические методы визуализации течения жидкости или газа, основанные, в частности, на интерференции света или образовании теневого изображения теплового пограничного слоя. Этими методами было, в частности, продемонстрирована ячеистая («шестигранная») структура потока в горизонтальной щели, заполненной жидкостью или газом («ячейки Бенара»), причем в жидкости наблюдается движение вверх в центре ячейки и вниз на ее периферии, а в воздухе – обратная картина, что обусловлено различным характером зависимости вязкости от температуры для жидкостей и газов. В вертикальных слоях, ограниченных плоскими твердыми стенками, находящимися при различных температурах, имеет место циркуляционное течение жидкости или газа, причем вдоль более нагретой стенки имеет место восходящий, вдоль менее нагретой стенки – нисходящий поток. При больших скоростях потока на это основное течение накладываются вихревые течения,

что предшествует переходу к турбулентному режиму конвекции при больших числах Грасгофа (более 10^7). Во всех этих случаях количественное описание конвективной теплоотдачи обычно осуществляется на основе эмпирических критериальных соотношений вида $N_U(G_r)$ или $N_U(R_a)$, где $R_a = G_r P_r$ (критерий Рэлея), при ламинарных течениях, или $N_U(G_r P_r)$ – при наличии турбулентного течения.

Рассмотрим некоторые закономерности теплообмена при вынужденной конвекции. Этот процесс имеет место во множестве технических, главным образом теплообменных устройств (котлах, пароперегревателей, конденсаторах пара, тепловыделяющих элементах (ТВЭЛх) атомных реакторов и т. д.). В них обычно осуществляется течение жидкости или газа (теплоносителя) по цилиндрическим каналам. Втекающий в трубу поток имеет равномерное распределение скоростей и температур. По мере продвижения потока внутрь трубы, у ее стенок развиваются динамический и тепловой пограничные слои, толщина которых постепенно возрастает, и на определенном расстоянии от входа в трубу пограничный слой заполняет все ее проходное сечение. После этого весь объем жидкости принимает участие в теплообмене со стенками трубы, а профиль температуры в дальнейшем остается неизменным. В зависимости от режима течения пограничный слой может носить ламинарный, турбулентный или «смешанный характер»; при ламинарном течении установившейся профиль скорости жидкости в трубе является параболическим, а при турбулентном течении профиль является более равномерным вблизи центра трубы и круто спадающие к ее стенкам. Характер течения определяется значением числа Рейнольдса $Re = \omega \frac{d}{\nu}$ (d – диаметр трубы). При значениях Re меньше первого критического значения $Re_{кр1} \approx 2300$ (для изотермического течения в круглых трубах) течение является ламинарным, при Re больше второго критического значения $Re_{кр2} \approx 10^4$ течение является турбулентным, при $Re_{кр1} < Re < Re_{кр2}$ имеет место неустойчивое переходное течение. Критическое значение $Re_{кр}$ существенно зависит от формы трубы, в сходящихся каналах (конфузорах) величина $Re_{кр}$ больше, а в расширяющихся каналах (диффузорах) – меньше, чем в трубах. В изогнутых трубах величина $Re_{кр}$ может стать существенно больше, чем в прямых трубах, поскольку на участках изгиба возникает инерционная центробежная сила, способствующая стабилизации потока. Величина $Re_{кр}$ существенно зависит также от состояния внутренней поверхности трубы, (при наличии существенной шероховатости величина $Re_{кр}$ может заметно уменьшиться), а также от формы входа в трубу. При наличии интенсивного теплообмена между жидкостью и стенками трубы течение становится неизотермическим, что существенно влияет на характер профиля скоростей и температур и величины $Re_{кр}$.

При количественном описании вынужденного конвективного теплообмена в трубах используются аналитические методы, основанные на

решении соответствующих дифференциальных уравнений течения. Ввиду возникающих при этом серьезных принципиальных и чисто математических трудностей очень часто используются полуэмпирические методы описания путем соответствующей обработки экспериментальных данных и их представления в критериальной форме. Рассмотрим лишь некоторые результаты таких исследований; обширный накопленный до сих пор материал по этим вопросам можно найти в специальной литературе.

Аналитическое описание стационарного теплообмена (температурное поле не изменяется со временем) в цилиндрической трубе с постоянной температурой стенок (граничное условие первого рода), может быть получено в условиях, когда динамический пограничный слой заполняет все сечение трубы, течение является ламинарным, причем жидкость является не сжимаемой, и ее физические свойства не зависят от температуры. При этом профиль скорости течения является параболическим: $\omega = 2\bar{\omega} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)$, r_0 – радиус трубы, $\bar{\omega}$ – средняя (при заданном объемном расходе) скорость течения жидкости. Решение уравнения баланса энергии при допущении об отсутствии внутренних источников тепла в жидкости и диссипации энергии за счет трения было получено Нуссельтом; согласно этому решению, распределение температуры жидкости в потоке в указанных условиях определяется выражением:

$$\theta \equiv \frac{T - T_{\text{ст}}}{T_0 - T_{\text{ст}}} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \psi_n \left(\frac{r}{r_0}\right) \exp \left(-2\varepsilon_n^2 \frac{x}{P_e d}\right). \quad (9.32)$$

Здесь A_n и ε_n – собственные значения, табулированные в специальной литературе ($A_0 = 1,477, A_1 = -0,810, A_2 = 0,385$ и т. д.; $\varepsilon_0^2 = 7,314, \varepsilon_1^2 = 44,609, \varepsilon_2^2 = 113,921 \dots$); $(\psi_n \left(\frac{r}{r_0}\right))$ – табулированная функция, координата x – направленная вдоль оси трубы, величина $P_e = \frac{\omega d}{a}$ – критерий Пекле. Далее можно вычислить среднемассовую температуру жидкости $\bar{T} = \frac{1}{\pi r_0^2 \omega_0} \int_0^{r_0} t \omega^2 2\pi r dr$. Это дает:

$$\theta \equiv \frac{\bar{T} - T_{\text{ст}}}{T_0 - T_{\text{ст}}} = 8 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{\varepsilon_n^2} \exp \left(-2\varepsilon_n^2 \frac{x}{P_e d}\right), \quad (9.33)$$

где B_n – табулированные значения ($B_0=0,749; B_1=0,544; B_2=0,463$, и т. д.). Используя эти результаты, можно определить локальный коэффициент теплоотдачи в потоке $\alpha = q_{\text{ст}} / (T_{\text{ст}} - \bar{T}) = \frac{1}{\bar{T} - T_{\text{ст}}} \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=r_0}$ и соответствующее

число Нуссельта $N_U = \frac{\alpha d}{\lambda}$. Расчет приводит к следующему выражению:

$$N_U = \left[\sum_{n=0}^{\infty} B_n 2 \exp \left(-2\varepsilon_n^2 \frac{1}{P_e} \frac{x}{d}\right) \right] : \left[2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{\varepsilon_n^2} \exp \left(-2\varepsilon_n^2 \frac{1}{P_e} \frac{x}{d}\right) \right]. \quad (9.34)$$

Исследование этого решения приводит к ряду выводов, представляющих практический интерес. На (термическом) начальном участке трубы (до $\frac{P_e d}{x} \sim 1 - 10$) число Нуссельта уменьшается, и профиль температуры в жидкости изменяемого по длине трубы. При меньших

значениях $\frac{P_e d}{x}$ профиль температуры и число N_U устанавливаются неизменными (участок стабилизированного теплообмена). Длина начального участка оценивается по формуле $l_n \approx 0,055 P_e d$. Оценки показали, что для жидкометаллических теплоносителей $l_n/d > 1$, для газов $l_n/d > 10$ и для жидкостей $l_n/d \sim 10^3 - 10^4$. Отсюда, в частности, следует, что теплообмен при ламинарном течении жидкостей $P_r > 1$ в трубах теплообменных аппаратов осуществляется практически в области термического начального участка, что необходимо учитывать при практическом конструировании теплообменников. При $x \rightarrow \infty$, т. е. на достаточном удалении от входа в трубу, число Нуссельта стремится к постоянному значению $N_{U\infty} = \varepsilon_0^2/2 \approx 3,657$, что является количественной характеристикой стабилизированного теплообмена в рассматриваемых условиях.

Описанные выше результаты относились к случаю граничного условия 1 рода – постоянства температуры стенки трубы. В ряде практически важных случаев (электрообогрев, радиационный нагрев, нагрев в ядерных реакторах и противоточных теплообменниках) реализуется граничное условие 2 рода: постоянство теплового потока $q_{ст}$ у стенки трубы. В этом случае решение уравнения баланса энергии для жидкости приводит к следующим результатам: в области, удаленной от входного отверстия трубы, в которой установился профиль температуры с постоянным вдоль трубы коэффициентом теплоотдачи, выражение для профиля температуры $\theta = \frac{(T - T_0)}{q_{ст} \frac{d}{\lambda}}$ (T_0 – начальная температура жидкости на входе в трубу) имеет вид:

$$\theta = \frac{4}{P_e} \frac{x}{d} + \frac{1}{2} R^2 - \frac{1}{8} R^4 - \frac{7}{48} \quad (9.35)$$

($R = r/r_0$); температура стенки равна

$$\theta_{ст} = \theta(R = 1) = \frac{4}{P_e} \frac{x}{d} + \frac{11}{48}. \quad (9.36)$$

Наконец, число N_U в этой области сохраняет постоянное значение:

$$N_U = \frac{q_{ст} d}{(T_{ст} - \bar{T}) \lambda} = \frac{48}{11} \approx 4,36 \quad (9.37)$$

(\bar{T} – среднемассовая температура жидкости, см. выше). Для начального термического участка (нестабилизованного теплообмена в трубе) решение дает:

$$\theta = \frac{4}{P_e} \frac{x}{d} + \frac{1}{2} R^2 - \frac{1}{8} R^4 - \frac{7}{48} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \psi_n(R) \exp\left(-2\varepsilon_n^2 \frac{1}{P_e} \frac{x}{d}\right) \quad (9.38)$$

(смысл величин $A_n, \psi_n, \varepsilon_n^2$ был указан выше). Далее определяются значения температуры стенки $\theta_{ст} = \theta(R=1)$ и локальные значения числа N_U :

$$N_U = \frac{q_{ст} d}{(T_{ст} - \bar{T}) \lambda} = 1 \cdot \frac{11}{48} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \psi_n(1) \exp\left(-2\varepsilon_n^2 \frac{1}{P_e} \frac{x}{d}\right). \quad (9.39)$$

Длина начального участка стабилизация теплообмена

$$l_n = 0,07 P_e d. \quad (9.40)$$

Оказывается в этом случае на 27 % больше, чем в случае граничного условия 1 рода ($T_{\text{ст}} = \text{cost}$).

Аналогичными методами рассматривается теплообмен в трубах некруглого (прямоугольного и треугольного сечений). Расчетные значения числа N_U для этих случаев сведены в таблицы, имеющиеся в специальной литературе.

При турбулентном характере течения жидкости в трубах ($Re \geq 2000$) теоретическое рассмотрение конвективного теплообмена существенно усложняется ввиду интенсификации процессов тепломассобмена в радиальном направлении в трубе. Инженерные расчеты теплоотдачи в этих условиях обычно основываются на полуэмпирических выражениях для числа N_U , полученных на основе экспериментальных данных для определенных, ограниченных интервалов значений параметров потока (Pr , Re). Эти соотношения приводятся в многочисленной специальной литературе.

Значительный практический интерес представляет анализ закономерностей конвективного теплообмена при поперечном обтекании труб жидкостью или газом, имеющем место, в частности, в различных трубчатых теплообменных аппаратах, обычно выполняемых в виде пучков труб с различным относительным расположением их в пучке. Сложный характер теплообмена при обтекании жидкостей труб и взаимное их влияние друг на друга в пучке обуславливают большие трудности при теоретическом рассмотрении конвективного теплообмена. Поэтому, при проектировании теплообменных аппаратов с отдувом и обтеканием горизонтальных труб, обычно используются опытные данные по теплообмену, обработанные в критериальной форме ($N_U = f(Re Pr)$).

9.3 Радиационный теплообмен

Процесс радиационного теплообмена представляет собой обмен тепловой энергией между различными нагретыми телами путем переноса энергии электромагнитного (теплого) излучения. Тепловое излучение испускается нагретыми телами в соответствии с рядом общих законов, излучаемых в общем курсе физики. Напомним лишь некоторые основные понятия и закономерности. Оптическое излучение, попадающее на некоторое тело, частично отражается от него (относительная доля энергии отраженного излучения определяет отражательную способность или коэффициент отражения R), частично поглощается в нем (соответствующая доля энергии определяет поглощательную способности тела A) и частично проходит через тело (доля прошедшего излучения определяется пропускной способностью D). Твердые и жидкие тела интенсивно поглощают тепловое излучение (в тонком поверхностном слое, толщина которого для металлов – порядка 1 мкм, для других материалов – порядка 1 мм), которое, следовательно, создает в этих телах значительный тепловой эффект. При этом нагретые таким путем тела, сами становятся источниками теплового излучения и

между ними возникает радиационный теплообмен. Энергия излучения тела, в 1 времени, отнесенная к 1 площади поверхности тела и к единичному интервалу частот (или длин волн) излучения называется излучательной способностью тела E ; она зависит от рода материала, длины волны и температуры: $E=E(\lambda, T)$. Согласно основному закону Кирхгофа излучательная и поглощательная способности тела $E(\lambda, T)$ и $A(\lambda, T)$ прямо пропорциональны друг другу:

$$E(\lambda, T) = A(\lambda, T) \cdot \varepsilon(\lambda, T). \quad (9.41)$$

Функция $\varepsilon(\lambda, T)$ характеризует излучательную способность «абсолютно черного» тела, для которого $A(\lambda, T) \equiv 1$. Для так называемых «серых» тел величина A не зависит от длины волны и в этой случае называется «степенью черноты» тела. Таким образом, излучательная способность серого тела определяется по формуле

$$E(\lambda, T) = A \varepsilon(\lambda, T). \quad (9.42)$$

Функция $\varepsilon(\lambda, T)$ определяется по формуле Планка:

$$\varepsilon(\lambda, T) = (2he^2) : \lambda^5 \left[\exp\left(\frac{hc}{\lambda_{\text{КТ}} T}\right) - 1 \right], \quad (9.43)$$

где $h=6,6210^{-34}$ Дж, e – постоянная Планка, $c=3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме, $k=1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана. Из формулы (9.43) следует основные законы излучения абсолютно черного тела; наиболее важными из них являются закон Вина, согласно которому максимальная излучательная способность тела при некоторой определенной $\lambda_{\text{max}}(\varepsilon_{\text{max}})$ пропорциональна T^5 , закон смещения Вина, согласно которому величина λ_{max} обратно пропорциональна температуре тела ($\lambda_{\text{max}}(\text{мкм}) \approx 2900/T$ (К)), и закон Стефана-Больцмана, имеющий наибольшее значение для теории радиационного теплообмена. Согласно этому закону, интегральная интенсивность излучения (излучательная способность) $\varepsilon(T) = \int_0^\infty \varepsilon(\lambda, T) d\lambda$ абсолютно черного тела пропорциональна 4-й степени его температуры:

$$\varepsilon(T) = \sigma T^4, \quad (9.44)$$

где $\sigma=5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт (м²К⁴) – постоянная Стефана-Больцмана. Для «серого» тела со степенью черноты A можно написать:

$$\varepsilon_c(T) = A \sigma T^4 = c \left(\frac{T}{100} \right)^4, \quad (9.45)$$

где ε_c выражается в Вт/м², T – в К, тогда при $A=0 \div 1$ величина коэффициента излучения серого тела c находится в интервале $0 \div 5,67$.

Для конкретных расчетов радиационного теплообмена, помимо закона Стефана-Больцмана в форме (9.45), большое значение имеет также закон Ламберта, определяющий пространственное распределение энергии излучения от диффузно излучающего «косинусного» источника света. Согласно этому закону количество энергии излучения $d\varepsilon_\varphi$, переданной в направлении, образующем угол φ с нормалью к поверхности излучателя, в телесном угле $d\Omega$ пропорционально величина $\cos\varphi$:

$$d\varepsilon_\varphi = \varepsilon_n d\varphi \cos\varphi, \quad (9.46)$$

где ε_n – энергия излучения в единичной телесном угле в направлении нормали к поверхности излучателя ($\varphi=0$). Интегрирование по полусфере радиуса r (рис. 9.2) дает

$$\varepsilon = \pi \varepsilon_n, \quad (9.47)$$

откуда полная энергия излучения в полусферу определяется ε/π .

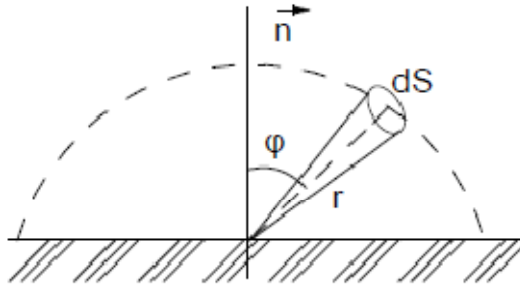


Рис. 9.2

Закон Ламберта точно выполняется лишь для абсолютно черного тела. Если степень черноты «серого» тела не зависит от φ , то закон Ламберта применим и к нему. На практике встречаются значительные отклонения от закона Ламберта, особенно для зеркальных металлических поверхностей.

На основании законов Стефана-Больцмана и Ламберта производятся различные расчеты радиационного теплообмена между нагретыми телами. При этом результат расчета существенно зависит от оптических свойств среды, разделяющей тела. Наиболее просто проводятся расчеты для тел в диаметрической (т. е. совершенно прозрачной) среде. Такой средой, строго говоря, является лишь абсолютный вакуум. Однако при приближенных расчетах можно считать диаметрическими средами также и обычные газы при не слишком высоких температурах.

Рассмотрим некоторые типичные примеры расчета радиационного теплообмена в случаях, представляющих интерес для инженерной практики.

Одним из простейших случаев является теплообмен между очень большими параллельными пластинами, находящимися при различных температурах T_1 , T_2 и обладающими свойствами «серых» тел ($A+R=1$), между которыми имеется диаметрическая среда. В этих условиях потерями тепловой энергии можно пренебречь, т. е. излучение пластины 1 практически обязательно поглощается (или отражается) пластиной 2, и наоборот. Если, например, $T_1 > T_2$, то пластина 1 является излучателем, а 2 – приемником излучения, и между ними будет происходить теплообмен, при котором некоторое «избыточное» количество тепла Q будет переходить в единицу времени от 1 к 2, создавая тенденцию к выравниванию температур тел. Коэффициенты отражения тел R_1 и R_2 , вообще говоря, не одинаковы и величину $R_1 R_2$ обозначим через p ($p < 1$).

Тепловая энергия передается от тела 1 к телу 2 в многократных отражениях, причем с каждым следующим отражением энергия отраженного излучения, очевидно, уменьшается, образуя, как нетрудно показать, последовательность величин, отличающихся в $P=R_1 R_2$ раз. Учитывая это обстоятельство и проведя соответствующий расчет количества тепла Q , передаваемого от тела 1 к телу 2 в результате многократных актов

частичного отражения и поглощения, после некоторых вычислений можно получить следующий результат:

$$Q = \frac{1}{c_1^{-1} + c_2^{-1} - c_0^{-1}} \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] F, \quad (9.48)$$

где $c_0 = \sigma 10^8$, $c_1 = A_1 \sigma 10^8$, $c_2 = A_2 \sigma 10^8$ (см. формулу (9.45)), F – площадь одной пластины. Величины A_1 и A_2 характеризуют степень черноты материалов пластин. Величина

$$\frac{1}{c_1^{-1} + c_2^{-1} - c_0^{-1}} = c_{\text{пр}} \quad (9.49)$$

называется приведенным коэффициентом излучения, а величина

$$\frac{1}{1/A_1 + 1/A_2 - 1} = A_{\text{пр}} \quad (9.50)$$

называется приведенной степенью черноты. Используя эти величины, можно представить формулу для Q в одном из следующих видов, удобных для инженерных расчетов:

$$Q = c_{\text{пр}} \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] F \quad (9.51)$$

или

$$Q = 5,67 A_{\text{пр}} \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] F. \quad (9.52)$$

В этом случае, следовательно, достигается количественное описание радиационного теплообмена в простом аналитическом виде (что возможно далеко не во всех случаях).

В качестве второго примера можно привести теплообмен между двумя «серыми» телами ($A+R=1$) с различными температурами и диффузным характером излучения, одно из которых является «оболочкой» («экраном») для другого тела, полностью заключенного внутри первого, причем поверхность экранируемого тела везде выпуклая, а оболочка – везде вогнутая. В этом случае при $T_1 \neq T_2$ от одного тела к другому в единицу времени опять-таки будет переходить некоторое «результатирующее» количество теплоты Q ; расчет этой величины дает (ср. с формулами (9.51))

$$Q = c'_{\text{пр}} \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] F_1 \quad (9.53)$$

или

$$Q = 5,67 A'_{\text{пр}} \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] F_1, \quad (9.54)$$

где

$$c'_{\text{пр}} = [c_1^{-1} + \beta(c_2^{-1} - c_0^{-1})]^{-1}, \quad (9.55)$$

$$A'_{\text{пр}} = [A_1^{-1} + \beta(A_2^{-1} - 1)]^{-1}, \quad \beta = \frac{F_1}{F_2}. \quad (9.56)$$

Здесь F_1 площадь поверхности экранируемого тела, F_2 – площадь поверхности «оболочки». Если площадь оболочки очень велика ($F_2 \gg F_1, \beta \ll 1$), то $c'_{\text{пр}} = c_1$ и $A'_{\text{пр}} = A_1$.

В качестве следующего примера можно рассмотреть действие защитных тепловых экранов из сильно отражающих материалов, используемых для ослабления теплообмена между телами. Рассмотрим вновь случай больших параллельных пластин с одинаковыми коэффициентами излучения c_1 ; при отсутствии экрана величина результирующего потока тела 1 к телу 2 определяется приведенной формулой (9.51). Если поместить между телами тонкий экран из материала с той же величиной c_1 , для величины потока Q_1 получим выражение:

$$Q_1 = c_{\text{пр}} \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] F/2 = Q_0/2. \quad (9.57)$$

Таким образом, благодаря установке одного экрана в данном случае можно уменьшить интенсивность теплообмена между телами в 2 раза. При наличии n экранов поток уменьшится в $n+1$ раз. Если же коэффициент излучения поверхностей экрана равен $c_{\text{э}} \neq c_1$, то приведенный коэффициент излучения системы будет равен

$$c_{\text{пр}}^* = (c_1^{-1} + c_{\text{э}}^{-1} - c_0^{-1})^{-1}. \quad (9.58)$$

Эффект ослабления теплового потока ввиду наличия экрана в этом случае будет равен

$$\frac{Q_1}{Q_0} = \frac{1}{2} \frac{c_{\text{пр}}}{c_{\text{пр}0}} = \frac{1}{2} \frac{A_{\text{пр}1}}{A_{\text{пр}0}}. \quad (9.59)$$

При этом местоположение экрана между пластинками не играет роли.

На практике обычно имеет место произвольное относительное расположение тел в процессе радиационного теплообмена. Обмен тепловым излучением в этом случае зависит от взаимного расположения элементов поверхности тел. Так, в случае теплообмена между элементами dF_1 и dF_2 с температурами T_1 и T_2 и поглощательными способностями A_1 и A_2 , находящимися на расстоянии r друг от друга (рис. 9.3), для количества тепла, которым обмениваются элементы, получается выражение:

$$dQ = c_{\text{пр}}^* \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \frac{\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2}{\pi r^2} dF_1 dF_2, \quad (9.60)$$

где

$$c_{\text{пр}} = \frac{c_1 c_2}{c_0} = A_1 A_2 c_0. \quad (9.61)$$

При наличии поверхностей конечных размеров F_1 и F_2 для Q получается выражение:

$$Q = c_{\text{пр}} \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] F_{12}, \quad (9.62)$$

где

$$F_{12} = \int_{F_1} dF_1 \int_{F_2} \frac{\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2}{\pi r^2} dF_2 \quad (9.63)$$

называется взаимной поверхностью излучения. На практике расчет этой величины может представить определенные трудности.

Как уже указывалось выше, в реальных случаях тела, обменивающиеся энергией в процессе радиационного теплообмена, разделены средой, которая

по своим свойствам может сильно отличаться от диатрической (плотностью прозрачной) среды. Например, газовые среды обладают определенными характеристиками поглощения – спектральным распределением коэффициента поглощения и интегральной поглощательной способностью. Кроме того, любая среда обладает той или иной интенсивностью собственного излучения, складывающегося, вообще говоря, из спонтанного и вынужденного (индуцированного) излучения атомов и молекул. Любая среда, кроме того, в той или иной мере рассеивает свет, что можно учесть как дополнительное поглощение. Таким образом, при наличии «полупрозрачной», т. е. поглощающей и излучающей среды между телами их тепловое излучение может, как ослабляться, так и усиливаться, в зависимости от свойств среды. Рассматривая баланс энергии излучения, входящего в некоторый элементарный объем среды и выходящего из него, с учетом указанных выше процессов усиления и ослабления первичного светового луча, можно получить следующее уравнение переноса энергии излучения в полупрозрачной (поглощающей и рассеивающей) среде:

$$\frac{dI_{\nu s}}{ds} = \alpha_{\nu} I_{1\nu} - K_{\nu} I_{\nu s} + \frac{B_0}{4\pi} \int_{4\pi} I_{\nu \bar{s}} \gamma(\bar{S}, \bar{S}') d\omega_{\bar{s}}. \quad (9.64)$$

Здесь, первое слагаемое учитывает усиление первичного светового пучка вследствие спонтанного излучения в рассматриваемой малой области среды, α_{ν} – эффективный спектральный коэффициент поглощения (в интервале частот ν , $\nu + d\nu$), $I_{0\nu}$ – спектральная интенсивность «абсолютно черного» (равновесного) излучения за счет поглощения и рассеивания в среде с эффективным коэффициентом ослабления $K_{\nu} = \alpha_{\nu} + \beta_{\nu}$, β_{ν} – коэффициент рассеяния первичного излучения в направлении вектора \vec{S} за счет рассеяния в этом направлении всех лучей, поступающих в элементарный объем со всех других направлений \vec{S}' , 4π – полный сферический угол, $\gamma(\vec{S}_1, \vec{S}')$ характеризует индикатрису рассеяния для данной среды.

Решение уравнения переноса излучения (9.64) при соответствующих граничных условиях представляет большие трудности даже при использовании ряда упрощающих допущений и приближенных методов расчета. Поэтому используются и другие способы учета наличия полупрозрачной среды при расчете радиационного теплообмена. В частности, можно перейти от «объемных» дифференциальных соотношений к «поверхностным» путем введения соответствующих интегральных характеристик газового объема – степени черноты ε_r или поглощательной способности A_r . Уравнение (9.64) для случая нерассеивающей среды (например, незапыленного газа) принимает простой вид:

$$\frac{dI_{\nu s}}{ds} = \alpha_{\nu} (I_{0,\nu} - I_{\nu s}). \quad (9.65)$$

Если ввести допущение о постоянстве радиационных свойств среды во всем объеме, то интегрирование (9.65) дает:

$$I_\nu = I_{\text{ст.эф.}\nu} e^{-\alpha_\nu l'} + I_{0,\nu} (1 - e^{-\alpha_\nu l'}), \quad (9.66)$$

где $I_{\text{ст.эф.}}$ – эффективное излучение поверхности, ограничивающей газовый объем, l' – расстояние от этой поверхности до некоторой точки газового объема по направлению распространения излучения. Первое слагаемое характеризует энергию не поглощенного на пути l' излучения, второе слагаемое определяет непоглощенную часть собственного излучения газа на пути l' . Поверхностная плотность потока излучения газового объема равна:

$$E_{\text{г}\nu} = (1 - e^{-\alpha_\nu l'}) E_{0,\nu}, \quad (9.67)$$

где $E_{0,\nu}$ – спектральная полусферическая плотность излучения абсолютно черного тела $E_{0,\nu}$ при температуре газового объема, R – радиус полусферического объема, излучающего на центр рассматриваемого участка. Величина

$$\varepsilon_{r\nu} = \frac{E_{\text{г}\nu}}{E_{0,\nu}} = 1 - e^{-\alpha_\nu R} \quad (9.68)$$

называется степенью черноты газового объема. Интегральная степень черноты определяется как отношение полного потока излучения газа к полному потоку излучения абсолютно черного тела при температуре газа T :

$$\varepsilon_r = \frac{E_r}{E_0} = \int_0^\infty \frac{\varepsilon_{r\nu} E_{0\nu}}{1} d\nu / \sigma_0 T^4. \quad (9.69)$$

Аналогично можно ввести спектральную поглощательную способность газового объема как отношение энергии поглощенного в объеме излучения к энергии падающего излучения:

$$A_{r\nu} = \frac{E_{\text{погл.}\nu}}{E_{\text{пад.}\nu}} = 1 - e^{-\alpha_\nu l_{\text{эф.}}}, \quad (9.70)$$

где $l_{\text{эф.}}$ – эффективная длина пути луча в газовом объеме. Интегральная поглощательная способность A_r определяется как:

$$A_r = \frac{\int_0^\infty A_{r\nu} E_{\text{пад.}\nu} d\nu}{\int_0^\infty E_{\text{пад.}\nu} d\nu}. \quad (9.71)$$

В условиях термодинамического равновесия между излучением и средой, когда падающее излучение является абсолютно черным, выполняется закон Кирхгофа: $E_r = A_r$. Смысл введения интегральной степени черноты газового объема заключается в том, что теперь можно выразить мощность собственного излучения газового объема с помощью закона Стефана-Больцмана аналогично (9.45):

$$E_r = \varepsilon_r \sigma T_r^4. \quad (9.72)$$

При этом, однако, E_r существенно зависит от температуры, так что E_r не пропорциональна T^4 . Эта зависимость для ряда газов представлена графиками, приведенными в специальной литературе.

Величина E_r используется, например, при расчете радиационного теплообмена между газом и стенкой окружающей его твердой оболочки. При этом и газ, и стенка считаются «серыми» телами со степенью черноты E_r и $E_{ст.}$, соответственно. Плотность излучения от стенки оболочки после соответствующих расчетов дает для величины результирующего радиационного теплового потока между стенкой и газом выражение:

$$q = \frac{\varepsilon_{ст}}{1 - (1 - \varepsilon_{ст})(1 - A_r)} \sigma(\varepsilon_r T_r^4 - A_r T_{ст}^4). \quad (9.73)$$

При наличии равновесия $A_r = \varepsilon_r$ при температуре стенки $T_{ст}$. Значения E_r определяют при температуре газа T_r с помощью эмпирических формул или по экспериментальным графикам. Введя понятие эффективной степени черноты стенки

$$\varepsilon'_{ст} = \frac{\varepsilon_{ст}}{1 - (1 - \varepsilon_{ст})(1 - A_r)} \quad (9.74)$$

можно переписать (9.73) в более удобном для практических расчетов в виде:

$$q = \varepsilon'_{ст} \sigma(\varepsilon_r T_r^4 - A_r T_{ст}^4). \quad (9.75)$$

Если плотность заполнена прозрачной средой, то степень черноты среды равна 1 ($\varepsilon'_{ст} = \varepsilon_{ст1}$) и тогда

$$q = \varepsilon'_{ст} \sigma(T_r^4 - T_{ст}^4). \quad (9.76)$$

На практике возможны случаи, когда теплообмен носит смешанный, радиационно-конвективный характер. В этом случае необходимо совместно решать уравнение переноса лучистой энергии в среде и уравнение конвективного теплообмена, что представляет большие математические трудности. Поэтому на практике зачастую вводят условный коэффициент теплоотдачи, равный

$$\alpha = \alpha_k + \alpha_p, \quad (9.77)$$

причем «радиационный» вклад α_p определяется так

$$\alpha_p = \frac{q_p}{T_r - T_{ст}}, \quad (9.78)$$

по аналогии с конвективным вкладом $\alpha_k = \frac{q_k}{T_r - T_{ст}}$. Основное для введения такой величины – следующее. Представим T_r и $T_{ст}$ в виде: $T_r = 273 + t_r$, $T_{ст} = 273 + t_{ст}$ (t_r и $t_{ст}$ – в °C) и положим: $t_r, t_{ст} \ll 273^\circ$, что имеет место в ряде практических случаев. Формула (9.76) при этом принимает вид:

$$q_p \approx 4 \cdot 273^3 \varepsilon_{ст} \sigma (T_r - T_{ст}) = \alpha_p (T_r - T_{ст}), \quad (9.79)$$

что соответствует введению α_p по формуле (9.78).

9.4 Теплопроводность. Кондуктивный теплообмен

Передача тепла механизмом теплопроводности, т. е. путем передачи тепла от более горячих слоев к более холодным, имеет место в огромном количестве явлений и процессов, происходящих в природе, и в производственных условиях. В частности, в твердых телах, в которых отсутствуют конвекционные потоки и интенсивно поглощается тепловое излучение любого вида, теплопроводность является основным (и по существу единственным) механизмом распространения тепла. Поэтому огромное количество задач о нагреве тел могут быть решены с привлечением детально разработанной в настоящее время математической теории теплопроводности. Основы этой теории и ее приложение описаны в весьма обширной литературе; некоторые основные пособия указаны в конце этого тома. Здесь мы ознакомимся с некоторыми основными положениями этой теории и примерами решения тепловых задач, представляющих значительный практический интерес.

В аналитической теории теплопроводности вещество рассматривается как сплошная среда (континуум), в которой существует некоторое, вообще говоря, нестационарное распределение температуры $T(x, y, z, t)$ – в температурном поле.

В конкретных условиях нагрева температурное поле может быть не трехмерным, а двухмерным (плоским), когда $T = T(x, y)$ или одномерным, когда $T = T(x)$. Так, температурное поле в ограниченном цилиндре радиуса R и длины λ обычно зависит только от радиальной ($0 \leq r \leq R$) и осевой ($0 \leq z \leq L$) координат, а от угла φ (третьей цилиндрической координаты) обычно не зависит в силу осевой симметрии температурного поля. В неограниченной пластине (ширина и длина которой очень велики по сравнению с ее толщиной) температура зависит только от координаты вдоль оси z , перпендикулярной поверхности пластины, т. е. поле является одномерным; это же имеет место для теплопроводности в шаре радиуса R , в котором температура обычно зависит только от одной координаты $0 \leq r \leq R$.

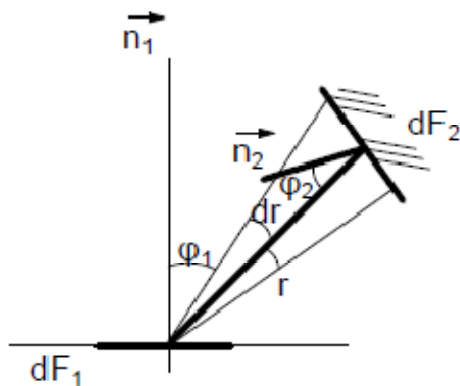


Рис. 9.3

При соединении точек поля, имеющих одинаковую температуру, получаются изотермические поверхности ($T = \text{const}$). Изменение температуры в направлении нормали к изотермической поверхности характеризуется градиентом температурного поля:

$$\text{grad}T \equiv \nabla T = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k}, \quad (9.80)$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные координатные векторы (орты). Передача тепла идет по нормали к изотермической поверхности в сторону убывания температуры, т.е. противоположно градиенту температуры. Количество тепла, проходящее в указанном направлении в ед. времени через единичную площадку на изотермической поверхности, называется плотностью теплового потока и обычно обозначается буквой \bar{q} . Согласно основному закону теплопроводности (закону Фурье):

$$q = -\lambda \text{grad}T, \quad (9.81)$$

где λ – коэффициент теплопроводности (Вт/мК), знак минус соответствует указанному выше направлению переноса тепла.

Коэффициент теплопроводности, наряду с удельной теплоемкостью, является основной теплофизической характеристикой вещества и зависит в основном от рода вещества, его агрегатного состояния и температуры, принимая значения в весьма широком интервале – примерно от 10^{-2} до 500 Вт/мК.

Теплопроводность в газах (и парах) обусловлена главным образом хаотическим молекулярным движением, при котором молекулы из более «горячих» слоев случайно попадают в более «холодные» слои, передавая им избыточную (тепловую) энергию. Ввиду вероятностного характера этого процесса и малости концентрации молекул газа коэффициент теплопроводности газов обычно мал.

Коэффициент теплопроводности газов (Вт/м.град)

Гелий <i>He</i>	0,1425
Неон <i>Ne</i>	0,0457
Аргон <i>Ar</i>	0,01635
Криптон <i>Kr</i>	0,00795
Ксенон <i>Xe</i>	0,00515
Водород <i>H₂</i>	0,169
Кислород <i>O₂</i>	0,0244
Углекислый газ <i>CO₂</i>	0,01505
Окись азота <i>NO</i>	0,0238

С повышением температуры величина λ возрастает, а от давления газа практически не зависит, за исключением очень низких давлений ($\lesssim 100$ Па). Коэффициент теплопроводности жидкости определяется взаимодействием молекул с обменом энергией между ними; ввиду большей плотности жидкостей величина λ для них значительно выше, чем для газов (например, для воды при 20°C $\lambda \approx 0,6$ Вт/мК) и обычно находится в пределах 0,1-0,7 Вт/мК). Кроме того, при повышении температуры среднее расстояние между молекулами жидкости возрастает, в результате чего величина λ уменьшается; ввиду практической несжимаемости жидкостей зависимость λ от давления пренебрежимо мала. Наконец, в твердых (кристаллических) телах теплопроводность обусловлена распространением упругих колебаний в решетке (фононов) с передачей тепловой энергии по кристаллу. С

повышением температуры амплитуда тепловых колебаний возрастает, коэффициент теплопроводности увеличивается (примерно по линейному закону). Величина λ до твердых тел может достигать высоких значений (обычно до ≈ 10 Вт/мК); максимальные значения λ имеют место для металлов – до ≈ 400 Вт/мК (серебро).

Таким образом, для всех материалов коэффициент теплопроводности более или менее сильно зависит от температуры. Учет этого обстоятельства, как будет видно из дальнейшего, сильно затрудняет решение задач теории теплопроводности. Поэтому обычно при решении этих задач величина λ принимается постоянной в некотором температурном интервале, который и характеризует область применимости получаемого при этом допущении решения задачи. В некоторых случаях может возникнуть также осложнение, связанное с конечной скоростью распространения тепла в веществе:

$$\mathcal{V}_T = \sqrt{\frac{\lambda}{c\gamma\tau_r}}, \quad (9.82)$$

где γ – плотность вещества, τ_r – характерное «время релаксации», зависящее от атомно-молекулярного механизма передачи тепла. Для металлов $\tau_r \sim 10^{-11}$ с и скорость \mathcal{V}_T очень велика: для газов при сверхзвуковом течении, влияние конечной скорости \mathcal{V}_T на теплопередачу становится заметным, поскольку $\tau_r \sim 10^{-9}$ с, а величина \mathcal{V}_T снижается примерно до 150 м/с, т.е. становится сравнимой со скоростью течения, газа. При решении практических задач теплопроводности этот эффект, обычно не учитывают.

Процесс теплопроводности в окрестностях точки рассматриваемого тела (в элементарном объеме dV , содержащем эту точку) в некоторый (произвольно выбранный) момент времени описывается дифференциальным уравнением теплопроводности, которое выводится с использованием закона Фурье (9.81) и при отсутствии источников тепла в теле имеет общий вид:

$$c\gamma \frac{dT}{d\tau} = \text{div}(\lambda \text{grad}T), \quad (9.83)$$

где операция дивергенции $\text{div}\vec{A}$ означает (в декартовой системе координат)

$$\text{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (9.84)$$

Если принять, что λ не зависит от температуры, как рассматривалось выше, то получим:

$$\frac{dT}{d\tau} = a\Delta T, \quad (9.85)$$

где $a = \frac{\lambda}{c\gamma}$ – коэффициент температуропроводности материала, Δ – оператор Лапласа:

$$\Delta T = \text{divgrad}T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \quad (9.86)$$

В цилиндрической системе координат (r, z, φ) выражения для оператора Лапласа:

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \quad (9.87)$$

При наличии осевой симметрии температурного поля и для длинных цилиндров можно принять, что $T=T(r)$, тогда уравнение теплопроводности принимает вид:

$$\frac{dT}{d\tau} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (9.88)$$

Для шара при сферической симметрии поля имеем:

$$\frac{dT}{d\tau} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (9.89)$$

В случае одномерного температурного поля уравнение теплопроводности (9.88) принимает простейший вид:

$$\frac{dT}{d\tau} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (9.90)$$

В ряде практических случаев в теле могут находиться объемные источники тепла, как положительные, так и отрицательные. Например, при СВЧ нагреве и сушке влажных материалов в объеме материала выделяется тепловая мощность, зависящая от коэффициента диэлектрических потерь в материале (положительный источник тепла). При интенсивном нагревании материалов с большим влагосодержанием в их объеме возникает интенсивное испарение влаги, на что затрачивается большая тепловая мощность (отрицательный источник тепла). В этих случаях уравнение теплопроводности (9.85) переписывается в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \Delta T + \frac{W}{c\gamma}, \quad (9.91)$$

где W – мощность объемных источников тепла.

Для решения уравнения типа (9.91), представляющего собой линейное дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка, необходимо задать соответствующие начальные и граничные условия (вся совокупность уравнений при этом определяет соответствующую краевую задачу). Начальное условие имеет общий вид:

$$T(x, y, z, 0) = f(x, y, z), \quad (9.92)$$

где $f(x, y, z)$ – заданная функция координат.

Вопрос о задании граничных условий является более сложным, и на практике их задание может представить значительные трудности при большом многообразии тепловых процессов на границе между телом и окружающей его средой. В теории теплопроводности используются идеализированные граничные условия нескольких «родов», позволяющие аналитически решить уравнение теплопроводности. При практическом использовании этих решений необходимо тщательно исследовать вопрос, к какому типу этих условий ближе всего реальные граничные условия в рассматриваемом случае.

Граничное условие 1 рода состоит в задании температуры на поверхности тела в любой момент времени:

$$T_n(\tau) = f(T). \quad (9.93)$$

Практически важный частный случай $T_n = \text{const}$ реализуется, например, при интенсивном теплообмене на границе между телом и

окружающей средой. Это граничное условие является частным случаем граничного условия 3 рода (см. ниже).

Граничное условие 2 рода состоит в задании плотности теплового потока из окружающей среды на поверхности тела:

$$q_n(\tau) = f(\tau). \quad (9.94)$$

Важный частный случай $q_n = \text{const}$ имеет место, например, при радиационном нагреве тел в высокотемпературных печах.

Граничное условие 3 рода состоит в задании закона теплообмена между телом и окружающей средой на их границе раздела. Обычно принимается закон Ньютона для теплообмена:

$$q_n(\tau) = \alpha[T_n(\tau) - T_c], \quad (9.95)$$

где α – коэффициент теплообмена ($\text{Вт/м}^2\text{К}$), T_c – температура окружающей среды. Конкретное значение α определяется фактическим механизмом теплообмена (обычно имеет место конвективный теплообмен, см. п. 9.2). Если почленно разделить (9.95) на α и положить $\alpha \rightarrow \infty$, то мы получим $T_n = T_c = f(\tau)$, т.е. граничное условие 1 рода, которое, следовательно, является частным случаем условия (9.95) при интенсивном теплообмене на поверхности тела с окружающей средой.

В некоторых случаях, например, при теплообмене конвекцией между твердым телом и жидкостью или при теплообмене контактирующих твердых тел, на границе тела имеют место граничные условия 1 рода – равенство температур поверхности и окружающей среды и равенство тепловых потоков:

$$T_n(\tau) = [T_c(\tau)]_n, \quad -\lambda \left(\frac{\partial T_c}{\partial n} \right)_n = - \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_n, \quad (9.96)$$

где λ_c и λ – коэффициенты теплопроводности среды и тела, соответственно, n – нормаль к границе между телом и окружающей средой. Эти условия на практике используются сравнительно редко.

При корректной постановке краевой задачи, т. е. при наличии замкнутой системы, состоящей из уравнения теплопроводности с начальными и граничными условиями, задача может быть решена известными методами математической физики (методом разделения переменных Фурье, методом интегрального преобразования Лапласа, комплексного преобразования Фурье или преобразования Ханкеля и др.), изложение которых выходит за рамки этой книги. Некоторые решения типовых задач будут приведены ниже. Обычно они выражаются через обобщенные безразмерные переменные – критерии подобия, использование которых позволяет применить полученное решение к ряду «подобных» тепловых задач, для которых критерии подобия одинаковы. К таким критериям относятся, в частности, критерий Фурье или обобщенное время $F_0 = \frac{a\tau}{l^2}$ (l – характерный размер тела), критерий Био $Bi = \frac{al}{\lambda}$, используемый в задачах с граничным условием 3 рода, безразмерные

координаты, например, $\eta = \frac{x}{h}$ в задачах о нагреве пластины (h – толщина пластины) и др.

Рассмотрим кратко более сложные задачи теории теплопроводности. К ним относятся, например, задачи о нагреве тела в среде переменной температуры $T_c = T_c(\tau)$. В частности, температура среды может изменяться по гармоническому закону: $T_c = T_0 + T_m \cos 2\pi\nu\tau$. В этом случае в теле распространяются тепловые волны, затухающие по мере удаления от поверхности тела. Такие задачи встречаются, в частности, при тепловом расчете ограждающих конструкций (стен). В стенах большой толщины может иметь место полное затухание температурных колебаний, в то время как тонкие стенки участвуют в температурных колебаниях по всей толщине. Реальные конструкции обычно составляют промежуточный случай.

Вторым важным случаем является наличие в теле постоянно действующих источников тепла. В этом случае, как уже указывалось выше, приходится решать уравнение теплопроводности типа (9.91), причем мощность тепловых источников может быть задана в виде функций координат или времени. Простейший случай – одномерная задача нагрева стержня ($0 \leq x < \infty$) при постоянной мощности $W = \text{const}$ и граничном условии 1 рода:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{W}{c\gamma}, \quad (9.97)$$

$$T(x, 0) = T_0, \frac{\partial T}{\partial x}(\infty, \tau) = 0, T(0, \tau) = \text{const}, W = \text{const}. \quad (9.98)$$

Решение этой задачи имеет вид:

$$\frac{T(x, \tau) - T_0}{T_c - T_0} = \text{erfc} \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} + \frac{W}{c\gamma(T_c - T_0)} \tau - \frac{W}{c\gamma(T_c - T_0)} 4\tau - i^2 \text{erfc} \frac{x}{2\sqrt{a\tau}}. \quad (9.99)$$

Здесь величина $\frac{W}{c\gamma(T_c - T_0)}$ может быть представлена в виде произведения критерия $F_0 = \frac{a\tau}{x^2}$, упоминающегося выше, и, так называемого критерия Померанцева $P_0 = \frac{Wx^2}{\lambda(T_c - T_0)}$, значение которого определяется мощностью источника тепла. При $W = 0$, $P_0 = 0$ и получается более простое решение для одномерной задачи при граничном условии 1 рода (см. ниже).

Для неограниченной пластины толщины $2h$ решение аналогичной задачи при $W = \text{const}$ и граничном условии 3 рода на поверхностях пластины $-\frac{\partial T(h, \tau)}{\partial x} + \alpha[T_c - T(h, \tau)] = 0$ имеет вид ($-h \leq x \leq h$):

$$\frac{T(x, \tau) - T_0}{T_c - T_0} = 1 + \frac{1}{2} P_0 \left(1 - \frac{x^2}{h^2} + \frac{2}{Bi} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{P_0}{\mu_n^2} \right) A_n \cos \mu_n \frac{x}{R} \cdot \exp(-\mu_n^2 F_0), \quad (9.100)$$

где

$$P_0 = \frac{Wh^2}{\lambda(T_c - T_0)}, A_n = \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n}, Bi = \frac{ah}{\lambda}, \text{ctg} \mu_n = \frac{1}{Bi} \mu_n, F_0 = \frac{a\tau}{h^2}. \quad (9.101)$$

Особенностью формулы (9.100) является наличие сходящегося ряда правой части; выполнение суммирования требует значительного объема вычислений, поэтому в специальной литературе содержатся графики,

облегчающие инженеру проведение практических расчетов температурного поля в данной задаче.

Для шара (симметричного поля) радиуса R решение аналогичной задачи имеет вид:

$$\frac{T(x,\tau)-T_0}{T_c-T_0} = 1 + \frac{1}{6}P_0 \left(1 + \frac{2}{B_i} - \frac{r^2}{h^2}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{P_0}{\mu_n^2}\right) A_n \frac{R \sin \mu_n \frac{r}{R}}{\mu_n^2} \cdot \exp(-\mu_n^2 F_0), \quad (9.102)$$

где

$$P_0 = \frac{WR^2}{\lambda(T_c-T_0)}, A_n = \frac{2(\sin \mu_n - \mu_n \cos \mu_n)}{\mu_n - \sin \mu_n \cos \mu_n}, \operatorname{ctg} \mu_n = \frac{1}{B_{i-1}} \mu_n, B_i = \frac{\alpha R}{\lambda}, F_0 = \frac{\alpha \tau}{R^2}. \quad (9.103)$$

Наконец, решение аналогичной тепловой задачи для неограниченного цилиндра радиуса R имеет вид:

$$\frac{T(x,\tau)-T_0}{T_c-T_0} = 1 + \frac{1}{4}P_0 \left(1 + \frac{2}{B_i} - \frac{r^2}{R^2}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{P_0}{\mu_n^2}\right) A_n J_0 \left(\mu_n \frac{r}{R}\right) \cdot \exp(-\mu_n^2 F_0), \quad (9.104)$$

где

$$P_0 = \frac{WR^2}{\lambda(T_c-T_0)}, A_n = \frac{2J_0(\mu_n)}{\mu_n [J_0^2(\mu_n)]}, \frac{J_0(\mu_n)}{J_1(\mu_n)} = \frac{1}{B_i} \mu_n, B_i = \frac{\alpha R}{\lambda}, B_i = \frac{\alpha R}{\lambda}. \quad (9.105)$$

Следует обратить внимание на значительное формальное сходство выражений (9.100), (9.102) и (9.104).

Значительные трудности представляет решение задач теплопроводности при двухмерном характере температурного поля (полуограниченная пластина, полуограниченный цилиндр, цилиндр конечных размеров и т. п.). Получены лишь некоторые частные решения, которые можно найти в специальной литературе.

Большое практическое значение имеет решение тепловых задач при наличии изменения агрегатного состояния вещества. При этом происходит скачкообразное изменение теплофизических параметров среды на границе фазового превращения, которое постепенно продвигается внутрь материала по некоторому определенному закону. Такой характер носит, например, промерзание грунта, учет которого весьма важен в строительной теплотехнике, затвердевание материалов в металлургических процессах и т. п. Трудность решения таких задач обусловлена нелинейностью их граничных условий. Например, в задаче о промерзании грунта простейшее условие баланса энергии на границе раздела вода-лед, играющее роль одного из граничных условий задачи, имеет вид (в одномерной задаче):

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}(\xi, \tau) = \rho \gamma_2 \frac{\partial \xi}{\partial \tau}. \quad (9.106)$$

Здесь индекс 1 относится к зоне льда (промерзания), 2 – к зоне воды (теплой зоне), ρ – удельная теплота перехода (затвердевания), ξ – координата фронта промерзания (затвердевания воды); температура на границе принимается постоянной и равной температуре замерзания $T_0(0^\circ\text{C})$. В этих условиях решение задачи методом Ляме и Клапейрона дает:

$$\frac{T_1(x,\tau)}{T_0} = \frac{\operatorname{erf} \frac{x}{\sqrt{a_1 \tau}}}{\operatorname{erf} \frac{\beta}{2\sqrt{a_1}}}, \quad (9.107)$$

где параметр β определяется из уравнения:

$$\lambda_1 T_0 \exp\left(-\frac{\beta^2}{4a_1}\right) : \sqrt{a_1} \operatorname{erf}\left(\frac{\beta}{2\sqrt{a_1}}\right) = \rho \gamma_2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \beta. \quad (9.108)$$

Динамика фронта промерзания определяется простым выражением:

$$\xi = \beta \sqrt{\tau}. \quad (9.109)$$

Более сложные задачи с условиями, более близкими к реальности, решаются различными приближенными математическими методами.

В заключение упомянем о краевых задачах нагрева неоднородных тел, теплофизические параметры которых изменяются от точки к точке, а также могут изменяться со временем в ходе процесса нагрева вследствие их существенной зависимости от температуры. Решение таких задач, в которых температурное поле описывается нелинейными уравнениями теплопроводности типа (9.85), где c , γ и λ могут быть функциями координат и времени, представляет большие математические трудности. Точные аналитические решения получены для небольшого количества частных задач, как правило, далеких от реальных условий нагрева тел в технологической практике, причем большинство из них относится к случаю неоднородных тел (зависимости теплофизических параметров от координат). Еще большие трудности представляет решение уравнений типа (см. (9.83)):

$$C(T)\gamma(T) \frac{\partial T}{\partial \tau} = \operatorname{div}[\lambda(T) \operatorname{grad} T], \quad (9.110)$$

в котором все параметры теплопереноса существенно зависят от T (и тем самым времени τ). При этом обычно используются различные приближенные методы решения, связанные с линеаризацией нелинейных уравнений теплопроводности (обычно одномерного уравнения), преобразованием исходного уравнения с частными производными в обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение, и т. д. Эти методы излагаются в специальной литературе.

При практическом решении задач о нагреве твердых тел (например, при тепловой обработке материалов) следует, прежде всего, принять во внимание, что во многих случаях конкретную задачу удастся свести (в том или ином приближении) к одной из типовых, для которых решение уже получено и представлено в удобной для инженерных расчетов форме (графики, номограммы и т.д.). Такие задачи рассмотрены в многочисленной литературе; некоторые пособия указаны в конце этого тома. Рассмотрим некоторые типичные примеры.

Пусть на поверхности полуограниченного тела ($x > 0$) (полупространства) температура постоянна. ($T(x=0) = T_n = \text{const}$), а на бесконечном удалении от поверхности ($x \rightarrow \infty$) равна начальной температуре: $T(x \rightarrow \infty) = T(\tau=0) = T_0$. Требуется установить закон повышения или снижения тела $T(x, \tau)$. Такая задача может возникнуть, например, при исследовании динамики прогрета или охлаждения тел в теплоотдающей среде (потока жидкости или газа), когда размеры тела достаточно велики.

Решение этой задачи имеет вид:

$$T = T_n + (T_0 - T_n) \left(1 - \operatorname{erfc} \frac{1}{2\sqrt{F_{0x}}} \right), F_{0x} = \frac{a\tau}{x^2}. \quad (9.111)$$

Выражение для градиента температуры:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_0 - T_n}{x} \frac{1}{\sqrt{\pi F_{0x}}} \exp \left(-\frac{1}{4F_{0x}} \right). \quad (9.112)$$

Наконец для средней температуры пространства:

$$\bar{T} = T_n + (T_0 - T_n) \left\{ 1 - \operatorname{erfc} \frac{1}{2\sqrt{F_{0x}}} + 2\sqrt{\frac{F_{0x}}{\pi}} \left[\exp \left(-\frac{1}{4F_{0x}} \right) - 1 \right] \right\}. \quad (9.113)$$

Для этих величин имеются графики в координатах $\theta \equiv \frac{T - T_n}{T_0 - T_n} \left(F_{0x} \equiv \frac{a\tau}{x^2} \right)$, которые удобны для быстрых инженерных оценок и приближенных расчетов.

Рассмотрим теперь случай поступления на поверхность полуограниченного тела постоянного теплового потока $-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = S = \text{const}$, остальные условия те же. Этот случай соответствует, например, прогреву массивного тела радиационным путем, например, от источника теплового излучения постоянной мощности при неизменных поглощательных свойствах тела.

Решение такой задачи имеет вид: температура пространства равна

$$T = T_0 + \frac{Sx}{\lambda} \left[2\sqrt{\frac{F_{0x}}{\pi}} \exp \left(-\frac{1}{4F_{0x}} \right) - \operatorname{erfc} \frac{1}{2\sqrt{F_{0x}}} \right]. \quad (9.114)$$

Градиент температуры

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{S}{\lambda} \operatorname{erfc} \frac{1}{2\sqrt{F_{0x}}}. \quad (9.115)$$

Наконец, для средней температуры имеем:

$$\bar{T} = T_0 + \frac{Sx}{\lambda} \left[F_{0x} + \sqrt{\frac{F_{0x}}{\pi}} \exp \left(-\frac{1}{4F_{0x}} \right) - \left(F_{0x} + \frac{1}{2} \right) \operatorname{erfc} \frac{1}{2\sqrt{F_{0x}}} \right]. \quad (9.116)$$

Для этого случая также, имеются инженерные графики и формулы.

Рассмотрим, наконец, случай когда на поверхности полуограниченного тела ($x \rightarrow 0$) с начальной температурой T_0 имеет место теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой постоянна и равна θ : $-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha(\theta - T_{x=0})$, где α – коэффициент теплоотдачи на границе твердого тела со средой.

В этом случае температура определяется выражением:

$$T = \theta + (T_0 - \theta) \left[1 - \operatorname{erfc} \frac{1}{2\sqrt{F_{0x}}} + \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2\sqrt{F_{0x}}} + B_{ix}\sqrt{F_{0x}} \right) \exp(B_{ix} + B_{ix}^2 F_{0x}) \right],$$

$$B_{ix} = \frac{\alpha x}{\lambda} \quad (9.117)$$

Для градиента температуры получается выражение:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \begin{cases} -\frac{G\alpha(\theta-T_0)}{\lambda}, & x = 0 \\ -\frac{G(\theta-T_0)}{\lambda}, & x > 0 \end{cases} \quad G = B_{ix} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F_{0x}}} + B_{ix}\sqrt{F_{0x}}\right) \exp(B_{ix} + B_{ix}^2 F_0). \quad (9.118)$$

Наконец, средняя температура определяется выражением:

$$\begin{aligned} \bar{T} = \theta - (T_0 - \theta) \frac{1}{B_{ix}} & \left\{ \exp(B_{ix} + B_{ix}^2 F_0) \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F_{0x}}} + B_{ix}\sqrt{F_{0x}}\right) \right] + \right. \\ & (B_{ix}^2 F_0)(\operatorname{erfc} B_{ix}\sqrt{F_{0x}} - 1) + (B_{ix} + 1) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F_{0x}}} - 1\right) - \\ & \left. \frac{2}{\sqrt{\pi}} B_{ix}\sqrt{F_{0x}} \left[\exp\left(-\frac{1}{4F_{0x}}\right) - 1 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (9.119)$$

Заметим, что громоздкость этих выражений, особенно (9.119), наглядно иллюстрирует целесообразность использования специальных графиков и приближенных формул в инженерной практике.

Рассмотрим примеры иной геометрии нагреваемого (или охлаждаемого) тела, например, случай неограниченной пластины равномерной начальной температурой T_0 . Пусть на поверхности $x=0$ температура постоянна и равна T_n , а другая поверхность ($x=h$) теплоизолирована; такой случай также представляет определенный практический интерес для теплотехники.

В этом случае для температуры получается следующее выражение:

$$\begin{aligned} T &= T_n + (T_0 - T_n) \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos[\mu_n(1 - \eta)] \exp(-\mu_n^2 F_0), \quad \mu_n = (2n - 1) \frac{n}{2}, \\ A_n &= (-1)^{n+1} \frac{2}{\mu_n}, \quad F_0 = \frac{a\tau}{h^2}, \quad \eta = \frac{x}{h}. \end{aligned} \quad (9.120)$$

Средняя температура пластины равна

$$T = T_n + (T_0 - T_n) \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp(-\mu_n^2 F_0), \quad B_n = \frac{2}{\mu_n}, \quad (9.121)$$

а градиент температуры:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_0 - T_n}{h} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin[\mu_n(1 - \eta)] \exp(-\mu_n^2 F_0), \quad C_n = 2(-1)^{n+1}. \quad (9.122)$$

Если при тех же прочих условиях на поверхности $x=0$ пластины задан постоянный тепловой поток $-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = S = \text{const}$, то соответствующие выражения имеют вид:

$$\begin{aligned} T &= T_0 + \frac{Sh}{\lambda} \left\{ F_0 - \eta + \frac{r^2}{2} + \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos[\mu_n(1 - \eta)] \exp(-\mu_n^2 F_0) \right\}, \quad \mu_n = n\pi, \\ A_n &= (-1)^{n+1} \frac{2}{\mu_n^2}, \quad \bar{T} = T_0 + \frac{Sh}{\lambda} E = T_0 + \frac{S\tau}{c\rho h} \end{aligned} \quad (9.123)$$

(C – удельная теплоемкость, ρ – плотность материала пластины).

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{S}{\lambda} \left\{ 1 - \eta - \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin[\mu_n(1 - \eta)] \exp(-\mu_n^2 F_0) \right\}, \quad C_n = (-1)^{n+1} \frac{2}{\mu_n}. \quad (9.124)$$

Наконец, если при тех же условиях вблизи поверхности $x=0$ задана постоянная температура θ среды, с которой происходит теплообмен по закону Ньютона $-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha(\theta - T_{x=0})$, то получаются решения следующего вида:

$$T = T_0 + (\theta - T_0) \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos[\mu_n(1 - \eta)] \exp(-\mu_n^2 F_0) \right\},$$

$$A_n = (-1)^{n+1} \frac{2B_i \sqrt{\mu_n^2 + B_i^2}}{\mu_n(\mu_n^2 + B_i^2 + B_i)}, \quad (9.125)$$

μ_n – корни характеристического уравнения

$$ctg \mu = \frac{1}{B_i} \mu, \quad (9.126)$$

$$\bar{T} = \theta + (T_0 - \theta) \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp(-\mu_n^2 F_0) B_n = \frac{A_n}{\mu_n} \sin \mu_n, \quad (9.127)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_0 - T_n}{h} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin[\mu_n(1 - \eta)] \exp(-\mu_n^2 F_0) C_n = A_n \mu_n. \quad (9.128)$$

В литературе имеются решения аналогичных задач и для других граничных условий на второй поверхности пластины ($x=h$).

Сравнительно более простой вид имеют решения аналогичных задач для круглых тел неограниченного цилиндра и шара, ввиду более высокой симметрии задачи (особенно для шара). Приведем некоторые решения, ограничиваясь выражениями для температуры и средней температуры тела. Если на поверхности сплошного цилиндра радиуса R с начальной температурой $t_0 = \text{const}$ температура неизменна ($T = T_n$), то решение тепловой задачи дает:

$$T = T_n + (T_0 - T_n) \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0 \exp(-\mu_n^2 F_0), J_0(\mu_n) = 0, A_n = \frac{2}{\mu_n J_1(\mu_n)}, \quad (9.129)$$

$$\bar{T} = T_n + (T_0 - T_n) \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp(-\mu_n^2 F_0), B_n = \frac{4}{\mu_n^2}, \left(F_0 = \frac{\alpha \tau}{R^2}, \eta = \frac{r}{R} \right). \quad (9.130)$$

Если на поверхность цилиндра поступает постоянный тепловой поток, то:

$$T = T_0 + \frac{SR}{\lambda} \left[2F_0 + \frac{r^2}{2} - \frac{1}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\mu_n \eta) \exp(-\mu_n^2 F_0) \right], J_0(\mu_n) = 0, \quad (9.131)$$

$$A_n = \frac{2}{\mu_n^2 J_0(\mu_n)},$$

$$\bar{T} = T_0 + 2F_0 \frac{Sh}{\lambda} = T_0 + \frac{2S\tau}{c\rho R}. \quad (9.132)$$

Если же на поверхности имеет место теплообмен с окружающей средой ($\theta = \text{const}$) по закону Ньютона $\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R} = \alpha(\theta - T_{r=R})$, то

$$T = T_0 + (\theta - T_0) \sum_{n=1}^{\infty} 1 - A_n J_0(\mu_n \eta) \exp(-\mu_n^2 F_0), \frac{J_0(\mu_n)}{J_1(\mu_n)} = \frac{1}{B_i},$$

$$A_n = \frac{2B_i}{(\mu_n^2 + B_i^2) J_0(\mu_n)}, B_i = \frac{\alpha R}{\lambda}, \quad (9.133)$$

$$\bar{T} = \theta + (T_0 - \theta) [1 - \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp(-\mu_n^2 F_0)], B_n = \frac{4B_i}{\mu_n^2 (\mu_n^2 + B_i^2)}. \quad (9.134)$$

Во всех этих случаях в силу цилиндрической симметрии задачи $\frac{dT}{dr} \Big|_{r=0} = 0$. Исследование показывает, что приведенные формулы дают достаточно точное описание процесса нагрева и для конечных размеров цилиндров, если $2R \leq 1/5L$ (L – длина цилиндра). Ряды в правой части этих

формулы обычно сходятся достаточно быстро, что облегчает практическое осуществление инженерных расчетов. В литературе имеются также графики решений этих задач.

Для сплошного радиуса R с постоянной начальной температурой t_0 решение аналогичных задач дает следующие результаты. При постоянной температуре поверхности шара $T_n = \text{const}$:

$$T = T_n + (T_0 - T_n) \sum_{n=1}^{\infty} A_n / \eta \sin(\mu_n \eta) \exp(-\mu_n^2 F_0), \mu_n = n\pi, \\ A_n = (-1)^{n+1} \frac{2}{\mu_n}, F_0 = \frac{a\tau}{R^2}, \eta = \frac{r}{R}, \quad (9.135)$$

$$\bar{T} = T_n + (T_0 - T_n) \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp(-\mu_n^2 F_0), B_n = \frac{6}{\mu_n^2}. \quad (9.136)$$

При постоянном тепловом потоке на поверхности $\left(\lambda \frac{dT}{dr}\right)_{r=R} = S = \text{const}$:

$$T = T_0 + \frac{SR}{\lambda} \left[3F_0 + \frac{r^2}{2} - \frac{3}{10} - \sum_{n=1}^{\infty} A_n / 4 \sin(\mu_n \eta) \exp(-\mu_n^2 F_0) \right], \text{tg}(\mu_n) = \mu_n, \\ A_n = \frac{2}{\mu_n^2 \cos(\mu_n)}, \quad (9.137)$$

$$\bar{T} = T_0 + 3F_0 \frac{SR}{\lambda} = T_0 + \frac{2S\tau}{c\rho R}. \quad (9.138)$$

Наконец, при наличии теплообмена с окружающей средой $\left|\lambda \frac{dT}{dr}\right|_{r=R} = \alpha(\theta - T_{r=R})$:

$$T = T_n + (T_0 - T_n) \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n / \mu_n \eta \sin(\mu_n \eta) \exp(-\mu_n^2 F_0) \right], \text{tg} \mu_n = -\frac{1}{B_{i-1}} \mu_n, \quad (9.139)$$

$$A_n = (-1)^{n+1} \frac{2B_i \sqrt{(B_{i-1})^2 - \mu_n^2}}{\mu_n^2 + B_i^2 - B_i}, \quad (9.140)$$

$$\bar{T} = 0 + (T_0 - 0) [1 - \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp(-\mu_n^2 F_0)], B_n = \frac{6B_i^2}{\mu_n^2 (\mu_n^2 + B_i^2 + B_i)}. \quad (9.141)$$

Методы решения более сложных нестационарных задач нагрева твердых тел и типичные результаты приведены в специальной литературе.

Особый практический интерес представляют задачи о нагреве тел с точечными и линейными источниками тепла (неподвижными и движущимися). К подобным схемам приводятся, в частности, задачи о расчете режимов плазменной и лазерной обработки материалов и аналогичные тепловые задачи. Рассмотрим, например, случай, когда на поверхности полуограниченного тела ($r > 0$), движущегося в направлении оси X , с постоянной скоростью \mathcal{V} (что эквивалентно движению источника относительно тела со скоростью $(-\mathcal{V})$), действует точечный – источник тепла, создающий удельный тепловой поток $q = \text{const}$, причем теплообменом на

поверхности тела можно пренебречь. Полагая центр координатной системы связанным с источником тепла и рассматривая квазиустановившийся режим, при котором распределение температуры в системе координат, жестко связанной с источником, не зависит от времени, можно получить для величины повышения температуры следующее выражение:

$$T = \frac{q}{\lambda \sqrt{x^2+y^2+z^2}} \frac{1}{2\pi} \exp \left[-\frac{1}{2} P_e (1 - \cos \varphi) \right], \quad P_e = \frac{\nu \sqrt{x^2+y^2+z^2}}{a} \quad (9.142)$$

(φ – угол между радиус-вектором рассматриваемой точки в теле и осью x). Применение этого результата к расчету режима плазменной обработки материала см. в т. II, п. 5-7.

В некоторых случаях оказывается практически полезной расчетная схема движущегося линейного источника тепла, создающего на поверхности тела удельный (на ед. длины) тепловой поток q_i (прочие условия задачи – те же). Решение (формула повышения температуры) имеет вид:

$$T = \frac{q_i}{\lambda} \frac{1}{\pi} K_0 \left(\frac{P_{eR}}{2} \right) \exp \left(\frac{P_{ex}}{2} \right), \quad P_{ex} = \frac{\nu_x}{a}, \quad P_{eR} = \frac{\nu \sqrt{x^2+y^2}}{a} = \frac{\nu_r}{a}, \quad (9.143)$$

где K_0 – функция Мендональда, значения которой можно найти в литературе по специальным функциям.

Рассмотрим еще некоторые упрощенные методы решения задач, связанных с переносом тепла.

Движение плоской граничной поверхности затвердевания вглубь толщи воды (например, процесс замерзания водоема) $x=x(t)$ можно рассмотреть следующим элементарным образом. При медленном процессе замерзания (как в природных условиях) распределение температуры в слое образовавшегося льда можно считать линейно возрастающим от температуры среды (воздуха) $T < T_{пл}$ до $T_{пл}$ на границе воды со льдом. Тогда удельный тепловой поток с единицы площади поверхности льда равен $q = \lambda \frac{T_{пл}-T}{x}$, где λ – коэффициент теплопроводности льда ($\approx 2,2 \cdot 10^5$ эрг/с·см·град). За время dt уходит количество тепла $dQ = q dt = \lambda \frac{T_{пл}-T}{x} dt$. С другой стороны $dQ = \varepsilon \rho dx$, где $\varepsilon = 3,35 \cdot 10^9$ эрг/г – удельная теплота плавления льда, $\rho = 0,9$ г/см³ – плотность льда, dx – толщина образовавшегося за время dt льда. Таким образом,

$$\lambda \frac{T_{пл}-T}{x} dt = \varepsilon \rho dx. \quad (9.144)$$

Интегрирование (9.144) дает:

$$\lambda (T_{пл} - T) t = \frac{1}{2} \varepsilon \rho x^2 + const. \quad (9.145)$$

Полагая в начальный момент времени ($t=0$) $x=0$, находим, что $const=0$. И получим окончательно:

$$x = \sqrt{\frac{2\lambda(T_{пл}-T)}{\varepsilon \rho}} \sqrt{t}. \quad (9.146)$$

Оценка по этой формуле показывает, например, что при температуре окружающего воздуха -10°C за сутки образуется слой льда толщиной $x \approx 11$ см. При этом получается характерная для одномерной проблемы

Стефана зависимость $x \sim \sqrt{t}$ (характеризующая продвижение плоского фронта фазового превращения вглубь вещества). В случае более сложной геометрии вещества эта закономерность не сохраняется, а сам приведенный выше элементарный вывод становится непригодным. Подробное изложение этих вопросов можно найти в специальной литературе.

9.5 Тепло- и массоперенос в материалах

Во многих важных для практики случаях перенос тепла в материале сопровождается процессами массопереноса (например, переносом пара, жидкой влаги и т. п.). Такие процессы имеют место, например, в газовых смесях и растворах, в капиллярно-пористых телах с большим влагосодержанием и т. п. в различных технологических процессах (например, в процессе сушки). Диффузия в смесях при наличии градиента температуры называется термической диффузией или эффектом Соре, а перенос тепла, вызванный диффузией вещества, называется диффузионной теплопроводностью или эффектом Дюфо. Эти и другие взаимосвязанные процессы тепло- и массопереноса в наиболее общем виде рассматриваются в термодинамике необратимых процессов на основе анализа общей системы линейных уравнений Онзагера:

$$\vec{J}_e = \sum_{k=1}^n L_{ik} \cdot \vec{x}_k. \quad (9.147)$$

Поток тепловой энергии, массы и т.д. \vec{J}_e обусловлен действием всех термодинамических сил \vec{x}_k ($k=1,2,3,\dots$). Величины L_{ik} называются коэффициентами Онзагера; для них выполняется соотношение взаимности: $L_{ik} = L_{ki}$. Согласно основной формуле термодинамики необратимых процессов.

$$\sum_i \vec{J}_i \vec{x}_i = T \frac{dS}{dt}, \quad (9.148)$$

где S – энтропия данной системы. В свою очередь, термодинамические силы x_i определяются с использованием уравнения Гиббса:

$$T dS = dU + p dV - \sum_{k=1}^n \mu_k dM_k, \quad (9.149)$$

где U – внутренняя энергия, μ_k – химический потенциал, V – объем, M – масса. В случае переноса тепла и массы термодинамические силы \vec{x}_q и \vec{x}_{mk} , соответственно, определяются соотношениями:

$$\vec{x}_q = -\frac{1}{T} \text{grad} T, \quad \vec{x}_{mk} = -T \text{grad} \frac{\mu_k}{T} + \vec{F}_k \quad (9.150)$$

(\vec{F}_k – внешняя механическая сила).

Кинетические коэффициенты Онзагера выражаются через соответствующие коэффициенты процессов переноса тепла и массы.

Рассмотрим некоторые примеры описания процессов тепло- и массопереноса в материалах в важных для инженерной практики случаях. Наиболее подробно остановимся лишь на нестационарном переносе теплоты и массы в капиллярно-пористых телах и пористых средах. Эти тела характеризуются, в общем случае, наличием в порах парообразной (индекс 1), жидкой (2) и твердой (3) влаги и сухого воздуха с приведенной

молекулярной массой 29 (индекс 4). Используем следующие обозначения: объемная концентрация связанного вещества:

$$\omega = \frac{m}{V} = \frac{1}{V} \sum m_i = \sum \omega_i, \quad (9.151)$$

где m_i – масса связанного вещества в состоянии, $i=1,2,3,4$, m – полная масса связанного вещества, ω_i – объемная концентрация i -го связанного вещества, V – объем тела. Относительное влагосодержание тела u :

$$u = \frac{m}{m_0} = \sum u_i = \frac{\omega}{\rho}, \quad (9.152)$$

где $u_i = \frac{m_i}{m_0}$ – относительная концентрация i -го связанного вещества, $\rho = \frac{m_0}{V}$ – объемная концентрация скелета («сухого вещества»). Если усадкой тела при изменении его влагосодержания можно пренебречь ($V=V_0$), как предполагается во многих важных для практики случаях, то

$$\rho_0 = \frac{m_0}{V_0} = \frac{m_0}{V} = \text{const}, \quad (9.153)$$

где ρ_0 – объемная концентрация скелета тела, V_0 – объем тела в абсолютно сухом состоянии. Тогда

$$\omega_i = u_i \rho_0, \quad \omega = u \rho_0. \quad (9.154)$$

Объемная пористость тела Π_V характеризует относительный объем, занятый парами в теле. Если тело имеет монокапиллярную структуру (все капилляры имеют радиус r), то пористость пропорциональна r^3 ; если же, обычно имеет место на практике, структура тела поликапиллярна, т. е. содержит поры различных радиусов и характеризуется дифференциальной функцией распределения пор по размерам $F_V(r)$ в интервале радиусов от r_0 до r_{\max} , то объемная пористость равна:

$$\Pi_V = \int_{r_0}^{r_{\max}} F_V(r) dr. \quad (9.155)$$

Относительное количество физико-механически связанного 1-го вещества можно определить по формуле:

$$\omega'_i = \Pi_V b_i \rho_i u'_i, \quad (9.156)$$

где b_i – насыщенность пор, причем $\varepsilon_i = b_i = 1$. Для физико-химически связанной влаги, однако, формально можно использовать в расчетах соотношение (9.156), но тогда в i уже не имеет смысла насыщенности пар, и $\varepsilon_{bi} \neq 1$.

При молярном (гидродинамическом) переносе влаги через поры в теле (фильтрации) плотность потока 1-го вещества j_i равна:

$$j_{i\text{мол}} = \Pi_S b_i \rho_i \mathcal{V}_i \quad (9.157)$$

где \mathcal{V}_i – средняя скорость движения 1-го вещества, Π_S – поверхностная пористость тела, характеризующая относительную площадь отверстий (пор) в данном сечении тела в направлении, перпендикулярном потоку вещества. Для однородных тел можно приближенно положить:

$$\Pi_S = \Pi_V = \Pi. \quad (9.158)$$

При наличии градиентов в теле наряду с молярным переносом вещества будут протекать также процессы диффузии; плотность

диффузионного потока 1-го вещества обозначается через $j_{идиф}$. Величины $j_{идиф}$ и $j_{имол}$, разумеется, являются векторными, и направление векторов $j_{идиф}$ и $j_{имол}$ характеризует направление переноса вещества в пористом теле.

Рассмотрим теперь уравнения тепломассопереноса в капиллярно-пористом теле. Уравнение переноса массы записывается на основе закона сохранения массы: локальная производная по времени объемной концентрации 1-го связанного вещества (см. формулу (9.156)) равна сумме дивергенции потоков массы (обоих указанных выше типов), а также источника 1-го вещества, обусловленного фазовыми переходами (J_i):

$$\frac{\partial(u_i\rho)}{\partial\tau} = -div(\vec{j}_{идиф} + \vec{j}_{имол}) + J_i \quad (9.159)$$

или с учетом (9.157):

$$\frac{\partial(u_i\rho)}{\partial\tau} = -div(\vec{j}_{идиф} + Pb_i\rho_i\vec{v}_i) + J_i. \quad (9.160)$$

Для источников J_i имеет место условие $\sum J_i = 0$. Если пренебречь усадкой тела ($\rho = \rho_0 = const$), то вместо (9.160) имеем:

$$\rho_0 \frac{\partial u_i}{\partial\tau} = -div(\vec{j}_{идиф} + Pb_i\rho_i\vec{v}_i) + J_i. \quad (9.161)$$

Дифференциальное уравнение переноса тепла получается из уравнения баланса потока энергии: локальная производная объемной плотности энергии равна дивергенции плотности потока энергии. В свою очередь, объемная плотность энергии, т. е. удельное теплосодержание, равна $h\rho$, где h – энтальпия, поэтому, с учетом переноса энтальпии за счет конвективного и диффузионного потоков вещества, это условие баланса можно выразить в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial\tau} = (h_0\rho_0 + \sum_i \rho_0 h_i u_i) = div[\vec{j}_q + \sum_i h_i (\vec{j}_{идиф} + Pb_i\rho_i\vec{v}_i)], \quad (9.162)$$

где $\vec{j}_q = -\lambda grad T$ – плотность потока тепла, передаваемого механизмом теплопроводности (λ – суммарный коэффициент теплопроводности вещества). Введя удельную теплоемкость $C_i = \frac{dh_i}{dT}$ и приведенную удельную теплоемкость тела $C = C_0 + \sum_i C_i U_i'$ после некоторых преобразований (9.162) можно привести к виду:

$$C\rho_0 \frac{\partial T}{\partial\tau} = div(\lambda grad T) + \sum_i h_i J_i - \sum_i (\vec{j}_{идиф} + Pb_i\rho_i\vec{v}_i) C_i grad T. \quad (9.163)$$

Уравнения (9.161) и (9.163) образуют наиболее общую систему связанных дифференциальных уравнений тепломассопереноса в капиллярно-пористых телах.

Рассмотрим некоторые следствия и частные случаи. Если, положить $\rho_0 U_i = Pb_i\rho_i$ (допущение о чисто физико-механической связи вещества со скелетом пористого тела), $J_i = 0$ (фазовые приращения отсутствуют) и $j_{идиф} = 0$ (отсутствие градиентов концентрации и связанного с ними диффузионного переноса вещества) то из (9.161) следует уравнение фильтрации несмешивающихся жидкостей ($i=1,2,..$) в пористой среде:

$$P \frac{\partial(\rho_i b_i)}{\partial\tau} = -div \vec{j}_{имол} = -div \left[K \frac{K_i}{\eta_i} (grad p - \rho grad h_i) \rho_i \right], \quad (9.164)$$

где K – общая проницаемость, K_i – относительная проницаемость среды для i -го вещества. Решение этого уравнения дает количественное описание процесса фильтрационного переноса жидкостей в пористых средах.

В коллоидных капиллярно-пористых телах влага связана в основном адсорбционными и диффузионно-осмотическими силами. Влажное коллоидное тело состоит из однородных мицелл, расстояние между которыми – порядка молекулярных размеров. Поэтому, в качестве модели может служить тело с многочисленными микрокапиллярами с размерами молекулярного порядка. Перенос жидкой влаги в коллоидном теле происходит путём диффузии, вызванной разностью осмотических давлений. Плотность потока жидкой влаги будет, поэтому, пропорциональна градиенту влагосодержания (осмотическое давление, или давление набухания, приближенно пропорционально концентрации жидкой влаги) $gradU$. Наличие градиента температуры ($gradT$) в теле обуславливает также процесс термодиффузии (эффект Соре, упомянутый выше) со скоростью, пропорциональной $gradT$. В итоге для суммарного диффузионного переноса пара и влаги (в коллоидном теле) величина плотности потока представляется в виде:

$$j = -a_m \rho_0 gradU - a_m^T \rho_0 gradT = -a_m \rho_0 (gradU + \delta gradT), \quad (9.165)$$

где a_m и a_m^T – суммарные коэффициенты диффузии и термодиффузии влаги в теле, δ – термоградиентный коэффициент. Коэффициенты a_m и δ являются, вообще говоря, функциями температуры. С повышением влажности величина a_m для многих капиллярно-пористых тел возрастает, а затем остается неизменным. Для ряда строительных материалов (кирпич, бетон, керамика) величина a_m хорошо описывается эмпирической формулой:

$$a_m = \frac{a_{m0}}{1 - A \rho_0 U}, \quad (9.166)$$

где a_{m0} и A – коэффициенты, определяемые из опыта; для капиллярно-пористых тел обычно A близок к 0,035, для коллоидных – к 0,020. Коэффициент a_{m0} зависит от температуры:

$$a_{m0} = a_{00} B \left(\frac{T}{1000} \right)^n, \quad (9.167)$$

причем для капиллярно-пористых тел приближенно $B=10^5$, $n=20$, для коллоидных тел $B=1$, $n=10$: величина a_{00} изменяется для разных материалов в весьма широких пределах (от 0,0004 для теста до 50 для кварцевого песка). Теплоградиентный коэффициент δ обычно возрастает с повышением влагосодержания, а затем остается неизменным или уменьшается.

Согласно (9.161) с учетом изложенного выше, система дифференциальных уравнений переноса массы – парообразной (индекс 1) и жидкой (индекс 2) влаги – имеет вид:

$$\begin{aligned} (a) \quad \rho_0 \frac{\partial U_1}{\partial \tau} &= -div \vec{j}_1 + J_1, \\ (б) \quad \rho_0 \frac{\partial U_2}{\partial \tau} &= -div \vec{j}_2 + J_2 \end{aligned} \quad (9.168)$$

или

$$\rho_0 \frac{\partial U}{\partial \tau} = -\operatorname{div} \vec{j}_1 - \operatorname{div} \vec{j}_2 \quad (9.169)$$

(т.к. $U=U_1+U_2$, а $J_1+J_2=0$) подстановка выражений для j_1 и j_2 типа (9.165) дает:

$$\rho_0 \frac{\partial U}{\partial \tau} = \operatorname{div}[a_{m1}\rho_0 \operatorname{grad} U + a_{m1}^T \rho_0 \operatorname{grad} T] + \operatorname{div}[a_{m2}\rho_0 \operatorname{grad} U + a_{m2}^T \rho_0 \operatorname{grad} T]. \quad (9.170)$$

Дифференциальное уравнение теплового переноса в данном случае имеет вид: (см. уравнение (9.163))

$$C\rho_0 \frac{\partial T}{\partial \tau} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + r_{12}J_{12} - \sum_i C_i \vec{j}_i \operatorname{grad} T. \quad (9.171)$$

Здесь r_{12} – коэффициент фазового превращения жидкость-пар, $J_{12} = J_2$ – источник жидкости, который определяется из (9.168a) при $\frac{\partial U_1}{\partial \tau} = 0$:

$$J_2 = J_{12} = -J_1 = -\operatorname{div} \vec{j}_1. \quad (9.172)$$

Тогда вместо (9.171) можно написать:

$$C\rho_0 \frac{\partial T}{\partial \tau} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + r_{12}(a_{m1}\rho_0 \operatorname{grad} U + a_{m1}^T \rho_0 \operatorname{grad} T) - \sum_i C_i \vec{j}_i \operatorname{grad} T. \quad (9.173)$$

Уравнения (9.170) и (9.173) могут быть решены совместно с помощью различных численных методов. В частности, при зональной системе расчета весь диапазон значений U и T разбивается на интервалы (зоны), причем в пределах каждого интервала коэффициенты переноса λ , a_{m1} , a_{m2} , c , a_{m2}^T принимаются постоянными. При этом систему уравнений тепломассопереноса удобно представлять в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \tau} &= a_m \Delta U + a_m^T \Delta T = (\Delta U + \delta \Delta T), \\ \frac{\partial T}{\partial \tau} &= \left(a + a_{m1} \frac{r_{12}}{c}\right) \Delta T + a_{m1} \frac{r_{12}}{c} \Delta U - [(C_1 a_{m1} + C_2 a_{m2}) \operatorname{grad} U + (C_1 a_{m1}^T + \\ &+ C_2 a_{m2}^T) \operatorname{grad} T] \operatorname{grad} T / C. \end{aligned} \quad (9.174)$$

В некоторых частных случаях система (9.174) упрощается. Так, для системы пористое тело-жидкость-лед ($I=2,3$), в которой процессами испарения льда (сублимацией) и конденсацией пара в лед (аблимацией) можно пренебречь ($J_{31} = J_{13} = 0$), переноса льда не происходит ($j_3=0$). Тогда уравнение переноса жидкости принимает простой вид:

$$\rho_0 \frac{\partial U_2}{\partial \tau} = -\operatorname{div} \vec{j}_2 + J_2, \quad (9.175)$$

а уравнение для концентрации льда:

$$\rho_0 \frac{\partial U_3}{\partial \tau} = J_3, \quad (9.176)$$

где $J_2 = J_{32} = -J_2 = -J_3$ – источник жидкости, обусловленный таянием льда. Из (9.175) и (9.176) имеем:

$$\rho_0 \frac{\partial U_2}{\partial \tau} = -\operatorname{div} \vec{j}_2 + \rho_0 \frac{\partial U_2}{\partial \tau}. \quad (9.177)$$

Введя «коэффициент льдистости» ε_∂ , равный отношению массы льда (m_3) к массе всей влаги (m),

$$\varepsilon_3 = \frac{m_3}{m} \approx \frac{U_3}{U_2 + U_3}$$

$(U_1, U_4 \ll U_2 + U_3)$, и удельную теплоемкость

$$C = C_0 + C_2 U_2 + C_3 U_3, \quad (9.178)$$

после некоторых преобразований можно привести систему уравнений тепломассопереноса к виду

$$\frac{\partial U_2}{\partial \tau} = (1 - \varepsilon_3)(a_{m2} \Delta U + a_m^T \Delta T), \quad (9.179)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \left[a + \varepsilon_3 a_{m1}^T \frac{r_{23}}{c} \right] \Delta T + \varepsilon_2 a_{m2} \frac{r_{23}}{c} \Delta U + C_2 (a_{m2} \text{grad} U + a_{m3}^T \text{grad} T) \text{grad} T$$

(r_{23} – удельная теплота перехода вода-лед).

Если система содержит пар и лед ($i=1,3$), то полагая $\varepsilon_3=1$ и определяя J_{31} методом, аналогичным использованному выше, а именно,

$$J = \rho_0 \frac{\partial U_3}{\partial \tau} = \rho_0 \frac{\partial U}{\partial \tau} (U_3 = U), \quad (9.180)$$

можно получить систему уравнений тепломассопереноса вида:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = (a_{m1} \Delta U + a_m^T \Delta T),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \left(a + \frac{r_{13}}{c} a_{m1}^T \right) \Delta T + \frac{r_{13}}{c} a_{m1} \Delta U + \frac{c_1}{c} (a_m \text{grad} U + a_{m1}^T \text{grad} T) \text{grad} T, \quad (9.181)$$

где r_{13} – удельная теплота сублимации льда $C = C_0 + C_2 U_2 + C_3 U_3$. Аналогичным образом выводятся уравнения тепломассопереноса и в других случаях.

Одним из важнейших практических приложений теории тепло- и массопереноса во влажных капиллярно-пористых телах является исследование динамики процесса сушки влажных материалов. При этом в уравнении (9.173) конвективной составляющей переноса тепла можно пренебречь по сравнению с кондуктивной составляющей, поскольку при обычных условиях сушки интенсивность влаги сравнительно невелика. При отсутствии градиента общего давления в системе уравнения влаготеплопереноса принимают следующий общий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \tau} = K_{11} \Delta U + K_{12} \Delta T \\ \frac{\partial T}{\partial \tau} = K_{21} \Delta U + K_{22} \Delta T \end{cases}, \quad (9.182)$$

причем

$$K_{11} = a_{m11}, \quad K_{12} = a_{m1}^T = a_m \delta, \quad K_{21} = a_{m1} \frac{r_{12}}{c}, \quad K_{22} = a + a_{m1}^T \frac{r_{12}}{c} \quad (9.183)$$

(для системы $i=1,2$ – жидкость-пар в данном случае). При нестационарном характере, введя коэффициент фазового превращения жидкости в пар $\varepsilon = \frac{diU}{dU}$ (dU – общее изменение влагосодержания, diU – изменение за счет фазового превращения) для K_{12} и K_{22} в (9.184) можно написать:

$$K_{21} = \varepsilon \frac{r_{21}}{c} \frac{a_{m2}}{1-\varepsilon} = \varepsilon \frac{r_{21}}{c} a_m, \quad K_{22} = a + \varepsilon \frac{r_{21}}{c} a_m \delta. \quad (9.184)$$

Источник парообразной влаги в процессе сушки при стационарном потоке влаги выражается как

$$J_2 = -J_1 = \varepsilon \rho_0 \frac{\partial U}{\partial \tau}. \quad (9.185)$$

Более общим является выражение, применимое и в случае нестационарного потока:

$$J_2 = -\operatorname{div} \vec{j}_1 = \operatorname{div} \rho_0 (a_{m1} \operatorname{grad} U + a_m^T \operatorname{grad} T). \quad (9.186)$$

Решение системы (9.182) можно получить численными методами, с использованием современной вычислительной техники, если известны соответствующие коэффициенты переноса a, a_m, a_m^T, C и теплофизические параметры системы.

В современной технике широко используются высокоинтенсивные методы сушки, в которых достигается значительное ускорение процесса. Одним из таких методов является сушка в СВЧ поле. Жидкая влага в реальных капиллярно-пористых телах содержит большое число растворенных солей и обладает вследствие этого хорошей электрической проводимостью и большим значением коэффициента диэлектрических потерь ε'' . В результате при помещении влажного материала в СВЧ поле в материале поглощается значительная мощность в единице объема

$$P = \varepsilon_0 \varepsilon'' \omega E^2, \quad (9.187)$$

где ε_0 – электрическая постоянная, $\omega = 2\pi f$, f – частота поля, E – напряженность электрического поля в материале. Интенсивное поглощение СВЧ энергии вызывает быстрый нагрев жидкости в порах материала (со скоростью до нескольких градусов в секунду), что при приближении температуры к 100°C приводит к интенсивному парообразованию и кипению жидкости в порах. Это, в свою очередь, обуславливает появление больших градиентов внутреннего (избыточного) давления в материале и, вследствие этого, фильтрационный перенос пара и жидкости, который оказывает влияние и на процесс теплопереноса.

В этих условиях общая система уравнений тепломассопереноса применительно к высокоинтенсивному процессу сушки принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \tau} &= K_{11} \Delta U + K_{12} \Delta T + K_{13} \Delta P \\ \frac{\partial T}{\partial \tau} &= K_{21} \Delta U + K_{22} \Delta T + K_{23} \Delta P \\ \frac{\partial P}{\partial \tau} &= K_{31} \Delta U + K_{32} \Delta T + K_{33} \Delta P \end{aligned} \right\} (i, j = 1, 2, 3), \quad (9.188)$$

где

$$\begin{aligned} K_{11} &= a_m, K_{12} = a_m \delta = a_{m1}^T + a_{m2}^T, K_{13} = K_p / \rho_0, K_{21} = \frac{r\varepsilon}{C} a_m, \\ K_{22} &= a + \frac{r\varepsilon}{C} a_m \delta, K_{23} = \varepsilon r \frac{a_m}{C} \delta_p, K_{31} = -\frac{\varepsilon a_m}{C_p}, K_{32} = -\frac{\varepsilon a_m}{C_p} \delta, \\ K_{33} &= a_p = -\frac{\varepsilon a_m}{C_p} \delta_p. \end{aligned} \quad (9.189)$$

Здесь K_p – коэффициент фильтрационного переноса влаги, определяемый из уравнения фильтрационного переноса $\vec{j}_p = -K_p \operatorname{grad} P$; $\delta_p = \frac{K_p}{a_m \rho_0}$ – относительный коэффициент фильтрации; a_p – коэффициент конвективной фильтрационной диффузии; C_p – коэффициент

емкости пористого тела по отношению к влажному воздуху, определяемый из соотношения $d(U_1+U_4)=C_p dP$. При учете зависимости (U_1+U_4) от температуры к величинам K_{3i} ($i=1,2,3$) добавляют, соответственно, $\frac{\varepsilon r}{cT} P a_m \left(a + \frac{r}{c} \varepsilon a_m \delta\right) \frac{P}{T}$ и $\frac{\varepsilon r}{cT} P a_m \delta_p$.

При учете конвективного переноса тепла необходимо в правой части 2-го уравнения (9.188) добавить соответствующую величину $\sum_i C_i \vec{j}_i \text{grad} T$.

В общем случае решение системы (9.188) представляет исключительные математические трудности, причем следует еще учесть, что коэффициенты переноса, входящие в (9.189), далеко не всегда известны с удовлетворительной точностью. Поэтому особый практический интерес представляет исследование ряда частных случаев, в которых эта система может быть существенно упрощена. Рассмотренные ниже случаи относятся к условиям, когда $\Delta P=0$, и процесс сушки описывается системой уравнений (9.182).

Если температура тела мало меняется со временем, то можно положить $\frac{\partial T}{\partial \tau} = 0$. Тогда из второго уравнения (9.182) следует:

$$\Delta U = -\frac{K_{22}}{K_{11}} \Delta T. \quad (9.190)$$

Т. е. в этом случае поля влагосодержания и температуры геометрически подобны. При $\Delta u=0$ $\Delta T=0$, что соответствует тривиальному случаю равновесного состояния тела, $U=\text{const}$ и $T=\text{const}$.

В начальный период сушки влагосодержание изменяется приблизительно по линейному закону: $\frac{dU}{d\tau} = \text{const}$, а $\frac{\partial T}{\partial \tau} = 0$. В этом случае решение уравнений дает параболическое распределение влагосодержания по толщине тела (для простой геометрии тела – неограниченная пластина, длинный цилиндр, шар). Если происходит испарение влаги внутри тела ($\varepsilon \neq 0, K_{12} \neq 0$), то распределение температуры в теле также имеет параболический характер. Если же испарение внутри тела в период постоянной скорости сушки отсутствует ($\varepsilon=0, K_{12}=0$), то температура тела во всех точках тела будет одинаковой. В этом случае $K_{22} \neq 0$ и соотношение (9.190) дает неопределенность вида $0/0$. Тогда из второго уравнения (9.182) при $\frac{\partial T}{\partial \tau}=0$ имеем $\Delta T=0$, и первое уравнение (9.182) принимает вид классического уравнения диффузии:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = K_{11} \Delta U. \quad (9.191)$$

В этом случае перенос влаги при постоянной скорости сушки происходит при изотермических условиях. Из (9.191) следует, что при этом $\Delta U=\text{const}$. Это имеет место при сушке медленно сохнущих коллоидных тел, например, при сушке желатина.

В некоторых случаях, например, при экспериментальном определении термоградиентного коэффициента δ и величин λ и $a = \frac{\lambda}{c\rho}$ для влажного тела, имеет место квазистационарный нагрев с постоянной скоростью при

неизменном влагосодержании: $\frac{dU}{d\tau} = 0$. Тогда из 1-го уравнения (9.182) следует:

$$\Delta U = -K_{12}/K_{11} \Delta T. \quad (9.192)$$

Если $K_{11}=a_m \neq 0$ и $K_{12}=a_m \neq 0$, то поле влагосодержания и температуры оказываются геометрически подобными; при этом локальная скорость нагрева $\frac{\partial T}{\partial \tau} \neq 0$, т. е. профиль температуры внутри тела не изменяется со временем (например, в однородных симметричных задачах имеет место параболическое распределение температуры и, следовательно, также и влагосодержания). По измененным перепадам T и U определяют коэффициенты δ и a .

В некоторых случаях (9.182) сводится к классическому дифференциальному уравнению теплопроводности, рассмотренному выше, в п. 9.4:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = K_{22} \Delta T = a \Delta T. \quad (9.193)$$

Это получается, в частности, для абсолютно сухого тела, в котором массоперенос отсутствует ($U=0$, $K_{11}=K_{12}=K_{21}=0$). То же получается и для предельно увлажненного тела с максимальным влагосодержанием U_{max} (влага набухания); при этом также $K_{11}=K_{12}=K_{21}=0$ ввиду отсутствия переноса влаги, и $\frac{dU}{d\tau} = 0$ (влагосодержание одинаково и постоянно во всех точках тела). Аналогичный анализ системы уравнений термомассопереноса осуществляется и при наличии градиента избыточного давления в материале ($grad P \neq 0$), при допущении о равенстве температуры влаги и скелета тела и справедливости закона Дарси (конвективной диффузии), согласно которому скорость прохождения газа через пористое тело (объемный расход газа) пропорциональна градиенту давления в теле. Все сделанные выше выводы остаются в силе и в этом случае.

Как уже отмечалось выше, решение общей системы уравнений тепло-массопереноса типа (9.188) представляет исключительные математические трудности. Аналитические решения получены лишь для некоторых частных случаев простой геометрии системы и приграничных условий, указанных выше, в п. 9.4. Они обычно имеют очень громоздкий вид, малоприспособленный для инженерных расчетов в практике производства. Поэтому в специальной литературе содержатся графики, таблицы и приближенные формулы, обеспечивающие проведение инженерных расчетов технологических процессов при наличии тепло- и массопереноса типа рассмотренных выше.

9.6 Постановка задач теплообмена и выбор методов их решений

Как видно из вышеизложенного сложность и многообразие теплообменных процессов между различными по природе системами (и

внутри самих систем) не позволяет предложить единый подход для расчетно-теоретического их описания, несмотря на то, что математический аппарат современной науки и техники достиг высочайшего совершенства.

Любое новое математическое описание изучаемых процессов теплообмена включает несколько этапов. На первом этапе осуществляется постановка самой задачи, т. е. ее математическая формулировка. Она предусматривает, прежде всего, формализацию параметров системы (или процессов) и установление их взаимосвязей в виде уравнений или систем уравнений (например, уравнения энергетического баланса, уравнение конвективного движения, уравнение переноса и т. п.). На втором этапе осуществляется рациональный выбор метода решения сформулированной задачи, т.е. составленного на первом этапе уравнения (систем уравнений), которое, как правило, является дифференциальным (обыкновенным или в частных производных), а в некоторых случаях интегро-дифференциальным.

На третьем этапе выполняется процедура решений, в результате которых получаются соотношения между искомыми параметрами в виде общих или частных их зависимостей (формулы, критерии и т. п.). На конечном этапе осуществляется физическая трактовка и осмысление полученных результатов, дается оценка их адекватности поставленной цели, делаются выводы о возможных направлениях практической реализации. Разумеется, что рациональность конкретных действий исследователя на каждом из указанных этапов будет определять конечный успех в решении поставленной задачи. В этом плане приведем некоторые рекомендации. На первом этапе, перед окончательной математической формулировкой задачи, следует провести предварительный общий анализ физических процессов, сопутствующих конкретно рассматриваемому случаю с учетом особенностей системы, в которой протекает теплообмен, и всех возможных факторов, влияющих на теплообмен. Затем следует оценить значимость каждого из них и осуществить «отсев», оставив минимальное их количество. Такая процедура требует привлечения известных сведений, полученных ранее теоретически и экспериментально, использования практического опыта, инженерной эрудиции. Это касается не только составления самих уравнений, но и всей совокупности условий однозначности их решений. Поэтому рассмотрим их более подробно.

Условия однозначности включают и характеристику объекта исследования (для простоты – тела) и источника тепла, начальные и граничные условия.

Характеристиками объекта (тела) являются его геометрические параметры – размеры и форма и физические свойства – плотность ρ , теплоемкость C , теплопроводность χ , которые в общем случае могут быть зависимыми от времени и температуры. Причем эта зависимость может одновременно относиться ко всем этим параметрам или к отдельным из них,

или к сочетаниям (например, вида $(\frac{\rho c}{\lambda})=a$ – называемая температуропроводностью).

Источники тепла могут быть заданы либо по температурным характеристикам, либо по интенсивности (мощности) или по количеству тепла.

Они могут быть для данного объекта внутренними или внешними (т. е. поверхностными). По геометрической форме – точечными, линейными, плоскими и объемными.

По характеру действия во времени источники могут быть непрерывного действия, мгновенного действия, циклического действия (с разными параметрами по интенсивности и времени). По положению (по отношению к телу) они могут быть неподвижными или подвижными (причем с разными параметрами движения, которые должны быть заданы).

В условия однозначности входит начальное распределение температуры (или задание его значения в какой-либо момент времени). Если источник является непостоянным по интенсивности, то необходимо знать закон изменения его интенсивности. Начальные условия могут быть определены по-разному, в зависимости от того, как будет проводиться отсчет по времени температурного состояния объекта.

В условия однозначности входят граничные условия, о которых было указано в предыдущих параграфах. Они могут быть заданы несколькими способами в зависимости от особенностей тепловых процессов на поверхности тела. В граничных условиях I-го рода задается функция распределения температуры по времени в виде $T=f(x, y, z, t)$.

В граничных условиях II-го рода величина плотности теплового потока в каждой точке, для каждого момента времени в виде $q=f(x, y, z, t)$.

В граничных условиях III-го рода задается температура среды, с которой осуществляется теплообмен поверхности тела, с описанием интенсивности теплообмена согласно формулы Ньютона-Рихмана $q=\alpha(T-T_0)$, где α – коэффициент теплоотдачи.

В граничных условиях IV-го рода указывается равенство тепловых потоков на границе соприкосновения двух тел 1 и 2 в виде

$$\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_1 = \lambda_2 \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_2.$$

Правильный выбор граничных условий является важным элементом математической постановки задачи теплообмена. Во многих случаях они допускают упрощения и замены одного на другое, что можно осуществить на основе предварительного качественного анализа всех сопутствующих процессов.

Таким образом, возможности упрощения постановки задач теплообмена в каждом конкретном случае касаются как математической формулировки основного уравнения теплового баланса, так и условий однозначности, включая определения физических свойств изучаемого

объекта, выбора начала отсчета изменений температуры, имитацию реальной формы тел геометрически простыми формами и выбора граничных условий.

Разумеется, что при таком многообразии теплообменных процессов в природе и технике, не может быть единого рецепта упрощения математической постановки задач. Но в литературе имеется множество конкретных примеров, когда такие упрощения эффективно реализованы. Ниже будет рассмотрен один из таких примеров, касающийся математической формулировки уравнения теплопроводности.

В самом общем случае все задачи теплопроводности формулируют на основе нестационарного, нелинейного дифференциального уравнения в частных производных 2-го порядка, вида:

а) в декартовой системе координат:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\rho C T) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q; \quad (9.195)$$

б) в цилиндрической системе координат:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\rho C T) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\chi}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q; \quad (9.196)$$

в) в векторной форме:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\rho C T) = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + q. \quad (9.197)$$

Или, если допустить, что коэффициент теплопроводности не зависит от координат, то уравнение теплопроводности можно записать в операторном виде:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial \tau} = \nabla^2 T + q'; \quad \left(a = \lambda / \rho C \right); \quad q' = q / \lambda \quad (9.198)$$

где набла ∇ – дифференциальный оператор Гамильтона (гамильтониан) $\left(\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k; \nabla \cdot \nabla \equiv \nabla^2 \equiv \Delta \right.$ – оператор Лапласа (лапласиан) $\left. \nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$.

Заметим, что в общем случае задачи теплообмена при строгой их математической формулировке практически всегда выражаются нелинейными уравнениями, причем, имеют место все три вида нелинейности в отдельности или же в совокупности. Нелинейность первого рода – это когда теплофизические параметры системы (тела) зависят от температуры. Нелинейность второго рода – это когда в граничных условиях температура присутствует в нелинейной форме. Нелинейность третьего рода – это когда мощность источника тепла зависит от температуры или времени (причем могут быть зависимы нелинейно).

В общем случае, при строгом учете особенностей физических свойств объектов (тел), участвующих в теплообменных процессах, следует иметь в виду, что тела могут быть анизотропными в отношении теплопроводности. Следовательно, коэффициент теплопроводности λ , входящий в основное уравнение теплопроводности, может быть тензором. Тогда первый член второй части уравнения (9.198) будет

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) = \operatorname{div} \left[\begin{pmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{zy} & \lambda_{zz} \end{pmatrix} \operatorname{grad} T \right]. \quad (9.199)$$

Или, раскрыв первую часть (9.199), и подставив в (9.197) будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho CT) = \left[\left(\lambda_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{xy} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{xz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) i + \left(\lambda_{yx} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{yy} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{yz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) j + \right. \\ \left. + \left(\lambda_{zx} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{zy} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{zz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) k \right] + q. \quad (9.200)$$

Если рассматриваемую систему можно считать изотропной, то тогда общее уравнение теплопроводности (9.197) принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\rho CT) = \lambda \operatorname{div}(\operatorname{grad} T) + \operatorname{grad} T \cdot \operatorname{grad} \lambda + q. \quad (9.201)$$

Если компоненты тензора не зависят от координат, то уравнение (9.200) принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\rho CT) = \lambda_{xx} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_{yy} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \lambda_{zz} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + (\lambda_{xy} + \lambda_{yx}) \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + (\lambda_{xz} + \\ + \lambda_{zx}) \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial z} + (\lambda_{zy} + \lambda_{yz}) \frac{\partial^2 T}{\partial z \partial y}. \quad (9.202)$$

Вводя новую систему координат (ζ, η, ξ) вместо (x, y, z) с соответствующим изменением граничных условий, уравнение (9.202) может быть преобразовано к виду:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\rho CT) = \lambda_{xx} \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \lambda_{yy} \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + \lambda_{zz} \frac{\partial^2 T}{\partial \zeta^2} + q. \quad (9.203)$$

Таким образом, сложное уравнение теплопроводности с учетом анизотропности объекта (тела) исследования (по отношению теплопроводности) удалось упростить, сведя ее к уравнению теплопроводности для описания температурного поля в изотропном объекте (теле).

Вместе с тем, следует заметить, что при постановке задачи теплопроводности не всегда целесообразно ее упрощать. Наоборот, можно ее сформулировать так, чтобы получить обобщенное решение, из которого автоматически будут следовать различные частные случаи. Приведем такой простой пример. Пусть на торце тела круглой цилиндрической формы могут действовать различные виды источников тепла: точечный (в центре); круглый (центрально симметричный) по всему торцу; по симметричной кольцевой площадке. Если задачу сформулировать по последнему из этих вариантов, т.е. источник тепла $q(r)$ действует по кольцевой площадке $r_1 \leq r \leq r_2 = R$ (где R – радиус цилиндра), то решение задачи в виде $T(r)$ дает возможность описания всех указанных частных случаев, варьируя значениями r_1 и r_2 (более подробно о постановке и решении такой задачи см. приложение «В»).

Завершая краткое рассмотрение первого этапа постановки задач теплопроводности, следует упомянуть еще об одном возможном процедурном методе предварительного анализа – так называемом методе суперпозиции. Принцип суперпозиции известен в теоретической физике

(квантовой механике и электродинамике) как выражение фундаментальных свойств полей, описываемых обычно линейными дифференциальными уравнениями. В теории теплообмена в трансформированном виде этот принцип в ряде случаев используется для упрощения решения ее сложных задач и реализуется как принцип элементарной суперпозиции (ПЭС) и как принцип сложной суперпозиции (ПСС). Хотя применимость этого принципа в теории теплообмена существенно ограничена, тем не менее, в инженерной практике он используется в ряде случаев довольно эффективно. Укажем основные его положения.

1. Если на тело действует несколько источников тепла (объемных или поверхностных), которые не зависят друг от друга и не влияют друг на друга ни по каким-либо параметрам (геометрии, температуре, мощности и т. п.), то производимый ими результат действия на тело является суммой действий каждого источника.

2. Действие любого отделенного источника эквивалентно сумме действий нескольких источников, расположенных в том же месте, что отдельный, и имеют ту же мощность.

3. Если зона действия источника не соприкасается с зоной действия других источников (т. е. является автономной), то температурное поле в этой зоне определяется только одним источником.

4. Если зоны действия нескольких источников «перехлестываются», то температуры в этих зонах определяются действиями всех источников, начиная с момента начала «перехлестывания».

Принцип суперпозиции применим в том случае, если объемная теплоемкость « $C\rho$ », коэффициент теплопроводности « λ », коэффициент температуропроводности « a » остаются постоянными за рассматриваемый период времени и в рассматриваемом температурном диапазоне. Если же условия однозначности существенно зависят от температуры, принцип суперпозиции нельзя применять. Математически это означает, что дифференциальные уравнения теплопроводности (9.185 – 9.198) становятся нелинейными.

Одним из приемов приближенного инженерного расчета теплообменных процессов является использование средних значений теплофизических параметров ($C\rho$, λ , a), входящих и в уравнение теплопроводности и в условия однозначности их решений. В этих случаях следует использовать, по возможности, имеющиеся теоретические и экспериментальные (эмпирические) зависимости этих параметров от температуры и времени и определять их средние значения в виде:

$$a_{\text{ср}} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} a(t) dt. \quad (9.204)$$

Если рассматриваемые процессы заключены в небольшом температурном диапазоне от T_1 до T_2 ($\Delta T = T_2 - T_1$) достаточно знать, хотя бы приближенно, значение этих параметров при двух-трех значениях

температуры и, пользуясь методами интерполяции и экстраполяции, можно найти средние значения.

Итак, первый этап постановки задачи – это создание математической модели изучаемого процесса (объекта). Дальнейшие действия – это получение в какой-либо форме (аналитической, графической, численной) характеристик (параметров) зависимости изучаемого объекта на основе созданной математической модели. Это уже второй этап постановки задачи. Перейдем к очень краткому, но непосредственному рассмотрению этого этапа математического описания процессов теплообмена, т. е. к выбору методов решения сформулированной на первом этапе задачи в виде тех или других уравнений с соответствующими условиями однозначности. Фактически этот этап является сугубо математической частью общей решаемой задачи теплообмена и, естественно, опирается на хорошо разработанный аппарат классической и современной математики, включая вычислительную технику с использованием ЭВМ. Нам остается лишь перечислить наиболее употребительные из них, рекомендуя читателю обратиться к специальной литературе, применительно к особенностям решаемой конкретной задачи.

Уравнение теплопроводности относятся к широкой группе уравнений математической физики. Обычно это уравнения в частных производных 2-го порядка параболического типа или эллиптического типа (для стационарного случая). Как было показано выше самое общее и сложное уравнение теплопроводности вида (9.195) всегда может быть преобразовано и приведено к уравнению относительно простого вида (9.203). Поэтому достаточно указать методы решения уравнений этого типа.

В общем, все современные методы решения задач теплопроводности можно разделить укрупнено на четыре группы: аналитические методы, численные методы, графические (графоаналитические) методы и методы физического (в основном электрического) моделирования. Достоинством аналитических методов является то, что они (если их можно реализовать в том или другом случае), позволяют получить результат в наиболее общих выражениях в виде аналитических зависимостей параметров рассматриваемых объектов (процессов). Они являются классическими, имеют давнюю историю разработок, но их применимость (без тех или иных упрощений) ограничена.

Существует ряд аналитических методов. Это метод разделения переменных – метод Грина, метод Римана, метод интегральных преобразований, операционный метод. Каждый из них имеет свои формы реализации и предпочтительные области применения. Но в целом для решения задач теплопроводности непосредственная применимость их ограничена требованиями линейности самих уравнений и граничных условий к ним. Методы интегральных преобразований в двух своих разновидностях (преобразование по отношению временных координат или преобразование в отношении пространственных координат) обладают наибольшей общностью

в применении по сравнению с другими аналитическими методами, хотя области их эффективной реализации также существенно ограничены.

Более мобильными и разносторонними в применении являются численные методы, среди которых особое место занимают конечно-разностные методы. Они позволяют решать широкий класс уравнений, в том числе и нелинейных (т. е. с параметрами, зависящими от времени и координат). К достоинствам конечно-разностных методов относится возможность достижения высокой точности решения поставленной задачи, поскольку она зависит от оператора, который может выбрать тот или другой шаг изменений по времени Δt и по координате Δx при составлении конечно-разностных аналогов решаемых дифференциальных уравнений. Известно, что при их выборе должно удовлетворяться условие устойчивости решения аналоговых уравнений, которое формулируется в виде $a \Delta t / \Delta x^2 \leq \frac{1}{2}$, где a – температуропроводность. Причем выполнение этого условия целесообразно добиваться за счет уменьшения Δt .

В заключение этого параграфа следует отметить еще один, относительно молодой метод, получающий все более широкое признание в инженерной практике. Это метод физического (в основном электрического) моделирования явлений теплообмена, который основан на существовании формальной электротепловой аналогии.

Эта аналогия наглядно прослеживается при рассмотрении теплового потока, проходящего, например, через плоскую пластинку толщиной δ , на противоположных гранях которой площадью F поддерживается разность температур $(T_2 - T_1)$.

Из закона Фурье следует, что тепловой поток через пластинку за время τ будет определяться выражением:

$$Q = \frac{\lambda}{\delta} (T_2 - T_1) F \tau. \quad (9.205)$$

Тепловой поток за единицу времени

$$Q^* = \frac{Q}{\tau} = \frac{\lambda F}{\delta} (T_2 - T_1), \quad \frac{\delta}{\lambda F} = \frac{T_2 - T_1}{Q^*} = R_T. \quad (9.206)$$

Если к этой же пластине, обладающей сопротивлением R_3 приложить разность потенциалов $(U_2 - U_1)$, то электрический ток через пластину будет определяться

$$I = \frac{U_2 - U_1}{R_3}, \quad R_3 = \frac{U_2 - U_1}{I}, \quad R_3 = \rho \frac{\delta}{F} = \frac{1}{\sigma F}. \quad (9.207)$$

Из сравнений (9.205), (9.206) и (9.207) следует, что разность температур $(T_2 - T_1)$ соответствует разности потенциалов $(U_2 - U_1)$, электрическому току I – тепловой поток Q^* за единицу времени, тепловому сопротивлению R_T – электрическое сопротивление R_3 , коэффициенту теплопроводности λ – удельная электрическая проводимость σ .

Для наглядности приведем сводку аналогий между тепловыми и электрическими соотношениями в следующем виде:

Соотношения теплопроводности	Соотношения электропроводности	(9.208)
$dQ = -\lambda \frac{\partial T}{\partial t} dF$	$dI = -\sigma \frac{\partial U}{\partial t_3} dF_3$	
$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$	$\frac{\partial U}{\partial t_3} = \frac{1}{R_3 C_3} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y_3^2} \right)$	
$\frac{\Delta T}{\lambda/a} = -gradT$	$\frac{\Delta U}{l_3} = -gradU$	
$dQ = C \frac{\partial T}{\partial t} dt$	$dI = C_3 \frac{\partial U}{\partial t_3} dt_3$	

В (9.208) обозначены соответственно: T и U - температура и электрический потенциал; t и t_3 - время; dQ и dI - поток теплоты и электрический ток (в элементарном выражении); λ и σ - коэффициент теплопроводности и удельная электропроводность; C и C_3 - теплоемкость и электрическая емкость, отнесенная к единице длины; a - коэффициент температуропроводности; R_3 - электрическое сопротивление единицы длины; l_3 - линейный размер, являющийся аналогом отношения λ/a .

Существование аналогий между тепловыми и электрическими величинами приводит к далеко идущим возможностям моделирования. Прежде всего, следует отметить, что использование электротепловых аналогий снимает многие ограничения в решении задач теплообмена, связанные, в частности, с нелинейностью дифференциальных уравнений и граничных условий, зависимостью теплофизических параметров от температуры и др. Кроме этого, решение, как правило, сложных задач теплообмена, при использовании электрических моделей сводится к решению относительно простых уравнений электротехники (например, правил Кирхгофа для разветвленных электрических цепей, в которых тепловые сопротивления моделируются электрическими сопротивлениями). Конечно, чем сложнее рассматриваемые тепловые процессы, тем больше могут усложняться и соответствующие электрические модели. Например, если модели осуществляются в виде простых R -сеток, то для сложных тепловых процессов могут приняты RC и RCL сетки. Более того, если в тепловых процессах участвуют не только твердые тела, но и жидкости, то может стать необходимым использование электролитических ванн и усложненных гибридных аналогов. Для более подробного ознакомления с вопросами моделирования следует обратиться к специальной литературе, а с конкретными примерами решения задач теплообмена можно ознакомиться по приложению «Б» к этому тому.

ГЛАВА 10 ТЕРМОДИНАМИКА

10.1 Термодинамика как отрасль науки и техники

Новые отрасли науки и техники формируются в основном двумя путями – дифференциацией ранее сложившихся укрупненных отраслей науки и техники и, наоборот, интеграцией нескольких направлений (ответвлений) различных отраслей науки и техники. Возможны и сочетания этих путей. Так, например, по первому пути сформировались, как самостоятельные отрасли, математика, механика, физика, астрономия и др. из некогда единой в античный период натурфилософии. Затем эти отрасли достигли такого уровня развития, что из них сформировались самостоятельные научные дисциплины. Так, например, из общей физики выделились такие самостоятельные дисциплины как физика твердого тела (причем с дифференциацией – физика металлов, физика диэлектриков, физика полупроводников), электрофизика (с дифференциацией – электродинамика, физика плазмы, электроника и др.), молекулярная физика (с дифференциацией – физика жидкостей и связанная с ней гидродинамика, физика газов и связанная с ней аэродинамика, атомная и ядерная физика и т. д.). По второму пути, т. е. интеграцией направлений (ответвлений) из разных отраслей науки сформировались такие новые научно-технические дисциплины как автоматика, кибернетика, информатика, космонавтика, компьютерные технологии и др.

Термодинамика как самостоятельная отрасль науки и техники, начала свое формирование в 19 столетии. Первые ее научные основы определились с работ французского инженера С. Карно, изложенных им в трактате «Размышления о движущей силе огня и машинах, способных развивать эту силу». В последующие годы работами выдающихся ученых Клаузиуса, Гельмгольца, Больцмана, Гиббса, Джоуля, Майера, Ленца, Планка и др. были разработаны основы и базовые понятия современной термодинамики. Ее можно определить как раздел физики, в котором изучаются свойства макроскопических систем в условиях термодинамического равновесия, а также процессы и закономерности, приводящие системы в это состояние. Объектами и методами изучения различных систем термодинамика тесно соприкасается с другими разделами физики: молекулярной физикой, изучающей атомно-молекулярное строение и свойства вещества в различных его агрегатных состояниях; теплофизикой, изучающей процессы тепло- и массообмена между телами и частями систем; статистической физикой, изучающей с позиции теории вероятностей свойства и состояния систем, состоящих из больших статистических ансамблей частиц. Первые два из указанных разделов физики были кратко рассмотрены в предыдущих главах. Приведенные в них сведения имеют непосредственное отношение к термодинамике, поскольку газы и жидкости являются рабочими телами многих устройств, изучаемых технической термодинамикой. Предметом

изучения статистической физики, как и термодинамики, являются системы из газов, жидкостей и твердых тел. Несмотря на принципиально различную методологию и существенные отличия круга решаемых задач, между термодинамикой и классической статистической физикой в ряде случаев обнаруживаются аналогии. Так, и в термодинамике (при изучении условий термодинамического равновесия), и в статистической физике (при изучении статистического равновесия) рассматриваются и открытые и закрытые системы. Причем в подходах к способам выделения из открытых систем подсистем, которые можно считать закрытыми, имеется аналогия, также как имеется аналогия между термодинамическим равновесием и статистическим равновесием, привлечением в обоих предметах фундаментального понятия энтропии, как функции состояния рассматриваемых систем и т.п. Вместе с тем, следует подчеркнуть, что в термодинамике при анализе условий термодинамического равновесия систем и путей его достижения исходят из закономерностей теплообменных процессов, не привлекая к рассмотрению индивидуальных характеристик и свойств элементарных частиц, как носителей энергии. В статистической физике, наоборот, при анализе условий статистического равновесия в системе, представляющей собой ансамбль большого числа частиц N (т. е. статистически значимого числа частиц в рассматриваемом объеме), опираются на знания индивидуальных характеристик элементарных носителей энергии, определяя их через координаты и импульсы. Всевозможные значения координат и импульсов образуют в совокупности виртуальное $6N$ – мерное фазовое пространство. При этом состояние системы определяется ее положением в этом пространстве, как вероятностное событие. Каждой точке фазового пространства соответствует определенная энергия, причем термодинамическому равновесию соответствует наиболее вероятное распределение по энергиям. В отличие от такого статистического подхода, как было указано выше, в классической термодинамике рассматриваются возможные тепловые состояния макросистем и пути достижения равновесного состояния и свойства систем в этом состоянии.

Современная термодинамика стала развитой отраслью науки и техники. Ее научные основы продолжают развиваться и являются сферой изучения так называемой физической термодинамики (классической и статистической). Сферы приложения законов термодинамики в технике являются предметом изучения технической термодинамики. Кроме этого существуют специальные ее ответвления как химическая термодинамика, биологическая термодинамика, космологическая термодинамика и др.

10.2 Основные термодинамические понятия и соотношения

С развитием термодинамики, как самостоятельной отрасли науки и техники, сложился ее специфический понятийный аппарат. Приведем (в виде сводки) основные термодинамические понятия.

1. Термодинамические системы – это широкая область (часть) материального мира, включая образования из тел (веществ) и полей во всевозможных состояниях. Системы могут охватывать субмакроскопические образования из макроскопических тел в различных формах и состояниях (в том числе агрегатных). Причем эти образования могут быть отнесены и к объектам Вселенной. Системы могут быть образованы из макроскопических тел (молекул и атомов), а также из элементарных частиц (субмикроскопические образования).

2. Подсистема – это некоторая часть общей системы, которая обладает всеми характерными свойствами полной системы, в тоже время имеет свои локальные специфические свойства.

3. Объекты и предметы изучения – в термодинамике они рассматриваются как системы и подсистемы. Они могут быть физическими (даже виртуальными), техническими, химическими, биологическими. В технической термодинамике предметами изучения являются энергообменные процессы в агрегатах, машинах и механизмах, аппаратах и приборах и т. п. В термодинамике как синоним объекта (предмета) часто используется понятие «тела» (твердого, жидкого, газообразного), рассматривая его как источник, приемник и передатчик тепловой энергии.

4. Открытые системы. Это системы, которые не изолированы от внешней среды (и других систем), от воздействия, и поэтому могут обмениваться с ней энергией, в том числе тепловой. Все системы в природе, строго говоря, по существу являются открытыми, так как абсолютную изоляцию систем принципиально невозможно осуществить. Между различными системами (или систем со средой) существует всегда обмен электромагнитным излучением, так как абсолютная температура всегда отлична от нуля ($T > 0$).

5. Закрытые системы. Это гипотетические системы, которые могут быть условно (в приближении) отделены от других систем и внешней среды, если за рассматриваемый промежуток времени обменом энергии между ними (в том числе тепловой) можно практически пренебречь, что в ряде случаев используется при проведении расчетов тех или других энергообменных процессов между системами.

6. Стационарное, квазистационарное и нестационарное состояние. Стационарное состояние системы означает, что все свойства и параметры системы, значимые для рассматриваемых процессов не изменяются со временем. Если они изменяются, но настолько медленно за рассматриваемый период, что эти изменения практически не влияют на свойства и параметры систем, то системы можно считать квазистационарными. В противном случае системы являются нестационарными, и необходимо учитывать временной фактор при рассмотрении процессов в системах.

7. Энергия, работа, движение. Физические понятия, широко используемые в термодинамике в концепции изучения энергообменных процессов в системах (и между ними). Энергия – это универсальная мера

количественного выражения всех форм движения материи и взаимодействий в материальном мире. Работа проявляется в превращении энергии в ту или иную форму движения. При этом под движением следует понимать не только перемещение тел в пространстве в той или иной форме, но и другие изменения состояния, в том числе и тепловые. В этой связи небезынтересно привести слова С. Карно «Повсюду, где работа исчезает, имеет место возникновение теплоты». Формы энергии различны и проявляются в виде механической, тепловой, химической, электромагнитной, гравитационной, ядерной и др. Изменение энергии в системе связано с изменением внутренней ее энергии и совершением внешней работы при сохранении суммарной энергии неизменной.

8. Термодинамическое равновесие – это такое наиболее вероятное состояние системы, в которое она неизбежно должна прийти с течением времени (большим или меньшим по продолжительности) без внешнего вмешательства. На практике обычно различают полное, локальное и частичное термодинамическое равновесие. Полное равновесие означает, что оно соблюдается для всей системы; локальное равновесие означает, что оно имеет место в некоторой ограниченной области пространства (части системы), т.е. в той или иной подсистеме; частичное термодинамическое равновесие означает, что оно имеет место для одной составляющей всей системы, тогда как для других составляющих – оно не соблюдается. Например, в плазме газового разряда, которая состоит из нейтральных частиц (атомов и молекул), ионов, образованных из этих частиц, и электронов, в частичном термодинамическом равновесии может находиться в некоторый период времени электронный газ, в то время как газ из тяжелых частиц – атомов и ионов – по своим термодинамическим параметрам (температуре) отличается от параметров электронного газа. Причем, частичное равновесии может быть и для газа из тяжелых частиц.

9. Энтропия (S). Это функция состояния систем. Она является всеобщей энергетической характеристикой состояния системы и определяется как логарифм числа допустимых состояний и характеризует направления изменений состояний. Например, энтропия газа $S = \ln(g/NU)$, где N – число частиц в системе, U – энергия системы. Каждому состоянию соответствует определенное значение энтропии. В условиях термодинамического равновесия энтропия максимальна. При движении системы к равновесию энтропия возрастает. Энтропия системы аддитивно определяется энтропией ее подсистем.

10. Степень свободы – число независимых координат, определяющих положение материальной точки (объекта). Для одной точки степень свободы пространства равна 3.

11. Энтальпия (H) – это тепловая функция, характеризующая теплосодержание системы. В состоянии термодинамического равновесия энтальпия минимальна. Для идеального газа справедливо соотношение

$H=U+PV$, где H – энтальпия, U – внутренняя энергия, P – давление, V – объем газа.

12. Свободная энергия (F) – энергия, которая соответствует величине работы, которую может совершить система при постоянной температуре. Свободная энергия минимальна для систем в условиях равновесия при постоянном объеме.

13. Термодинамический потенциал (Φ). Это функция независимых переменных – макроскопических параметров системы, которые математически описывают состояние системы при тех или других изменениях этих параметров.

14. Адиабатические процессы – это процессы, при которых система не обменивается тепловой энергией с другими системами (или внешней средой).

Сводка основных термодинамических соотношений.

1. Уравнения Гиббса-Гельмгольца:

$$\begin{aligned}U &= F - T \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V, & U &= H - P \left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_S \\F &= \phi - P \left(\frac{\partial \phi}{\partial P} \right)_T, & F &= U - S \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_V \\H &= U - V \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_S, & H &= \phi - T \left(\frac{\partial \phi}{\partial T} \right)_P \\ \phi &= F - V \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T, & \phi &= H - S \left(\frac{\partial H}{\partial S} \right)_P\end{aligned}$$

2. Соотношения взаимности (соотношения Максвелла):

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_S &= \left(\frac{\partial V}{\partial S} \right)_P, & \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T &= \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \\ \left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_T &= - \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P, & \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_S &= \left(\frac{\partial P}{\partial S} \right)_V \\ \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_S &= \left(\frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V} \right)\end{aligned}$$

3. Теплоемкости C_V и C_P :

$$\begin{aligned}C_V &= \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = -T \left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \right)_V \\ C_P &= \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_P = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P = -T \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial T^2} \right)_P \\ \left(\frac{\partial C_V}{\partial V} \right)_T &= T \left(\frac{\partial^2 P}{\partial T^2} \right)_V \\ \left(\frac{\partial C_P}{\partial P} \right)_T &= -T \left(\frac{\partial^2 V}{\partial T^2} \right)_P\end{aligned}$$

4. Соотношения между функциями состояния и их частными производными:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial P} \right)_T = T \left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_T - P \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_T &= -T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P - P \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \\
\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T &= T \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T - P \\
\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V &= T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P \\
\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P &= C_P - P \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \\
\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_V &= C_V + V \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \\
\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T &= T \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T + V = -T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P + V \\
\left(\frac{\partial H}{\partial V}\right)_T &= T \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T + V \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \\
\left(\frac{\partial H}{\partial V}\right)_T &= T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V + V \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \\
\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S &= -\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_P \cdot \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = -\frac{T}{C_V} \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \\
\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S &= -\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_P \cdot \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = -\frac{T}{C_P} \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \\
\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P &= -\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S \\
\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P &= \frac{C_P}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_S = -\frac{C_P}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S \\
\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S &= \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S \\
\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S &= \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_P \\
\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S &= \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T + \frac{T}{C_P} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P^2 \\
\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S &= \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T - \frac{T}{C_V} \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V^2
\end{aligned}$$

В приведенных соотношениях: S – энтропия; V – объем; T – температура; P – давление; C – теплоемкость.

Термодинамика исследует различные процессы, связанные с взаимопревращением тепловой и механической энергии, т. е. с передачей тепла и совершением работы. Эти процессы рассматриваются в системах больших тел, из огромного количества молекул, в совокупности характеризуемых усредненными («макроскопическими») величинами – параметрами состояния, которые не имеют физического смысла для отдельных молекул или небольшого их числа. Методы термодинамики, в

которой не анализируются индивидуальные особенности веществ на молекулярном уровне, обладают в связи с этим большой общностью.

Помимо этого общенаучного значения, термодинамика имеет огромное количество практических приложений, поскольку процессы взаимопревращения механической и тепловой энергии лежат в основе действия многих тепловых машин и других технических устройств. Именно работы по созданию этих машин послужили мощным стимулом для разработки научных основ термодинамики. В связи с развитием авиации, а затем и космонавтики появилась необходимость в новых мощных, двигателях – реактивных (воздушно-реактивных, жидкостно-реактивных и др., работающих в воздушной атмосфере) и ракетных (работающих и в открытом Космосе). Создание этих двигателей было осуществлено на основе достижений термодинамики и, в свою очередь, стимулировало разработку новых методов термодинамических исследований. Вся история термодинамики, таким образом, является ярким примером неразрывного единства физической науки, техники и общественно производственной практики.

В технике встречаются весьма разнообразные термодинамические системы, которые содержат рабочие тела (например, газы), получающие тепло от внешних нагревателей и отдающих тепло холодильникам. При этом рабочее тело, может совершить работу над окружающими телами, или же, напротив, над ним совершается работа внешними телами. В некоторых случаях термодинамическая система может считаться изолированной, если она практически не взаимодействует с внешней средой. Особенностью такой системы является неизбежный ее переход с течением времени в состояние термодинамического равновесия, в котором физические параметры состояния могут испытывать лишь небольшие случайные отклонения от установившихся («стационарных») значений. Воздействие извне приводит к отклонению системы от равновесия, и параметры состояния закономерно изменяются с течением времени, причем взаимосвязанным образом; в таких случаях говорят, что в системе совершается термодинамический процесс. Во многих случаях после протекания ряда изменений в системе она возвращается в состояние, в котором значения параметров близки к исходным; тогда говорят о круговом термодинамическом процессе в системоцикле. Если в результате этого в окружающих систему телах не произошло никаких физических изменений, то цикл является обратимым (в противном случае – необратимым). В реальных условиях любой термодинамический процесс, строго говоря, является необратимым. Однако понятие об обратимых процессах имеет большое значение, поскольку позволяет установить «теоретические» («предельные») показатели работы различных тепловых машин (примеры этому будут даны ниже).

Во многих практически важных случаях термодинамическая система может считаться закрытой, т. е. не обменивающейся веществом с окружающей средой (по крайней мере, в течение определенного времени). В

отличие от «технических» машин, живые организмы («биологические машины») принципиально являются «открытыми» системами, поскольку обмен веществ между организмом и окружающей средой является необходимым условием его жизнедеятельности. Поэтому за последнее время «биологическая» термодинамика, использующая методы термодинамики открытых систем, практически обособилась в отдельную прикладную научную дисциплину. Мы кратко рассмотрим в дальнейшем лишь некоторые её основные представления.

10.3 Первое начало термодинамики

Состояние термодинамической системы характеризуется, уже упоминавшимися выше физическими параметрами (давление, температура, удельный объем) и энергетическими или «калорическими» параметрами (удельная теплоемкость, удельная внутренняя энергия и др.). Каждый из этих параметров, как было рассмотрено выше, имеет свой «молекулярно-кинетический» смысл. Так, давление в газе, паре или жидкости характеризует суммарное «силовое» воздействие молекул на стенки сосуда. Температура определяет среднюю кинетическую энергию молекул. Ввиду наличия процессов обмена энергией между молекулами в равновесном состоянии температура во всех точках термодинамической системы становится одинаковой. При заданных давлении и температуре газа определенная его масса занимает определенный объем, который определяется уравнением состояния газа. Отметим попутно, что именно эта возможность значительного изменения объема газа при изменении других параметров газа дает возможность использовать его в качестве рабочего тела в тепловых машинах для совершения работы. Объем данной массы жидкости или твердого тела очень слабо зависит от параметров состояния, и потому использование этих веществ в качестве рабочих тел значительно менее распространено.

Как указывалось в гл. 6, реальные газы подчиняются уравнению состояния Менделеева-Клапейрона лишь при достаточно малых плотностях и не слишком низких температурах, когда можно не учитывать явления конденсации, т. е. фазового превращения газа в жидкость. На практике оказывается, что условия работы во многих тепловых машинах (двигателях внутреннего сгорания, жидкостно-реактивных двигателях, газотурбинных установках и т. д.) достаточно хорошо соответствует этим требованиям, что позволяет использовать при их практических расчетах уравнение состояния идеального газа. Для ед. массы газа оно имеет вид:

$$PV=RT, \quad (10.1)$$

где V – удельный объем, R – удельная газовая постоянная в Дж/кг*К.

$$R = \frac{8314,3}{\mu} \quad (10.2)$$

(μ – молекулярная масса газа).

Во многих технических машинах используются смеси газов, типичным примером которых является воздух. Согласно закону Дальтона, общее давление смеси P считается равным сумме парциальных давлений компонентов смеси P_i :

$$P = \sum_i P_i. \quad (10.3)$$

Молекулярная масса смеси определяется по формуле:

$$\mu = \frac{\sum m_i}{M}, \quad (10.4)$$

где M – полное число молей в смеси, m_i – массы отдельных компонентов (таким путем для воздуха получается значение $\mu \approx 29$ и $R \approx 280$ Дж/кг*К).

Задачей прикладной термодинамики является описание термодинамических процессов в реальных термодинамических системах – тепловых, холодильных машинах и других установках, т. е. получение количественной характеристики изменений со временем указанных параметров состояния. Эта задача в термодинамике решается «энергетическим» способом, на основе рассмотрения взаимопревращений механической и тепловой энергии, как уже указывалось выше.

В реальных телах содержится энергия всевозможных видов, которые были указаны выше. Однако при термодинамическом рассмотрении некоторые из указанных видов энергии считаются «пассивными», т. е. не участвующими в процессах взаимопревращения энергии. Таким образом, полную энергию термодинамической системы при этом представляют в виде суммы:

$$E = W + U, \quad (10.5)$$

где W – механическая энергия системы как целого, («внешняя энергия»), U – внутренняя энергия системы, складывающаяся из кинетической энергии движения и потенциальной энергии взаимодействия образующих ее молекул. Внутренняя энергия является «функцией состояния» в том смысле, что при изменении состояния (т. е. характеризующих его физических параметров) внутренняя энергия изменяется на некоторую величину ΔU , зависящую только от начального и конечного состояний и не зависящую от способа перехода между этими состояниями.

Существуют два принципиально различных способа изменения внутренней энергии тела – сообщение ему некоторого количества теплоты или совершение над ним работы. Опыты показали, что эти способы изменения внутренней энергии являются эквивалентными, т. е. между ними существуют точные количественные соотношения. Поэтому количество теплоты, работа и энергия (всех видов) могут изменяться в одних и тех же единицах (в СИ – Дж).

Элементарная работа dA^l , совершаемая над рабочим телом (газом) при изменении его объема на dV при постоянном давлении P , определяется формулой:

$$dA^l = F \cdot \Delta l = P S \Delta l = -P dV, \quad (10.6)$$

здесь dl – перемещение «границы» газа на участке, с площадью S , например поршня в цилиндре; знак минус означает, что объем газа при его сжатии уменьшается.

При переходе из состояния 1 в состояние 2 с конечным изменением объема газа работа определяется выражением:

$$A^I = \int_1^2 P dV. \quad (10.7)$$

Элементарное количество теплоты dQ , переданное телу, изменяет его температуру на dT , так что

$$dQ = mcdT, \quad (10.8)$$

где m – масса, c – удельная теплоемкость тела.

Поскольку эти два способа воздействия на систему являются единственными путями изменения ее внутренней энергии в рамках термодинамического рассмотрения и являются эквивалентными согласно огромному количеству экспериментальных данных, то изменение dU при наличии обоих воздействий на систему должно быть равно:

$$dU = dQ + dA^I. \quad (10.9)$$

Эта формула выражает закон сохранения и превращения энергии двух видов – механической и тепловой – применительно к термодинамической системе и является одной из возможных записей первого начала закона термодинамики – одного из основных ее теоретических положений. Ясно, что приведенные формулы отнюдь не являются «выводом» этого закона, который является только обобщением огромного количества опытных данных.

Заменим теперь работу над системой dA^I величиной работы dA , совершаемой системой над внешними телами. Очевидно, что

$$dA^I = -dA, \quad (10.10)$$

тогда вместо (10.9) имеем:

$$dU = dQ - dA, \quad (10.11)$$

$$dQ = dU + dA. \quad (10.12)$$

Это означает, что сообщаемое системе количество теплоты dQ расходуется на увеличение ее внутренней энергии и совершение работы против внешних сил. Отнеся все величины к 1 кг газа, и учитывая (10.6), вместо (10.12) напомним:

$$dq = dU + pdV. \quad (10.13)$$

Разумеется, все формулы (10.9, 10.11, 10.12, 10.13) являются совершенно эквивалентными выражениями первого начала термодинамики. Выбор того или иного выражения зависит от конкретной задачи. Во многих случаях оказывается удобным ввести еще одну функцию состояния термодинамической системы – энтальпию или теплосодержание:

$$H = U + pV. \quad (10.14)$$

Тогда, учитывая, что $d(pV) = pdV + Vdp$ можно привести (10.13) к виду:

$$dq = dH - Vdp. \quad (10.15)$$

Удельные теплоемкости (10.108) при постоянном объеме (C_p) и постоянном давлении (C_p) выражаются формулами:

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V, \quad C_P = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_P. \quad (10.16)$$

Представим себе некоторый тепловой двигатель, который работает по определенному циклу, с периодическим возвращением системы в исходное состояние, без сообщения энергии извне, т. е. при $dQ=0$. За один цикл работы двигателя $dU=0$ (в противном случае эта машина не будет «двигателем», ее состояние будет необратимо изменяться с течением времени). Тогда из первого начала термодинамики, в виде (10.12) следует, что и $dA=0$. Таким образом, этот закон устанавливает невозможность построения «вечного двигателя 1 рода», т. е. периодически действующей машины, совершающей работу без подвода энергии извне. Отметим, что этот закон термодинамики относится к закрытым системам, не обменивающимся с окружающей средой, что является во многих его приложениях принципиальным.

Рассмотрим далее применение первого начала термодинамики к анализу некоторых конкретных термодинамических процессов. Наибольший практический интерес при этом представляет вычисление работы, совершаемой системой в данном процессе. Согласно (10.6), (10.7) и (10.10), имеем:

$$A = \int_1^2 p dV. \quad (10.17)$$

Если же система совершает замкнутый цикл, то полная работа за цикл определяется формулой (см. рис.10-1):

$$A = \int_1^2 p dV = - \int_2^1 p dV. \quad (10.18)$$

Обычно процессы удобно представлять графически на « p – V –диаграммах». Количественно работа выразится заштрихованной площадью на рис. 10.1. В зависимости от направления циклического процесса, работа системы может быть положительной (рис. 10.1а) или отрицательной (рис. 10.1б). Как мы увидим ниже, первый случай является характерным для тепловых машин, а второй – для холодильных машин.

Тепловые процессы в реальных условиях могут быть весьма разнообразными. В «классической» термодинамике (рассматриваемой здесь) изучаются главным образом обратимые и равновесные процессы, т. е. осуществляемые при отсутствии значительных изменений в окружающей среде и проходящие через состояния, близкие к равновесным (т. е. достаточно «медленные»). Кроме того, большинство рассматриваемых в технической термодинамике процессов относятся к классу «политропных». Для них сообщаемое системе (на 1 кг) количество теплоты dq закономерным образом распределяется на увеличение внутренней энергии dU и на совершение работы da , так что отношение

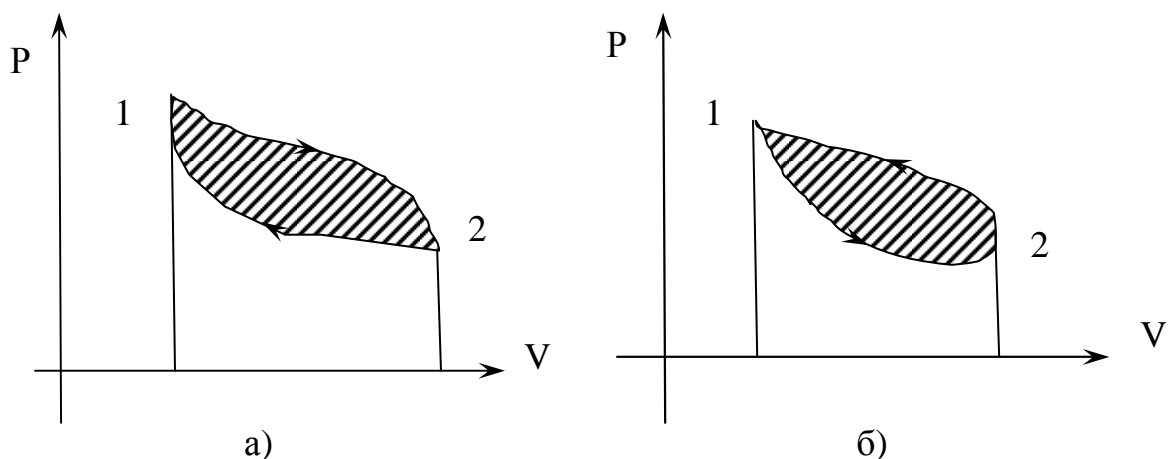


Рис. 10.1

$$\frac{dU}{dq} = \varphi \quad (10.19)$$

остается неизменным для данного процесса. Для таких процессов, согласно первому началу термодинамики.

$$da = (1 - \varphi)dq, \quad (10.20)$$

$$dT = \frac{dq}{C_\varphi}, \quad (10.21a)$$

$$C_\varphi = \frac{C_V}{\varphi}, \quad (10.21б)$$

где C_φ – удельная теплоемкость политропного процесса. Из (10.21) следует также, что вместо (10.13) можно написать:

$$dq = C_\varphi dT = C_V dT + p dV. \quad (10.22)$$

Из (10.22) после соответствующих преобразований с использованием дифференциального уравнения состояния идеального газа можно вывести общее уравнение политропного процесса:

$$pV^n = \text{const}, \quad (10.23)$$

где n – постоянная для каждого конкретного процесса и называется показателем политропы; она определяется формулой:

$$n = \frac{C_P - C_\varphi}{C_V - C_\varphi}. \quad (10.24)$$

Введя отношение $K = \frac{C_P}{C_V}$, характерное для данного газа (рабочего тела), можно связать величины φ и n выражением:

$$\varphi = \frac{1-n}{K-n}. \quad (10.25)$$

Работа, совершаемая 1 кг газа в политропном процессе, после соответствующих вычислений, может быть выражена в виде:

$$a = \int_1^2 P dV = \frac{P_1 V_1 - P_2 V_2}{n-1} = \frac{P_1 V_1}{n-1} \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = \frac{P_1 T_1}{n-1} \left[1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]. \quad (10.26)$$

В реальных тепловых процессах показатель политропы может принимать всевозможные значения, которые определяются экспериментальным путем (от 0 до ∞). Однако среди них выделяются

некоторые частные случаи, представляющие значительный практический интерес.

- 1) Пусть $n=0$, тогда из общего уравнения (10.23) получается:

$$P = \text{const.} \quad (10.27)$$

Такой процесс называется изохорическим (или изохорным); из уравнения состояния следует:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}. \quad (10.28)$$

Работа в изобарном процессе получается равной

$$a = p(V_2 - V_1) = R(T_2 - T_1). \quad (10.29)$$

На диаграмме p - V графиком процесса является прямая, параллельная оси U .

- 2) При $n=1$ из (10.23) следует

$$pV = \text{const}, \quad T = \text{const} \quad (10.30)$$

или

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{P_1}{P_2}. \quad (10.31)$$

Такой процесс называется изотермическим, а (10.31) выражает известный закон Бойля-Мариотта.

График процесса на p - V -диаграмма (изотерма) представляет собой равнобочную гиперболу $p \sim \frac{1}{V}$, располагающуюся тем выше, чем больше температура T . Работа, совершаемая при этом процессе, согласно (10.20) равна:

$$Q = p_1 V_1 \ln \frac{P_1}{P_2} = p_2 V_2 \ln \frac{P_1}{P_2} \quad (10.32)$$

- 3) Если $n=\pm\infty$, то из (10.23) следует:

$$V = \text{const} \quad (10.33)$$

Такой процесс называется изохорическим и представляется вертикальной прямой на p - V -диаграмме. Ясно, что работа в этом процессе не совершается:

$$dV=0, \quad a=0 \quad (10.34)$$

- 4) Если $n=K=C_p/C_v$, то из общей формулы для подводимого количества теплоты

$$q = C_v \frac{K-n}{1-n} (T_2 - T_1) \quad (10.35)$$

Следует, что в данном случае $q=0$. Таким образом, этот процесс протекает без теплообмена с окружающей средой, т. е. процесс – адиабатический. Работа в этом процессе совершается за счет изменения внутренней энергии системы:

$$a = -\Delta U = U_1 - U_2 = C_v(T_1 - T_2). \quad (10.36)$$

Уравнение адиабаты – графика, имеющего вид более круто спадающей гиперболы по сравнению с изотермой, т. к. $K>1$ – представляется выражением:

$$PV^K = \text{const}, \quad TV^{K-1} = \text{const}. \quad (10.37)$$

Как уже упоминалось выше, в реальных ситуациях протекают тепловые процессы, для которых показатель политропы n принимает всевозможные промежуточные значения. Процессы с $0 < n < 1$ располагаются на p - V -диаграмме между изобарой и изотермой. При расширении газа совершается работа (при сжатии газа имеют место обратные явления). Процессы с $1 < n < K$ являются промежуточными между изотермой и адиабатой. Процессы с $K < n < \infty$, расположены на p - V -диаграмме между адиабатой и изохорой: при расширении газа совершаемая работа все время уменьшается с ростом n , а температура газа понижается быстрее; в пределе $n = \infty$ (изохора) работа газа обращается в ноль.

Таким образом, на основе первого начала термодинамики можно производить различные количественные расчеты тепловых процессов при известном показателе политропы n . При этом данный закон ничего не говорит относительно направления протекания реальных тепловых процессов; для него все эти направления равновозможны ввиду принципиальной обратимости процессов. Однако все реальные процессы необратимы и идут лишь в направлении установления термодинамического равновесия; эти закономерности устанавливаются вторым началом термодинамики, имеющим совершенно иное, чем 1-е начало, физическое содержание.

10.4 Второе начало термодинамики

Огромное количество опытных данных свидетельствует о том, что самопроизвольно протекающие тепловые процессы, идут в одном направлении от более нагретых к менее нагретым телам. В результате, в любой системе тел с различными температурами со временем температура выравнивается. После этого система самопроизвольным путем уже не выйдет из этого состояния, и получить от нее полезную работу невозможно. Если бы это было возможно, то можно было бы построить «вечный двигатель 2 рода», т. е. машину, непрерывно превращающую внутреннюю (тепловую) энергию тел в полезную механическую работу. Заметим, что невозможность создания такого двигателя, в принципе, не следует из первого начала термодинамики, т. е. не противоречит закону сохранения энергии (если бы это было возможно, то, например, запасы тепловой энергии в морях и океанах в атмосфере Земли и т. д. настолько огромны, что их хватило бы для удовлетворения энергетических потребностей человечества на многие миллионы лет). Однако указанная выше закономерность передачи тепловой энергии от более нагретого к менее нагретому, препятствует построению такого двигателя.

Любое из указанных выше положений может быть принято в качестве формулировки 2 начала (закона) термодинамики, являющегося обобщением большой массы экспериментальных данных. Так, невозможность самопроизвольного перехода тепла от более холодных к более горячим телам

является формулировкой, этого закона по Клаузиусу, а невозможность построения вечного двигателя 2 рода есть формулировка по Освальду и Планку. Ниже будут указаны и другие формулировки второго начала термодинамики.

Обратимся к рассмотрению особенностей реальных тепловых машин. На рис. 10.1а был доказан «прямой» термодинамический цикл, осуществляемый с некоторым рабочим телом (например, идеальным газом), для которого характерно, что работа расширения на пути $1 \rightarrow 2$ превышает работу сжатия $2 \rightarrow 1$. В результате работа, совершаемая газом против внешних сил, оказывается больше работы внешних сил по возвращению системы в исходное состояние. В результате будет получена некоторая «результатирующая» полезная работа, т. е. данный «прямой» цикл является характерным для (теплового) двигателя.

Расширение газа на пути $1 \rightarrow 2$, согласно изложенному выше, может быть осуществлено в результате передачи газу некоторого количества тепла Q_1 от другого тела – «нагревателя» (им может служить, например, топка паровозного котла). Для нагревателя характерна более высокая температура, чем у рабочего тела, иначе передача тепла от него осуществляться не будет. Теперь обратим внимание на то, что для получения указанного выигрыша в работе, газ должен возвращаться из состояния 2 в состояние 1 (при сжатии) по иному пути, пролегающему ниже по p - V -диаграмме, чем путь $1 \rightarrow 2$. Согласно изложенному выше, это означает, что процесс $2 \rightarrow 1$ должен осуществляться при более низкой температуре, чем процесс $1 \rightarrow 2$; для этого необходимо отвести от рабочего тела некоторое количество теплоты Q_2 , меньшее Q_1 , к другому телу с более низкой температурой – «холодильнику» (в качестве холодильника, например, при работе паровой машины выступает атмосфера). Поскольку рабочее тело в результате циклического процесса возвращается в исходное состояние, то, согласно первому началу термодинамики, можно написать для полезной работы ΔA выражение:

$$\Delta A = A_{12} - A_{21} = Q_1 - Q_2. \quad (10.38)$$

Ясно, что при равенстве количеств теплоты и Q_1 и Q_2 полезная работа совершена не будет – рабочее тело вернется в исходное по первоначальному пути $1 \rightarrow 2$.

Таким образом, в рассмотренном прямом цикле (характерным для двигателей внутреннего сгорания, ракетных двигателей, паровых машин и т. д.), полезная работа совершается за счет разности полученного (от нагревателя) и отданного (холодильнику) количеств теплоты $Q_1 - Q_2$. Величина

$$\eta = \frac{\Delta A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \quad (10.39)$$

называется термическим КПД теплового двигателя.

Поскольку отводимое от рабочего тела количество тепла Q_2 не может быть равным 0, то КПД всех реальных тепловых двигателей всегда будет меньше 1. Естественно, возникает вопрос о максимально возможном

(«теоретическом») КПД «идеального» теплового двигателя. На этот вопрос дает ответ теорема Карно (см. п. 10.3).

Рассмотрим теперь обратный цикл, представленный на рис. 10.1б. Для него характерно то, что работа внешних сил (на пути $2 \rightarrow 1$) превышает работу, совершаемую на пути $1 \rightarrow 2$, т.е. результирующая работа отрицательна. Теперь формулу (10.38) можно представить в виде:

$$-\Delta A = Q_2 - Q_1 = (-Q_1) - (-Q_2). \quad (10.40)$$

Перемена знаков при Q_1 и Q_2 означает, что в данном цикле от более холодного тела теперь отбирается некоторое количество теплоты Q_2 , а количество теплоты Q_1 отдается более горячему телу – нагревателю. В конечном счете дело сводится к передаче некоторого количества теплоты от более холодного тела к более горячему. В общем это не противоречит 2 началу термодинамики, поскольку этот процесс передачи тепла не является самопроизвольным – он происходит в результате затраты некоторой механической работы. Таким образом, обратный цикл соответствует «холодильной машине» или «тепловому насосу». Отношение отнятой от холодного тела теплоты Q_2 к затраченной работе $Q_1 - Q_2$ характеризующее работу холодильной машины, называется холодильным коэффициентом:

$$E = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}. \quad (10.41)$$

Для теплового насоса вводится «относительный коэффициент» – отношение переданного потребителю количества теплоты Q_1 к затраченной работе:

$$Q = \frac{Q_1}{Q_1 - Q_2}. \quad (10.42)$$

Комбинация прямого и обратного циклов характерна для теплового трансформатора, который «перекачивает» тепло от одного теплового источника к другому. Трансформатор, вырабатывающий тепло при более низкой температуре, чем исходная температура «первичного» источника, называется понижающим, в противном случае – повышающим.

Рассмотрим теперь более точные количественные формулировки 2 начала термодинамики. С этой целью используем указанную выше физическую величину – энтропию термодинамической системы.

Обратимся еще раз к изотермическому процессу, рассмотренному выше, при $T = \text{const}$. В этом процессе количество теплоты dQ , сообщенное рабочему телу (газу), полностью расходуется на совершение полезной работы (изменение внутренней энергии равно нулю):

$$dQ = dA = MRT \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (10.43)$$

или, для единицы массы:

$$dq = RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (10.44)$$

Разделив обе части на T , находим:

$$\frac{dq}{T} = dS = R \ln \frac{V_2}{V_1} = R \ln V_2 - R \ln V_1. \quad (10.45)$$

Таким образом, величина $\frac{dq}{T}$ в данном случае характеризует изменение некоторой величины S , причем это изменение определяется только начальным и конечным объемами газа. Величина S – есть энтропия единицы массы газа.

Обратим теперь внимание на то, что газ, предоставленный самому себе, стремится самопроизвольно увеличить свой объем, оказывая давление на стенки содержащего его сосуда. Следовательно, при самопроизвольном процессе, энтропия, определяемая согласно (10.45), возрастает. Для выяснения физического смысла энтропии обратимся к схеме рис. 10.2. Газ, первоначально содержащийся в левой половине сосуда (рис. 10.2а), после открывания перегородки Π самопроизвольно занимает весь объем, (рис. 10.2б), причем опыт показывает, что вероятность самопроизвольного возвращения газа в левую половину сосуда чрезвычайно мала. Это означает, что состояние на рис. 10-2б является более вероятным, чем на рис. 10-2а, и,

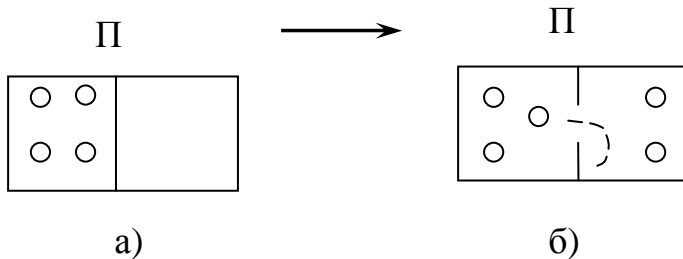


Рис. 10.2

следовательно, увеличение объема газа означает его переход в более вероятное состояние. Согласно (10.46), это соответствует возрастанию энтропии, т. е. $dS > 0$.

Подробный анализ на основе теории вероятностей, применимой к газу при обычных давлениях в силу огромного количества его молекул (порядка 10^{25} в м^3), показывает, что $\ln \frac{V_2}{V_1}$ пропорционален величине $\ln \frac{W_2}{W_1}$, т. е. логарифму отношения вероятностей состояний, соответствующих газу с объемом V_2 или V_1 . Поэтому можно определить энтропию единицы массы газа, как

$$S = \frac{R}{M} \ln W. \quad (10.46)$$

Введя понятия вероятности состояния и энтропии, можно сформулировать, теперь второе начало термодинамики для самопроизвольно протекающих в одну сторону, т. е. необратимых, процессов следующим образом: самопроизвольные процессы всегда идут в сторону возрастания вероятности состояния (формулировка по Больцману), и возрастания энтропии, т. е. $\Delta S > 0$. Разумеется, в такой формулировке подразумевается, что рассматриваемая система состоит из огромного числа частиц, для которой справедлив «закон больших чисел», лежащий в основе вероятностного подхода к исследованию явлений природы.

Рассмотрим теперь обратимый цикл, состоящий из расширения и сжатия газа, при котором в окружающих телах не произошло никаких изменений. Например, при изотермическом расширении было затрачено количество тепла Δq и совершена работа газа Δa (на единицу массы газа); при обратном процессе – изотермическом сжатии – будет совершена работа

внешних сил ($-\Delta a$) и отдано в окружающую среду количество тепла ($-\Delta q$). Ясно, что при этом полное изменение энтропии ΔS будет равно нулю ($\frac{\Delta q}{T} - \frac{\Delta q}{T} = 0$). Таким образом, в обратимом цикле суммарная энтропия системы не изменяется: если же происходит необратимый процесс типа показанного на рис. 10.3, то суммарная энтропия возрастает. Итак, при любых процессах, происходящих в некоторой изолированной термодинамической системе, ее изменение энтропии неотрицательно:

$$\Delta S \geq 0. \quad (10.47)$$

При этом знак « \geq » относится к обратимым процессам, в результате

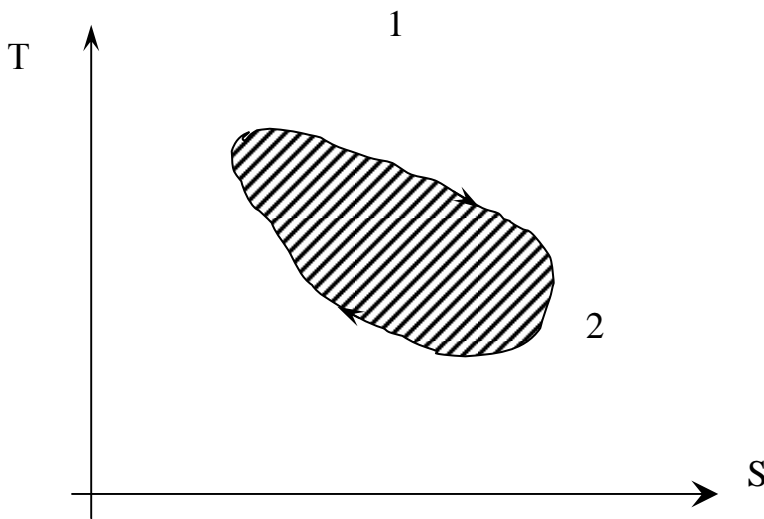


Рис. 10.3

которых вероятность состояния не изменяется, знак « \geq » – к необратимым процессам, в результате которых энтропия возрастает. Такова

количественная формулировка второго начала термодинамики. Учитывая определение (10.45), вместо (10.47) можно записать математическую формулировку в ином виде:

$$\oint \frac{dq}{T} \geq 0 \quad (10.48)$$

(символ \oint означает интегрирование по замкнутому контуру и это выражение удобно для математического анализа термодинамических циклов).

Используя понятие энтропии, можно представить рассмотренные выше основные политропные тепловые процессы на диаграммах T-S (рис. 10.4) (вместо так называемых «рабочих» диаграмм p-V, приведенных выше), которые для многих инженерных расчетов оказываются весьма полезными, а также вычислить изменение энтропии в каждом из этих процессов. Общие выражения для изменения энтропии $\Delta S = S_2 - S_1$ при показателе политропы n (см. выше) имеют вид:

$$S_2 - S_1 = C_V(k - n) \ln \frac{V_2}{V_1} = C_V \frac{k-n}{n} \ln \frac{P_1}{P_2} = C_V \frac{k-n}{n-1} \ln \frac{T_1}{T_2}. \quad (10.49)$$

Для изохорического процесса ($n = \pm \infty$)

$$S_2 - S_1 = C_V \ln \frac{P_2}{P_1} = C_V \ln \frac{T_2}{T_1}. \quad (10.50)$$

Для изобарического процесса ($n = 0$)

$$S_2 - S_1 = C_P \ln \frac{T_2}{T_1}. \quad (10.51)$$

Для изотермического процесса ($n=1$):

$$S_2 - S_1 = (C_P - C_V) \ln \frac{P_1}{P_2} - (C_P - C_V) \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (10.52)$$

Наконец, для адиабатического процесса ($n=k$):

$$S_2 - S_1 = 0, \quad S = \text{const}. \quad (10.53)$$

(По этой причине адиабатический процесс называют также изоэнтропийным и относят также к группе перечисленным выше изопроцессам).

Диаграммы процессов в координатах T - S обычно называются тепловыми диаграммами, поскольку, в силу определения

$$TdS = dq. \quad (10.54)$$

Площадь под кривыми T - S определяет количество теплоты, подведенное к системе (или отведенное от нее) на участке процесса 1→2:

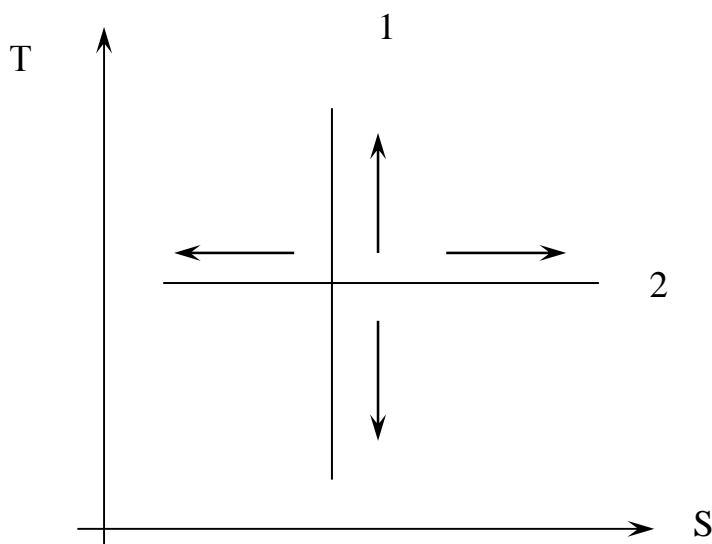


Рис. 10.4

$$q = \int_1^2 T dS. \quad (10.55)$$

Увеличение энтропии соответствует подводу тепла к системе извне, а уменьшение энтропии – отводу тепла из системы в окружающую среду. Цикл на диаграмме T - S изображается замкнутой кривой, а ограниченная его площадь соответствует количеству теплоты, эквивалентному работе, совершаемой в данном цикле (рис. 10-3):

$$q_1 - q_2 = \Delta a. \quad (10.56)$$

Адиабатический процесс представляется на T - S -диаграмме вертикальной прямой (1) $S = \text{const}$, а изотермический процесс – горизонтальной прямой (2) $T = \text{const}$ – рис. 10.4. При этом участок «↓» на линии 1 соответствует расширению газа (его температура снижается), а участок «↑» – адиабатическому сжатию газа. Участок «→» на линии 2 соответствует изотермическому расширению, сопровождающемуся возрастанием энтропии, а участок «←» – изотермическому сжатию газа. Изобарический и изотермический процессы представляются на T - S -диаграмме кривыми линиями типа 1 и 2 на рис.10.5. Например, участок ↓ на линии 1 соответствует изохорическому охлаждению газа без совершения работы; энтропия при этом

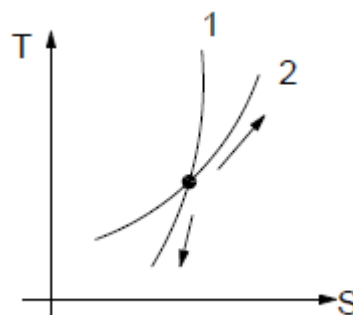


Рис. 10.5

уменьшается, причем тепло отводится от газа в окружающую среду. Участок \uparrow на линии 2 соответствует изобарическому расширению: энтропия газа возрастает, газ совершает работу за счет подведения тепла извне, причем его внутренняя энергия также возрастает. Конкретные пример Т-S-диаграмм для рабочих циклов реальных тепловых машин будут приведены ниже.

В заключение заметим, что согласно формуле (10.46) при $W=1$, $S=0$. Состояние с вероятностью, равной 1, может реализоваться для любого вещества лишь при абсолютном нуле, когда вещество находится в совершенно определенном (кристаллическом) упорядоченном состоянии. Энтропия такого состояния равна нулю. Это положение часто называют третьим законом термодинамики или теоремой Нернста и имеет определенное практическое значение (оно будет дополнительно рассмотрено ниже, в связи с вопросами физики и техники низких температур). Как следствие теоремы Нернста, при $T=0$ теплоемкости C_p и C_v обращаются в ноль (это же относится и к коэффициенту теплового расширения). Важнейшим следствием третьего начала термодинамики является принципиальная недостижимость абсолютного нуля (хотя возможности приближения к нему очень велики: в настоящее время уже достигнута температура $T=5 \cdot 10^{-8}$ К), откуда, в свою очередь, следует невозможность осуществления цикла Карно с температурой холодильника 0 К, и, следовательно, достижения КПД тепловой машины 1.

Не следует полагать, что законы термодинамики используются лишь при создании тепловых и холодильных машин. Напротив, область их применения в науке и технике чрезвычайно широка. Ниже будут рассмотрены лишь некоторые характерные примеры. Можно сказать, что законы термодинамики практически всегда полезны при рассмотрении систем из большого числа частиц, когда необходимо рассмотреть «внешние», т. е. экспериментально измеримые, параметры системы, не привлекая специальные частные модели строения системы. Большая общность термодинамических «начал» находит свое объяснение в существовании общих статистических законов типа «закона больших чисел», присущих системам упомянутого типа. Поэтому, как указывалось выше, термодинамика неразрывно связана со статистической физикой, математической статистикой, теорией информации (см. п. 10.1) и другими фундаментальными дисциплинами.

10.5 КПД тепловых машин

Как уже указывалось выше, при работе любой тепловой машины рабочее тело получает некоторое количество тепла Q_1 от нагревателя и отдает количество тепла Q_2 холодильнику, так что $\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$ характеризует КПД машины. Поскольку из 3-го начала термодинамики следует невозможность машины с $\eta=1$, то естественно возникает вопрос о

предельном КПД реальных тепловых машин и характере оптимального цикла, к которому должен стремиться конструктор. На этот вопрос отвечает следующая фундаментальная теорема: КПД любого обратимого цикла, осуществляемого при температуре нагревателя T_1 температуре холодильника T_2 , меньше КПД идеального «цикла Карно», для которого

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (10.57)$$

Для любого необратимого цикла КПД меньше, чем соответствующего обратимого. Таким образом, оптимальным для тепловых машин является обратимый цикл Карно.

Этот цикл был предложен еще в 1824 г. и представляет собой совокупность двух изотерм и 2 адиабат; на рис. 10.6 представлена p - V - диаграмма этого цикла, на рис. 10.7 – принципиальная схема его практического осуществления. В исходном состоянии газ в рабочем цилиндре 1 находится в состоянии с параметрами (P_1, V_1, T_1) . На участке 1-2 газ расширяется и поршень 2 через посредство кривошипно-шатунного механизма 3 приводит во вращение маховик 4. При этом температура поддерживается постоянной и равной рабочей температуре нагревателя T_1 за счет передачи рабочему телу некоторого количества тепла Q_1 .

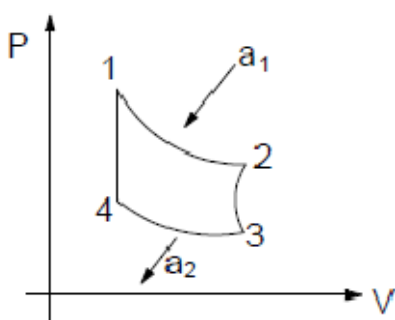


Рис. 10.6

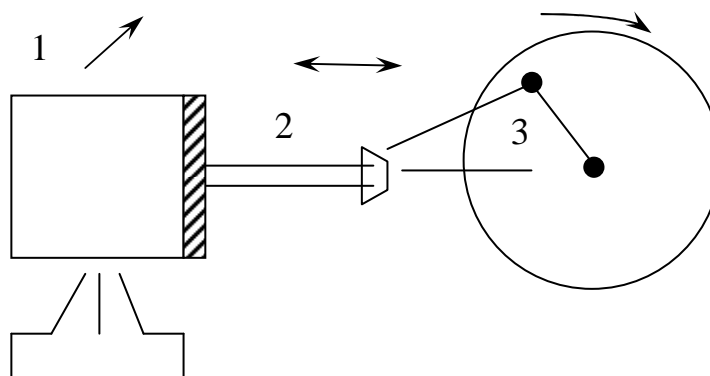


Рис. 10.7

Таким образом, процесс 1-2 является изотермическим:

давление и температура становятся равными (P_2, V_2) , причем $P_1 V_1 = P_2 V_2$. При этом совершается работа, равная Q_1 :

$$A_{12} = Q_1 = mRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (10.58)$$

На участке 2-3 цилиндр изолируется от нагревателя, но газ продолжает расширяться, перемещая поршень; работа совершается за счет внутренней энергии рабочего тела, и температура газа падает до температуры холодильника T_2 . В конце процесса поршень принимает крайнее правое положение, дальнейшее вращение маховика приводит к обратному процессу – сжатию газа. Таким образом, на участке 2-3 происходит адиабатический процесс, и параметры состояния становятся равными (P_3, V_3, T_2) : при этом совершается работа

$$A_{23} = \frac{mR(T_1 - T_2)}{R - 1}, \quad (10.59)$$

а переданное количество теплоты равно нулю.

На участке 3-4 цилиндр приводится в тепловой контакт с холодильником, и сжатие осуществляется изотермически за счет накопленной в маховике кинетической энергии. При этом параметры состояния становятся равными (P_4, V_4, T_2), и затрачивается работа

$$A_{34} = mRT_2 \ln \frac{V_4}{V_3} = -mRT_2 \ln \frac{V_3}{V_4} \quad (10.60)$$

($\ln \frac{V_3}{V_4} < 0$) и отдается холодильнику равное количество теплоты

$$Q_2 = A_{34}. \quad (10.61)$$

Наконец, на участке 4-1 цилиндр изолируется от холодильника, и газ возвращается в исходное состояние 1 с параметрами (P_1, V_1, T_1) адиабатически, нагреваясь при этом до температуры нагревателя T_1 . В этом процессе $\varphi=0$, а затраченная на сжатие газа работа равна:

$$A_{41} = \frac{mR(T_2 - T_1)}{K - 1} = -\frac{mR(T_1 - T_2)}{K - 1}. \quad (10.62)$$

На этом полный цикл Карно заканчивается. Если в окружающих телах при этом не произошло никаких изменений, то цикл является обратимым и может в принципе повторяться вечно, не изменяя окружающих условий.

Полная работа машины за полный цикл Карно определяется суммой:

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = mRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - mRT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}, \quad (10.63)$$

поскольку $A_{23} = A_{41}$.

Учитывая уравнения адиабат 2-3 и 4-1

$$\left. \begin{aligned} T_1 V_2^{k-1} &= T_2 V_3^{k-1} \\ T_1 V_1^{k-1} &= T_2 V_4^{k-1} \end{aligned} \right\}, \quad (10.64)$$

находим, что

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{k-1} = \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{k-1}. \quad (10.65)$$

Откуда следует, что

$$\ln \frac{V_2}{V_1} = \ln \frac{V_3}{V_4}. \quad (10.66)$$

Тогда формула (10.63) принимает вид:

$$A = mR \ln \frac{V_2}{V_1} \cdot (T_1 - T_2). \quad (10.67)$$

Затраченное количество теплоты Q_1 определяется соотношением (10.58). Из (10.67) и (10.58) для КПД цикла Карно получается выражение:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (10.68)$$

Отсюда видно, что основными путями повышения КПД теплового цикла являются повышение температуры нагревателя и снижение температуры холодильника.

Нетрудно показать, что для необратимого цикла Карно КПД всегда будет меньше, чем следует из формулы (10.68). Действительно, необратимость тепловых процессов означает, что они сопровождаются

необратимым рассеиванием тепловой энергии в окружающую среду. Эти тепловые потери всегда имеются в реальных машинах, например, из-за сил трения между движущимися частями машин, излучения «тепловых» электромагнитных волн в окружающую среду и т. д.; при этом состояние окружающих тел (или среды) изменяется. В результате этой диссипации тепла фактическая температура T_1' рабочего тела на участке 1-2 понизится ($T_1' = T_1 - \Delta T_1$), а на участке 3-4 повысится ($T_2' = T_2 + \Delta T_2$); из (10.68) видно, что это приведет к снижению КПД. Таким образом, для повышения КПД реальных машин следует стремиться к большей обратимости процессов, входящих в ее рабочий цикл.

До сих пор подразумевалось, что рабочим телом в цикле Карно является идеальный газ, а техническое осуществление цикла соответствует рис. 10.7. Но, может быть, принципиально возможно еще повысить КПД, используя рабочее тело другой физической природы (например, жидкость) или иной технический принцип реализации цикла Карно? На этот вопрос отвечает теорема Карно: КПД обратимого цикла Карно не зависит от природы рабочего тела и технического способа реализации цикла и определяется лишь температурами нагревателя и холодильника, т. е. максимальной и минимальной температурами цикла.

Доказательство этой теоремы, имеющей исключительно важное значение для инженерной теплотехники, может быть проведено следующим образом (рис. 10.8). Рассмотрим «сопряженные» тепловые машины 1 и 2, работающие по циклу Карно, с общим нагревателем (T_1) и холодильником (T_2), причём в машине 1 рабочим телом служит идеальный газ, а в машине 2 – тело любой иной природы. КПД машины 1 определяется формулой (10.68).

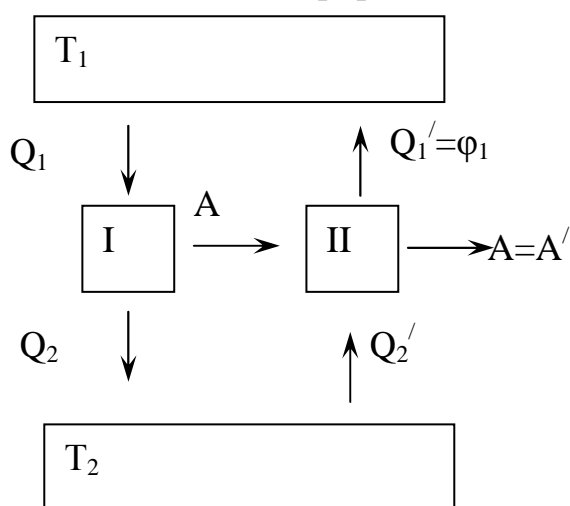


Рис. 10.8

Машину 2 сконструируем таким образом, чтобы отдаваемое ей нагревателем за один цикл количество теплоты (Q_1') было равно этой величине для машины 1 (Q_1). Если при этом работы обеих машин за цикл одинаковы ($A \pm A'$), то одинаковыми будут и их КПД, а также количества теплоты, отдаваемые холодильнику в обеих машинах ($Q_2' = Q_2$). Допустим теперь, что КПД рассматриваемых сопряженных машин Карно не одинаковы, например, $\eta > \eta'$ и, следовательно, $A > A'$. Это означает, что машина 1 превращает в

полезную работу большую долю получаемого количества теплоты и отдает холодильнику меньше тепла ($Q_2 < Q_2'$), чем машина 2. Используем теперь машину 1 как «тепловую» (двигатель), а машину 2 – как «холодильную»,

потребляющую за каждый цикл работу A' и передающую тепло Q_2' от более холодного тела к более горячему, которое за цикл получает тепло $Q_1' = Q_1$. Для этой цели нужно сконструировать установку на рис. 10.8 так, чтобы работа, совершаемая машиной 1 в «прямом» цикле, передавалась машине 2, работающей по «обратному» циклу. Такая «сопряженная» машина будет за каждый цикл совершать работу $A - A'$ (т. к. мы приняли $A > A'$), а ее общий холодильник – отдавать количество теплоты эквивалентное $A - A'$, согласно 1 началу термодинамики ($A - A' = Q_2' - Q_2$). Состояние общего нагревателя при этом не изменяется. Таким образом, эта «комбинированная» тепловая установка производит в каждой цикле работу $A - A'$ только за счет тепла, отбираемого у холодильника, без всякого «компенсирующего» процесса отвода тепла, т. е. работает как вечный двигатель 2 рода, что, как было указано в п. 10.2, противоречит 2 началу термодинамики. Таким образом, допущение о том, что $\eta > \eta'$ не правильно. Но не может ли быть $\eta < \eta'$? При таком допущении переставим машины 1 и 2 в нашей схеме: машину 1 теперь заставим работать как холодильную, а машину 2, как «тепловую» (двигатель). После этого можно повторить все предыдущие рассуждения, и вновь получится противоречие со 2 началом термодинамики. Это доказывает сформулированную выше теорему Карно.

Форма теплового цикла, вообще говоря, оказывает влияние на КПД цикла: однако можно показать, что при заданных максимальной и минимальной температурах цикла цикл Карно обеспечивает максимально возможный КПД. Оказывается также возможным использовать одни и те же «промежуточные» тела в одной половине цикла в качестве «нагревателей», а в другой половине – в качестве «холодильников». Этот принцип

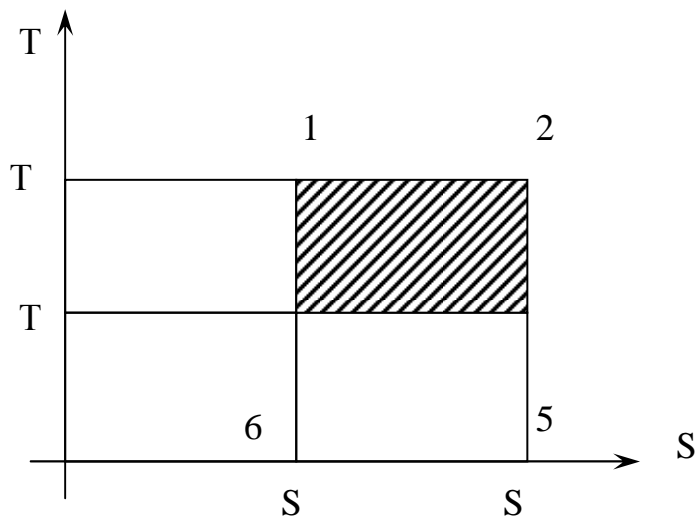


Рис. 10.9

«регенерации» тепла широко используется в тепловых двигателях и будет несколько подробнее обсуждаться ниже.

Для иллюстрации роли формы цикла обратимся к их представлению на диаграмме в координатах $T-S$. В таком представлении вид цикла и расчет КПД оказываются значительно проще, чем в координатах $p-V$. Из рис. 10.9 видно, что цикл Карно на диаграмме $T-S$ выглядит в виде прямоугольника 1234.

Количество теплоты, подведенное к рабочему телу (на единицу массы), равно площади прямоугольника 12561, т. е. $q_1 = T_1(S_2 - S_1)$, а количество теплоты, отведенной к холодильнику – площадью прямоугольника 43564, т.е. $q_2 = T_2(S_2 - S_1)$. Работа,

совершаемая за цикл, изображается площадью прямоугольника 1234; т. е. $a = q_1 - q_2 = (T_1 - T_2)S$. Сравнение с приведенными выше рис. 10-6 и формулами (10.58-10.68) сразу показывает преимущества использования Т-S-диаграммы в этом случае.

Обратимся теперь к некоторому произвольному обратимому циклу «вписанному» в цикл Карно на Т-S-диаграмме, т. е. осуществляемому между теми же предельными температурами T_1^{max} и T_2^{min} что и цикл Карно – рис.10.10. Площадь такого цикла всегда меньше, чем в цикле Карно, поэтому

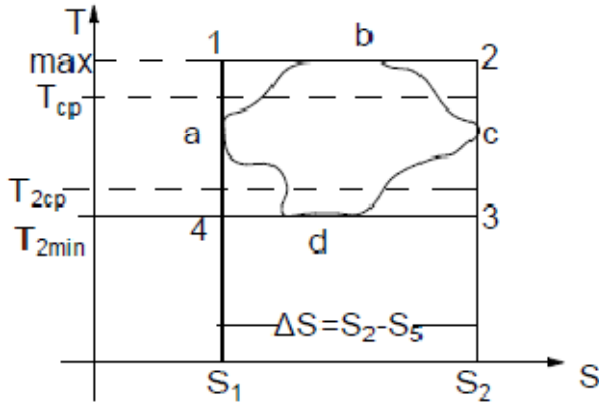


Рис. 10.10

и его КПД ниже. Чем плотнее заполняет цикл $abcd$ площадь 12341, тем ближе КПД цикла к максимально возможному КПД (10.68); такая подгонка реального цикла к циклу Карно называется его «карнотизацией». Количественно это означает повышение средней температуры теплоподвода \overline{T}_1 и понижение средней температуры теплоотвода \overline{T}_2 :

$$\overline{T}_1 = \frac{\int_{(a,b,c)} T ds}{\Delta S}, \quad \overline{T}_2 = \frac{\int_{(c,d,a)} T ds}{\Delta S}, \quad (10.69)$$

где интегралы берутся для первой и второй половины цикла, соответственно. Тогда для подводимого (q_1) и отводимого (q_2) количеств теплоты можно написать:

$$q_1 = \overline{T}_1 \Delta S, \quad q_2 = \overline{T}_2 \Delta S. \quad (10.70)$$

Соответственно, термический КПД такого цикла будет равен:

$$\eta(a, b, c, d) = \frac{q_1 - q_2}{q_1} = \frac{\overline{T}_1 - \overline{T}_2}{\overline{T}_1}. \quad (10.71)$$

Чем ближе \overline{T}_1 к T_1^{max} и \overline{T}_2 к T_2^{min} , тем ближе $\eta(a, b, c, d)$ к КПД цикла Карно.

В дальнейшем в этой главе будут приведены примеры реальных циклов, более или менее приближающихся к циклу Карно. Например, на рис. 10.11 (а, б) схематически представлены рабочие циклы для двигателя внутреннего сгорания с принудительным зажиганием — цикл Отто (а) — и для двигателя внутреннего сгорания с самовоспламенением топлива — цикл Дизеля (б) (подробнее см. п. 10). Ввиду наличия двух адиабат в каждом цикле (3-4 и 1-2) они близки по форме к циклу Карно, и их КПД достигает 30-35% (для безкомпрессорных дизелей — почти до 40%).

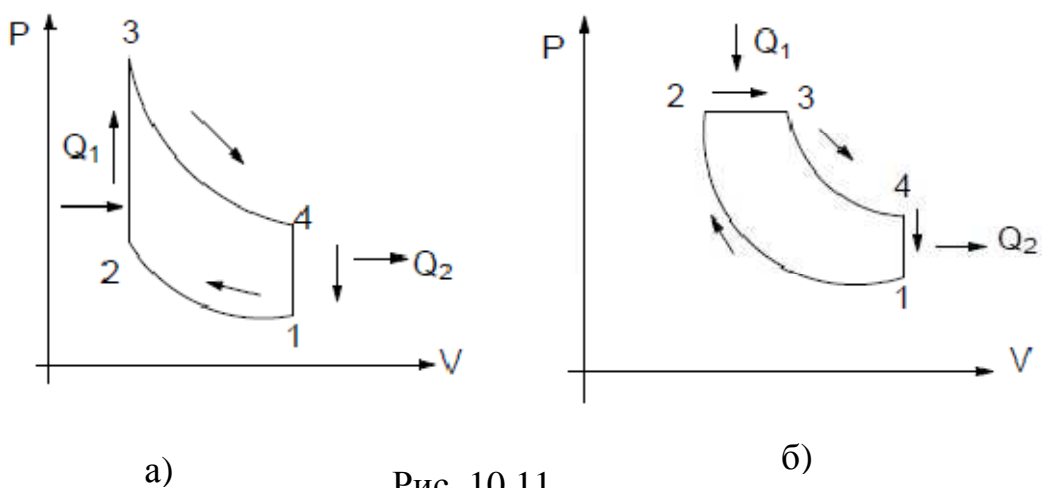


Рис. 10.11

С помощью Т-S-диаграммы нетрудно показать, что между заданными предельными температурами T_1 и T_2 можно осуществить неограниченное множество циклов, «эквивалентных» циклу Карно, т. е. имеющих такую же

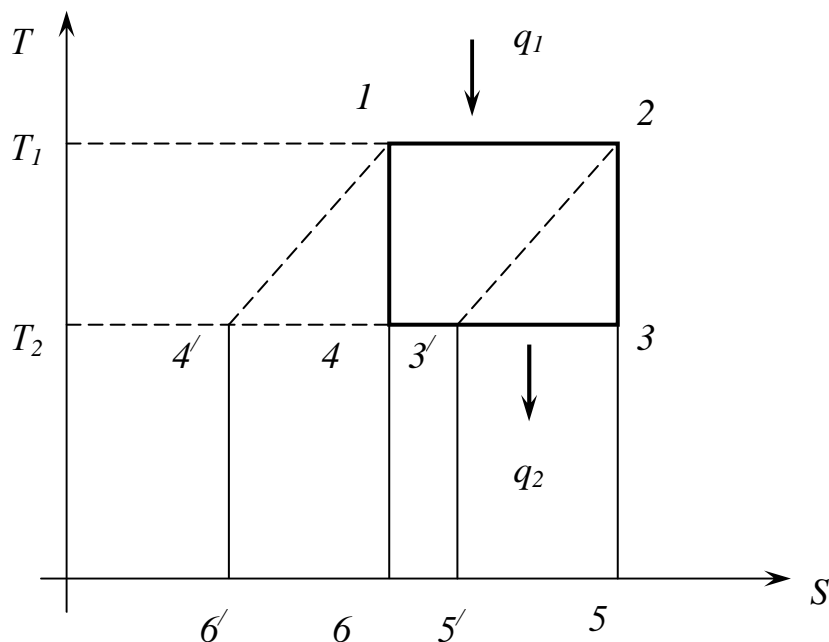


Рис. 10.12

величину КПД (рис. 10.12). Рассмотрим цикл Карно и некоторый цикл $123'4'1$, в котором на изотермическом участке 1-2 получается количество тепла q_1 , а на участке $3' \rightarrow 4'$ отдается количество тепла q_2 , причем оба цикла имеют одинаковые предельные температуры. В процессе $2-3'$ энтропия рабочего тела уменьшается, и некоторое количество

теплоты отводится от тела; для того, чтобы этот процесс был обратимым, необходимо установить множество источников тепла, «заполняющих» интервал температур от T_1 до T_2 . В обратном процессе $4' \rightarrow 1$ энтропия возрастает, и рабочее тело получает некоторое количество теплоты от этих же источников. Затраченное количество теплоты q_1 изображается площадью $123'5'6'4'1$, а полезная работа – площадью $123'4'1$. Отношение этих площадей определяет КПД цикла. Если линии $23'$ и $4'1$ эквивалентны, то площади треугольников $144'1$ и $233'2$ и прямоугольников $4'466'4'$ и $3'355'3'$, соответственно, одинаковы. Тогда величина q_1 равна площади фигуры 12561 , т. е. количеству тепла, подведенному в цикле Карно, а величина площади

$4^{1/3}5^{1/6}6^{1/4}$, изображающая количество теплоты q_2 в рассматриваемом цикле, равна площади 43564, т. е. отведенному теплу в цикле Карно. Таким образом, полезные работы $q_1 - q_2$ в обоих циклах одинаковы, и равны также их термические КПД $\frac{q_1 - q_2}{q}$. Поскольку параллельных линий, подобных 23' и 4'1, можно провести бесчисленные множества, то между предельными температурами T_1 и T_2 можно осуществить бесчисленное количество циклов, эквивалентных циклу Карно в смысле равенства КПД. Они называются обобщенными циклами Карно.

Теорема Карно имеет многочисленные и важные практические приложения. Одним из них является построение термодинамической шкалы температур. В виду независимости характерных величин от устройства машины Карно и природы рабочего тела для этого цикла можно определить «абсолютную термодинамическую температуру» θ как величину, пропорциональную Q , т. е. из пропорции:

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{Q_1}{Q_2}. \quad (10.72)$$

Здесь θ_1 и θ_2 характеризуют «верхнюю» и «нижнюю» температуры цикла Карно, в котором рабочее тело получает количество теплоты Q_1 от нагревателя и передает Q_2 холодильнику. Измерив экспериментально величины Q_1 и Q_2 можно тем самым измерить и отношение θ_1/θ_2 . Для установления абсолютных значений θ необходимо еще выбрать, по крайней мере, одну «реперную точку», для которой значение θ установлено каким-либо соглашением. Поскольку состояние в «тройной точке» воды может быть воспроизведено в специальных установках с очень высокой точностью (погрешность температуры – не более 10^{-4} °C), то на 10 Генеральной конференции по мерам и весам в 1984 г. тройной точке воды была приписана температура 273,16 К точно. Тем самым получается необходимая реперная точка для термодинамической шкалы температур. Отметим также, что согласно 2-му началу термодинамики, минимальная величина Q_2 равна нулю и, следовательно, самая низкая термодинамическая температура также равна нулю («абсолютный ноль»). Таким образом, абсолютная термодинамическая температура всегда является неотрицательной величиной.

Можно показать, что термодинамическая шкала температур эквивалентна шкале идеально-газового термометра, в которой

$$T = CPV, \quad (10.73)$$

где C – константа, зависящая от массы и природы газа (обычно объем газа фиксируется, а изменяется давление газа P). В этой шкале абсолютный ноль ($T=0$) соответствует $P=0$, а температура тройной точки воды равна 273,16 К. Согласно изложенному выше, для цикла Карно отношение Q_1/Q_2 , выраженное через отношение температур в «идеально-газовой» шкале, равно:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2} \cdot \frac{\ln \frac{V_2}{V_1}}{\ln \frac{V_3}{V_4}} = \frac{T_1}{T_2}. \quad (10.74)$$

Если одна реперная точка выбрана одинаковой для обеих шкал, то эти шкалы тождественны. На практике, температура измеряется с помощью реальных термометров, например, газовых термометров. Однако свойства реальных газов всегда в той или иной мере отклоняются от идеальных, и при использовании реальных термометров необходимо вводить соответствующие поправки для приведения их показаний к абсолютной термодинамической шкале. Эти поправки вычисляются по формулам и специальным таблицам, приведенным в литературе.

Теорема Карно применяется в так называемом «методе циклов», используемом для установления соотношений между физическими параметрами равновесных систем. В качестве примера рассмотрим известное выражение, связывающее внутреннюю энергию $U(T, V)$ с давлением P в системе, для которой известно уравнение состояния $f(P, V, T) = 0$:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P. \quad (10.75)$$

С этой целью рассмотрим на p - V -диаграмме «элементарный» цикл Карно 12345, изображаемый фигурой, близкой к параллелограмму с бесконечно малыми сторонами. Для такого цикла максимальная (T_1) и минимальная (T_2) температуры также отличаются друг от друга на бесконечно малую величину (dT). Работа в таком цикле, согласно общей формуле $dA = PdV$, равна в данном случае (см. рис. 10.13):

$$A = dP \cdot (V_2 - V_1), \quad (10.76)$$

причем

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \cdot dT = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \cdot (T_1 - T_2). \quad (10.77)$$

Количество теплоты Q_1 , отданное нагревателем на бесконечно малой изотерме 1→2,

согласно 1-му началу термодинамики, равно:

$$Q_1 = U_2 - U_1 + P(V_2 - V_1) = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T (V_2 - V_1) + P_1(V_2 - V_1) = (V_2 - V_1) \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P_1 \right]. \quad (10.78)$$

Поскольку КПД цикла Карно

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = (T_1 - T_2)/T_1,$$

то из (10.76) и (10.7) с учетом (10.77)

находим

$$\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \cdot (T_1 - T_2)(V_2 - V_1)}{\left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P_1 \right](V_2 - V_1)} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad (10.79)$$

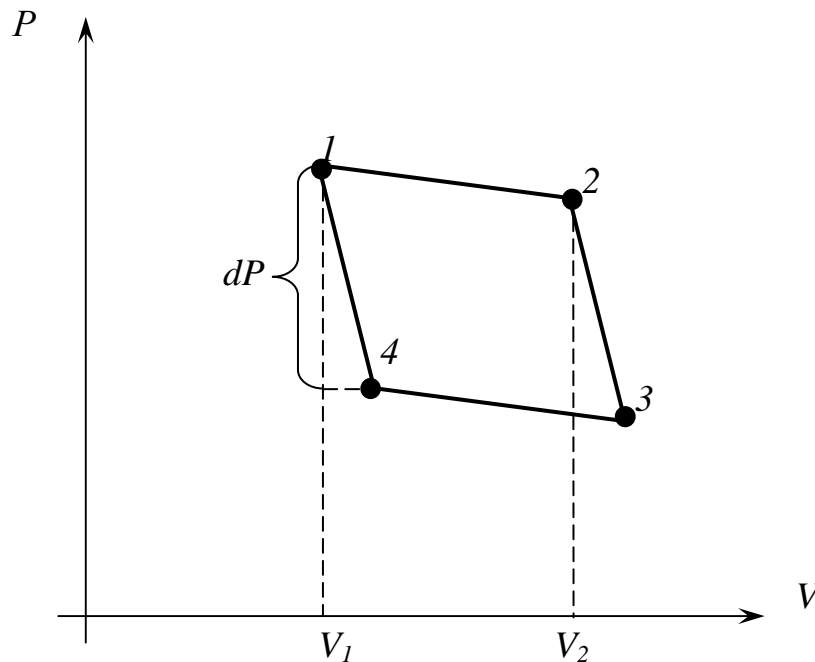


Рис. 10.13

откуда, опуская индексы при P и T получим искомую формулу (10.75).

В случае идеального газа уравнение состояния для 1 моля имеет вид:

$$PV=RT. \quad (10.80)$$

Тогда $T \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{RT}{V} = P$ и формула (10.75) дает:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0. \quad (10.81)$$

Это означает, что внутренняя энергия идеального газа не зависит от объема и является функцией только его температуры. Из соотношения $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$ для молярной теплоемкости идеального газа следует также, что $\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = \frac{\partial^2 P}{\partial T^2} = 0$, т.е. эта величина также является функцией только температуры газа. Формула (10.75) может быть обобщена на случай любой системы, состояние которой описывается набором параметров a_1, a_2, \dots, a_n и температуры в виде

$$\frac{\partial U}{\partial a_i} = T \left(\frac{\partial A_i}{\partial T}\right) - A_i. \quad (10.82)$$

Эта формула применяется в разнообразных расчетах, в частности, в теории растворов.

Переходим теперь к рассмотрению примеров конкретных тепловых машин и приложения изложенных выше основных законов термодинамики к их расчету.

10.6 Двигатели внутреннего сгорания

Тепловые двигатели преобразуют теплоту, выделяющуюся при сгорании разнообразных топлив (твердых, жидких или газообразных) в механическую работу. В паровых машинах и турбинах сгорания топлива происходит вне рабочего тела, поэтому они называются двигателями внешнего сгорания (см. рис. 10.7). В других двигателях широко используемых, например, в автомобильном транспорте и авиации, сжигание топлива осуществляется в рабочем пространстве, содержащем рабочие тела. Они называются двигателями внутреннего сгорания (ДВС) и будут кратко рассмотрены ниже.

В поршневых ДВС, сжатие горючей смеси (топлива с воздухом) приводит к повышению температуры и давления и вследствие этого – к перемещению поршня из одного крайнего положения («мертвой точки») в другое; эти процессы образуют один такт двигателя. В следующем такте (ходе поршня) продукты сгорания выталкиваются из цилиндра при открытом выхлопном клапане в головке цилиндра, а в третьем такте всасывается воздух или горючая смесь через открытый всасывающий клапан. Наконец, в четвертом такте, горючая смесь сжимается и затем весь четырехтактный цикл повторяется, начиная с возгорания сжатой горючей смеси. В некоторых (двухтактных) двигателях весь цикл осуществляется за два такта; вместо

указанных выше 2-го и 3-го тактов, в них осуществляется продувка цилиндра с введением новой порции горючей смеси.

При термодинамическом исследовании работы ДВС вводятся представления об идеализированных обратимых термодинамических циклах двигателей при ряде упрощающих допущений – о рабочем теле как «идеальном газе», обратимом характере подвода и отвода теплоты, полной замкнутости циклов и др. Это дает возможность строить рабочие диаграммы (p - V и T - S) для двигателей, рассчитывать их КПД, оптимизировать конструкцию и т. д. Принимается, что теплоотвод от рабочего тела происходит при постоянном объеме, в то же время теплоотвод может осуществляться как при $V=const$, так и при $P=const$ или же смешанным способом. В зависимости от характера теплоотвода различают двигатели следующих основных типов. В двигателях Отто с искровым зажиганием осуществляется теплоотвод (сгорание топлива) при постоянном объеме ($V=const$).

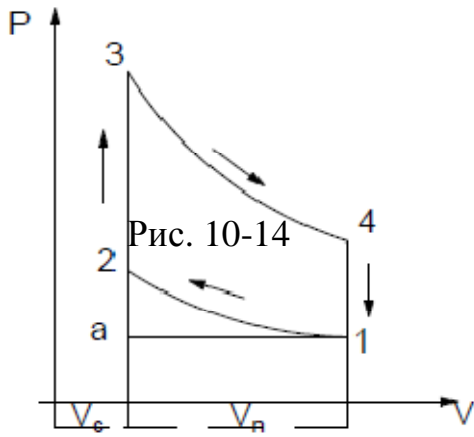


Рис. 10.14

На p - V -диаграмме соответствующий рабочий цикл состоит из следующих процессов (рис. 10.14): всасывания горючей смеси $a \rightarrow 1$, сжатия смеси $1 \rightarrow 2$, горения смеси $2 \rightarrow 3$ воспламеняемой с помощью запальника-свечи, расширения продуктов сгорания $3 \rightarrow 4$ и выталкивания продуктов сгорания в атмосферу (выхлопа) $4 \rightarrow 1 \rightarrow a$. Процессы $a \rightarrow 1$ и $1 \rightarrow a$ можно исключить из термодинамического цикла, поскольку в их результате состояние рабочего тела не изменяется. Кроме того, суммарная работа $A_{a \rightarrow 1} + A_{1 \rightarrow a} = 0$. Поэтому схема термодинамического цикла двигателя Отто принимает вид, показанный на рис. 10.11а, причем, как указывалось выше процессы $3 \rightarrow 4$ и $1 \rightarrow 2$ приближенно можно рассматривать как адиабатические. Основными параметрами цикла являются степень сжатия $E = \frac{V_1}{V_2}$ (V_1 – полный объем цилиндра, V_2 – объем камеры сгорания) и степень повышения давления $\lambda = P_3/P_2$. Учитывая указанный выше характер процессов $3 \rightarrow 4$ и $1 \rightarrow 2$ (процессы $4 \rightarrow 1$ и $2 \rightarrow 3$ являются изохорическими) можно получить соотношения между параметрами состояния для узловых точек цикла 2;3;4

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^k = E^k, \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{k-1} = E^{k-1}, \quad \frac{P_3}{P_2} = \lambda, \quad \frac{T_3}{T_2} = \frac{P_3}{P_2}, \quad \frac{P_4}{P_3} = \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^k = \frac{1}{E^k},$$

$$\frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{k-1} = E^{\frac{1}{k-1}}, \quad k = \frac{C_p}{C_v}. \quad (10.83)$$

Исходя из 1-го начала термодинамики, можно определить количество подводимой и отводимой теплоты q_1 и q_2 при $V=const$, а затем и работу цикла a :

$$q_1 = C_V(T_3 - T_2) = C_V T_1 E^{k-1}(\lambda - 1), \quad q_2 = C_V(T_4 - T_1) = C_V T_1(\lambda - 1), \quad (10.84)$$

$$a = q_1 - q_2 = C_V T_1 E^{k-1}(\lambda - 1) \left(1 - \frac{1}{E^{k-1}}\right). \quad (10.85)$$

Наконец для термического КПД цикла двигателя Отто имеем:

$$\eta_V = 1 - \frac{1}{E^{k-1}}. \quad (10.86)$$

С увеличением степени сжатия КПД двигателя растет. Однако увеличение E ограничено, во-первых, пределами повышения максимального давления P_3 в цикле в результате чего увеличение E более 10-12 оказывается технически нецелесообразным, и, во-вторых, опасностью детонации («взрывного» сгорания топлива) в конце процесса сжатия при больших E , зависящих, прежде всего, от сорта топлива. Эти соображения обуславливают на практике вполне определенный выбор предельной, обычно невысокой, степени сжатия в двигателе.

В двигателях Дизеля («дизелях») осуществляется самовоспламенение горючей смеси при больших степенях сжатия (до $E \approx 20$), при максимальных давлениях до 10 атм и температурах до 800°C , что позволяет повысить КПД двигателя.

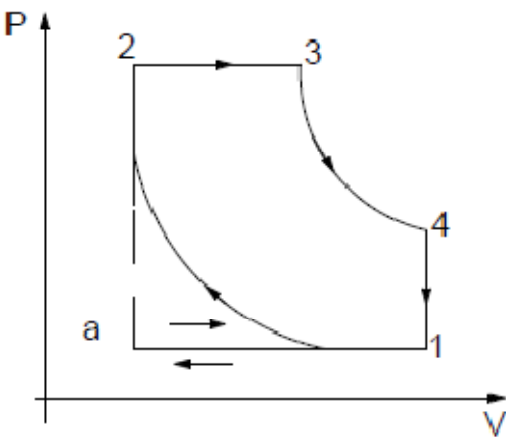


Рис. 10.15

Идеализированная схема («индикаторная диаграмма») работы такого двигателя, показана на рис. 10.15. Его полный цикл состоит из следующих процессов: а-1 – всасывание воздуха в цилиндр, 1-2 – адиабатический процесс сжатия воздуха 2-3 – воспламенение и горение топлива ($P = \text{const}$), при этом вводится количество теплоты q_1 , 3-4 – адиабатическое

расширение продуктов сгорания, 4-1+а – удаление продуктов сгорания в атмосферу (выхлоп), причем от рабочего тела отводится некоторое количество тепла q_1 . Если устранить из рассмотрения процессы а+1 и 1-а, суммарная работа в которых равна 0, а состояние рабочего тела не изменяется, то получается термодинамический цикл дизельного двигателя, показанный на рис. 10.11б и состоящий из 2 адиабат, изобары теплоподвода и изохоры теплоотвода. Основными параметрами цикла (при заданном начальном состоянии 1) являются степень сжатия и степень предварительного расширения. Учитывая указанный характер процессов, образующих цикл дизеля, можно получить соотношение между параметрами для узловых точек цикла 2;3;4:

$$\frac{P_2}{P_1} = E^k, \quad \frac{T_2}{T_1} = E^{k-1}, \quad P_2 = P_3 = P_1 E^k, \quad \frac{T_3}{T_1} = E^{k-1} \rho, \quad \frac{P_4}{P_1} = \rho^k, \\ \frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{k-1} = \left(\frac{V_3}{V_1}\right)^{k-1} = \frac{\rho^{k-1}}{E^{k-1}}, \quad \frac{T_4}{T_1} = \rho^k, \quad \left(k = \frac{C_P}{C_V}\right). \quad (10.87)$$

Исходя из 1-го начала термодинамики, можно найти выражения для количества подведенной теплоты q_1 (2-3) и отведенной теплоты q_2 (4-1):

$$q_1 = C_p(T_3 - T_2) = C_p T_1 E^{k-1}(\rho - 1); \quad q_2 = C_v(T_4 - T_1) = C_v T_1 \rho^{k-1} \quad (10.88)$$

Работа за один цикл равна:

$$a = q_1 - q_2 = C_p T_1 E^{k-1}(\rho - 1) \left[1 - \frac{\rho^{k-1}}{k E^{k-1}(\rho - 1)} \right]. \quad (10.89)$$

Наконец термический КПД цикла определяется выражением:

$$\eta_P = 1 - \frac{\rho^{k-1}}{k E^{k-1}(\rho - 1)}. \quad (10.90)$$

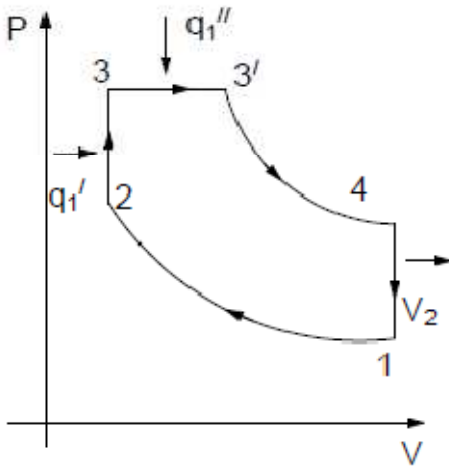


Рис. 10.16

Теперь величина КПД зависит от 2 параметров – E и ρ (а также от рода газа – величина k), причем с увеличением степени сжатия E , КПД возрастает, как и в цикле с теплоподводом при $V = \text{const}$, а с увеличением степени предварительного расширения – уменьшается, причем работа цикла увеличивается, как и величина q_1 . Из формул (10.86) и (10.90) видно, что величины η_V и η_P различаются множителем

$$\frac{\rho^{k-1}}{k(\rho-1)} > 1. \quad (10.91)$$

При одинаковых степенях сжатия (E) $\eta_V > \eta_P$. Напротив, при одинаковых максимальных давлениях и температурах и различных степенях сжатия при неизменном отводимом количестве теплоты $\eta_P > \eta_V$. Обычно дизели работают при $E=14-18$ и имеют при этих условиях больший КПД, чем двигатели Отто.

Безкомпрессорные ДВС обладают достоинствами обоих описанных выше двигателей. В них распыление топлива осуществляется механическим путем – впрыскиванием в камеру сгорания через воронку после предварительного сжатия насосом, примерно до 1500 атм. Теплоотвод в результате сгорания топлива вначале идёт при повышении давления (при этом подводится количество теплоты q_1'), а затем при постоянном давлении (количество введенного тепла q_1''), что характерно для ДВС со «смешанным» типом теплоотвода в цикле. Диаграмма p - V для такого цикла имеет вид, показанный на рис. 10.16. Он состоит из таких процессов: 1-2 – адиабатическое сжатие, 2-3 – подвод теплоты при постоянном объеме (изохорический процесс), 3-3' – подвод теплоты при постоянном давлении (изобарический процесс), 3'-4 – адиабатическое расширение, 4-1 – отвод некоторого количества теплоты q_2 при $V = \text{const}$.

Между параметрами: состояния в узловых точках цикла теперь имеют место соотношения:

$$\frac{P_2}{P_1} = E^k; \quad \frac{T_2}{T_1} = E^{k-1}; \quad \frac{P_3}{P_1} = E^k \lambda; \quad \frac{T_3}{T_1} = E^{k-1} \lambda; \quad P_{3'} = P_3;$$

$$\frac{T_{3/}}{T_1} = \lambda E^{k-1} \rho; \quad \frac{P_4}{P_1} = \rho^k \lambda; \quad \frac{T_4}{T_1} = \lambda E^{k-1} \rho^k. \quad (10.92)$$

Выражения для подводимой и отводимой теплоты и работы за цикл имеют вид:

$$q_1' = C_V(T_3 - T_2); \quad q_1'' = C_P(T_{3/} - T_3); \quad q_2 = C_V(T_4 - T_1);$$

$$q_1 = q_1' + q_1''; \quad a = q_1' + q_1'' - q_2. \quad (10.93)$$

Подстановка соответствующих значений в формулу для КПД дает:

$$\eta_{\text{см}} = 1 - \frac{q_2}{q_1' + q_1''} = 1 - \{(\lambda \rho^k - 1)/E^{k-1}[(\lambda - 1) + k\lambda(\rho - 1)]\}. \quad (10.94)$$

И в этом случае величина КПД возрастает с увеличением степени сжатия.

Рассмотренные выше циклы являются частными случаями «смешанного» цикла, используемого практически во всех современных дизельных двигателях: при $P=1$ получается цикл с теплоподводом при

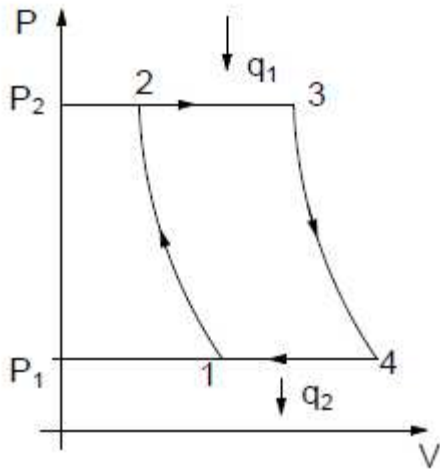


Рис. 10.17

$V=const$, а при $\lambda=1$ – цикл с теплоотводом при $P=const$. При одинаковых конечных давлениях и температурах, и одинаковом количестве отводимого тепла для всех трех циклов между КПД имеет место соотношение:

$$\eta_P > \eta_{\text{см}} > \eta_V. \quad (10.95)$$

Помимо поршневых ДВС, к этому классу двигателей относятся газотурбинные установки (ГТУ), в которых продукты сгорания газа из камеры сгорания поступают на лопатки турбины и в процессе расширения совершают работу по вращению турбины. По сравнению с поршневыми ДВС, ГТУ обладают

большими мощностями и повышенными КПД; отсутствие поступательно движущихся деталей и получение больших скоростей вращения обеспечивают возможность простых конструкций с пониженным весом и уменьшенными габаритами. Эти достоинства ГТУ имеют особое значение для авиации, где перечисленные требования выступают на передний план.

Как при рассмотрении ДВС и других типов, термодинамические циклы ГТУ принимаются замкнутыми и обратимыми, рабочее тело считается идеальным газом с неизменными физическими свойствами и химической устойчивостью и т. д. Эти идеализированные циклы полагают в основу инженерных теплотехнических расчетов.

Рассмотрим идеализированный цикл наиболее распространенных для ГТУ с теплоотводом при $P=const$ (рис. 10.17). На участке 1-2 имеет место адиабатическое сжатие газа компрессором. Сжатый воздух поступает в камеру сгорания, в которую выпрыскивается жидкое топливо с помощью насоса, выделение тепла при сгорании топлива при $P=const$ соответствует

участку цикла 2-3. На участке 3-4 продукты сгорания адиабатически расширяются в сопловом аппарате и частично на лопатках турбины, на валу которой находятся упомянутые компрессор и насос. На участке 4-1 продукты сгорания отдают тепло окружающему воздуху в изобарическом процессе. Основными параметрами такого цикла являются степень повышения давления воздуха $\pi = \frac{P_2}{P_1}$ и степень предварительного расширения $\rho = \frac{V_3}{V_2}$. Соотношение между параметрами газа в узловых точках цикла имеют вид:

$$\frac{T_2}{T_1} = \pi^{\frac{k-1}{k}}; \quad \frac{T_3}{T_4} = \pi^{\frac{k-1}{k}} \rho; \quad \frac{T_4}{T_1} = \rho. \quad (10.96)$$

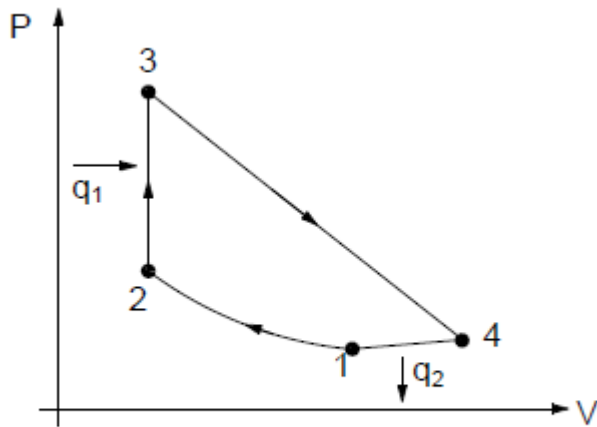


Рис. 10.18

Согласно 1-му началу термодинамики, получаются следующие выражения для количества подводимого и отводимого тепла и работы цикла:

$$q_1 = C_p(T_3 - T_2); \quad q_2 = C_p(T_4 - T_1); \quad a = C_p T_1 \pi^{\frac{k-1}{k}} (\rho - 1) \left(1 - \frac{1}{\pi^{\frac{k-1}{k}}} \right). \quad (10.97)$$

Наконец, термический КПД цикла равен:

$$\eta_p = 1 - \frac{1}{\pi^{\frac{k-1}{k}}}. \quad (10.98)$$

С ростом степени повышения давления в компрессоре 2, КПД ГТУ возрастает в связи с уменьшением q_2 при неизменном q_1 . В то же время увеличение π приводит к повышению температуры газов, поступающих в турбину, которая при современных материалах для турбиностроения не должна превышать примерно 1000°C , что и ограничивает достижимый КПД ГТУ.

В ГТУ с теплоподводом при постоянном объеме воздух, сжатый компрессором, подается в камеру сгорания через регулируемый клапан, а поступление продуктов сгорания на турбину, регулируется вторым клапаном. Топливо периодически впрыскивается в камеру через форсунку с помощью насоса, который, как и компрессор, находится на валу турбины. В замкнутом объеме камеры (при закрытых клапанах) топливо сгорает при постоянном объеме, и в результате повышения давления до определенной величины, выходной клапан открывает доступ газов к лопаткам турбины. После прохождения турбины, газы выбрасываются в окружающую среду.

Этим процессам соответствует схема термодинамического цикла, показанная на рис. 10.18: 1-2 – адиабатическое сжатие в компрессоре 2-3 сгорание топлива при постоянном объеме, 3-4 – адиабатическое расширение продуктов сгорания на лопатках турбины, 4-1 – охлаждение продуктов сгорания при постоянном внешнем давлении. Основными параметрами

цикла, являются степень повышения давления в компрессоре (1-2) $\pi = \frac{P_2}{P_1}$ и степень изохорического повышения давления (2-3) $\lambda = \frac{P_3}{P_2}$. Температура в узловых точках цикла определяется формулами:

$$\frac{T_2}{T_1} = \pi^{\frac{k-1}{k}}; \quad \frac{T_3}{T_1} = \pi^{\frac{k-1}{k}} \cdot \lambda; \quad \frac{T_{cp}}{T_1} = \lambda^{\frac{1}{k}}. \quad (10.99)$$

В цикле совершается работа

$$a = C_V T_1 \pi^{\frac{k-1}{k}} (\lambda - 1) \left[1 - \frac{k \left(\lambda^{\frac{1}{k}} - 1 \right)}{\pi^{\frac{k-1}{k}} (\lambda - 1)} \right] \quad (10.100)$$

и термический КПД равен:

$$\eta_U = 1 - \frac{k \left(\lambda^{\frac{1}{k}} - 1 \right)}{\pi^{\frac{k-1}{k}} (\lambda - 1)}. \quad (10.101)$$

С ростом степени повышения давления π , КПД возрастает также, как η_P (при $P=const$, формула (10.98)). При одинаковой величине π и равной величине q_2 , цикл с теплоподводом при $V=const$ оказывается выгоднее, чем цикл с $P=const$. Однако первый из них все же применяется сравнительно реже второго из-за конструктивно-технических затруднений при реализации цикла.

В ГТУ с регенерацией теплоты, являющихся наиболее экономичными, тепловая энергия обработанных горячих газов частично используется для начального подогрева воздуха на входе в камеру сгорания. Это осуществляется в теплообменнике, куда направляется воздух, сжатый в компрессоре, перед поступлением в камеру сгорания, в которую подается топливо через форсунку с помощью насоса (насос и компрессор находятся на валу турбины). Предварительный подогрев воздуха позволяет подводить к нему меньшее количество теплоты для достижения

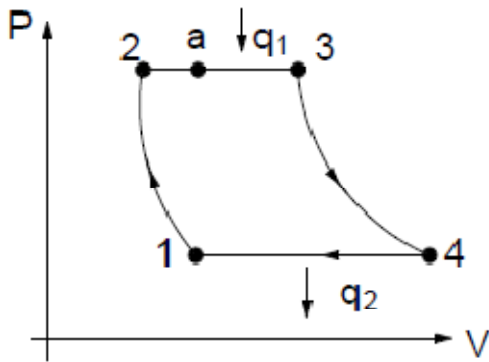


Рис. 10.19

необходимой температуры перед турбиной, что и обуславливает повышение КПД цикла. В принципе регенерация теплоты возможна в ГТУ, работающих с теплоотводом как при $P=const$, так и $V=const$, однако первый тип ГТУ более распространен, как указывалось выше. В случае тепловыделения в камере при $P=const$ цикл, представленный на рис. 10.19, включает следующие процессы: 1-2 – адиабатическое сжатие в компрессоре, 2-а – изобарический подогрев воздуха в теплообменнике (регенераторе), а-3 – сгорание топлива при $P=const$, 3-4 – адиабатическое расширение газов в турбине, 4-1 – охлаждение газов при $P=const$ в регенераторе, 1 – отдача

теплоты в окружающую среду.

Регенерация является полной, если газы в регенераторе охлаждаются до температуры поступающего в него воздуха: $T_B = T_2$, тогда $T_4 - T_B = T_a - T_2$. Основными параметрами цикла являются те же величины π и ρ , что и в отсутствие регенератора. Соотношения между температурами узловых точек цикла ($P = \text{const}$, полная регенерация):

$$\frac{T_2}{T_1} = \pi^{\frac{k-1}{k}}; \quad \frac{T_3}{T_1} = \pi^{\frac{k-1}{k}} \cdot \rho; \quad \frac{T_4}{T_1} = \rho \quad (10.102)$$

Выражение для количества подводимой и отводимой теплоты имеют вид:

$$q_1 = C_p(T_3 - T_a) = C_p(T_3 - T_4); \quad q_2 = C_p(T_l - T_a) = C_p(T_2 - T_1). \quad (10.103)$$

Термический КПД цикла равен:

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_4} = 1 - \frac{1}{\rho}. \quad (10.104)$$

Таким образом, при полной регенерации КПД, ГТУ зависит только от параметра ρ – степени предварительного расширения ($= \frac{V_3}{V_2}$). Однако в реальных двигателях полной регенерации не происходит, и $T_B > T_2$. Тогда КПД цикла зависит еще от одного параметра – степени регенерации σ , которая характеризует отношение фактического количества отданного воздуху тепла к предельному количеству в условиях полной регенерации:

$$\sigma = \frac{T_a - T_2}{T_a - T_l} \quad (10.105)$$

(при полной регенерации $\sigma=1$, при отсутствии регенерации $\sigma=0$, т. к. $T_2 = T_a$).

Степень регенерации зависит от размеров и конструктивных особенностей теплообменника, причем очевидно возрастает с увеличением теплообменной поверхности. Однако это приводит к нежелательному (в особенности авиации) увеличению веса регенератора. Поэтому регенерации обычно используются только в стационарных «земных» условиях. В современной авиации главную роль играют реактивные двигатели различных типов, которые будут кратко рассмотрены ниже.

10.7 Реактивные двигатели

Основные принципы реактивных и ракетных двигателей уже пояснялись выше. Реактивная тяга создается за счет истечения из сопла с большой скоростью струи газов, образовавшихся в результате сгорания жидкого или твердого топлива. Сила тяги в общем случае определяется выражением:

$$R = \frac{\sigma + \sigma_T}{g} V_C - \frac{\sigma}{g} V_0 + (P_C - P_H) F_C. \quad (10.106)$$

Здесь σ и σ_T – секундные весовые расходы воздуха и топлива соответственно, V_0 – скорость набегающего потока V_C, P_C и F_C – скорость, давление и площадь в выходном сечении сопла двигателя (P_H – давление окружающей среды), g – ускорение силы тяжести. В ряде случаев формулировка (10.106) значительно упрощается. Так, если в двигателе в

результате расширения потока $P_C = P_H$, то вместо (10.106) имеем:

$$R = \frac{\sigma - \sigma_T}{g} V_C - \frac{\sigma}{g} V_0. \quad (10.107)$$

Далее для турбореактивных двигателей с малым расходом топлива (до 2% от расхода воздуха) $\sigma_T \ll \sigma$ и принимает простой вид:

$$R = \frac{\sigma(V_2 - V_C)}{g}. \quad (10.108)$$

Если двигатель установлен на летательном аппарате, то V_0 имеет смысл скорости его полета. Если же, наконец, расход воздуха отсутствует, то формула (10.108) принимает простейший вид:

$$R = \frac{\sigma_P V_C}{g}. \quad (10.109)$$

Создание современных мощных реактивных двигателей привело к революции в авиации, позволив преодолеть звуковой барьер, и сыграло решающую роль в выходе человека в Космос. Существует огромное количество различных типов современных реактивных двигателей. Ниже рассмотрены лишь принципиальные основы их действия и некоторые примеры термодинамических циклов в реактивных двигателях. На рис. 10.20 представлена примерная классификация реактивных двигателей.

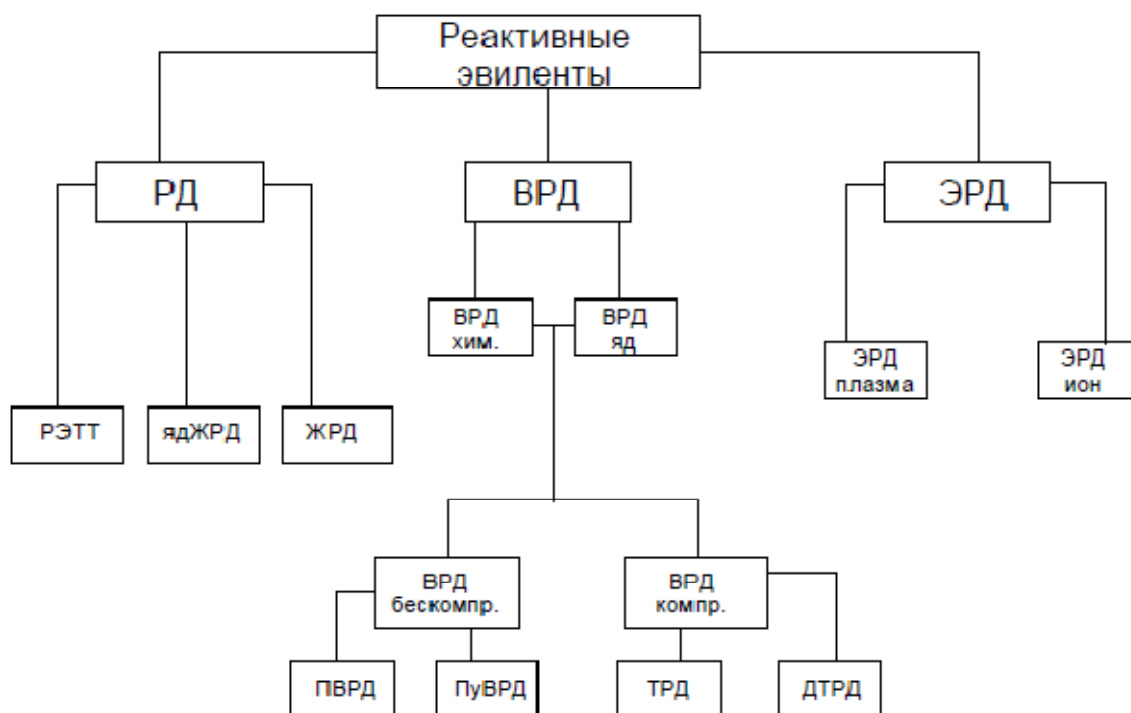


Рис. 10.20

Для реактивных двигателей (РД) характерна автономность (отсутствие связи с окружающей средой) и независимость рабочих характеристик от скорости полёта ракеты. В ракетных двигателях на твердом химическом топливе (РДТТ) оно обычно размещается непосредственно в камере сгорания. После возгорания продукты горения заполняют весь объем камеры и вытекает из сопла с большой скоростью. Температура в камере достигает 3000 К, давление – 200 атм. Сила тяги существенно зависит от начальных

значений этих параметров (что является одним из недостатков РДТТ) достигает $2 \cdot 10^6 \text{ Н}$ ($2 \cdot 10^5 \text{ кГс}$). Простота, надежность и другие достоинства этих двигателей обусловили их широкое применение, начиная от малых реактивных снарядов до больших космических систем.

Двигатели на жидком химическом топливе – жидкостно-реактивные двигатели (ЖРД) также широко применяются на ракетах весьма разнообразных видов (на космических, баллистических, метеорологических и т. д.), а также на самолетах. Топливо состоит из 2 основных компонентов – окислителя и горючего, которые испаряются, смешиваются и сгорают за короткое время (до 4мс), образуя газы с температурой до 4000 К, которые расширяются в сопле и истекают со сверхзвуковой скоростью (до 3000 м/с). Тяга ЖРД достигает $\approx 10^6 \text{ кГс}$ и более, причем их удельная тяга (т. е. реактивная сила, развиваемая на единицу расхода топлива) обычно выше, чем для РДТТ (достигает 400 кГс/кг). Большим достоинством ЖРД является малый относительный вес конструкции (менее 20 кг на 10^3 кГс тяги, не считая баков для горючего), что было использовано при создании различных типов ракет, предназначенных для полетов на космических скоростях и больших высотах.

Для дальних космических полетов ракеты с двигателями на химическом топливе мало пригодны из-за их недостаточной энергоемкости. Значительно большую силу тяги могут создавать ядерные жидкостно-реактивные двигатели (ЯдЖРД), в камере сгорания которых помещается управляемый ядерный реактор. Энерговыделение в реакторе на единицу массы топлива на много порядков больше, чем при использовании химического топлива. Рабочее тело в ЯдЖРД нагревается за счет кинетической энергии осколков ядерного деления и обычно выбирается с малой молекулярной массой и большой теплоемкостью. Предлагается использовать жидкий водород, воду и аммиак, причем первый из них обеспечивает наибольшую тягу и используется в опытных образцах таких двигателей. Несмотря на перспективность ЯдЖРД в качестве двигателей для космических кораблей, в настоящее время они не получили распространение из-за присущего им большого недостатка – опасность радиоактивного заражения окружающей среды (при прохождении земной атмосферы) и поражения экипажа радиоактивными излучениями. Во избежание этих эффектов необходимо устанавливать систему радиационной защиты, что приводит к утяжелению конструкции и создает большие технические затруднения.

Воздушно-реактивные двигатели (ВРД) используют в качестве рабочего тела атмосферный воздух и потому применяются на ракетах и летательных аппаратах в околоземном пространстве. В ВРД на химическом топливе, окислителем служит кислород воздуха, а в качестве горючего обычно используется керосин. В ВРД на ядерном топливе, нагрев рабочего тела-воздуха – осуществляется в каналах управляемого ядерного реактора. По способу сжатия воздуха ВРД подразделяют на безкомпрессорные и

компрессорные; в свою очередь, безкомпрессорные ВРД делятся на прямоточные (ПВРД) и пульсирующие (ПуВРД) двигатели.

При полете на высотах вблизи 15 км ПуВРД обеспечивает тягу до $2 \cdot 10^5$ Н, удельную тягу до 1000 Н с/кг и применяются на зенитных управляемых ракетах, сверхзвуковых истребителях и крылатых ракетах дальнего действия. В пульсирующих ВРД благодаря наличию входных клапанов горючее получается в камеру сгорания периодически, причем частота вспышек в камере близка к собственной частоте колебаний газового потока в двигатели. В отличие от ПВРД, цикл ПуВРД протекает при $V = \text{const}$, что делает этот двигатель более экономичным. Однако при больших скоростях полета ПуВРД становится малоэффективным и используется главным образом в авиационных моделях.

Компрессорные ВРД подразделяются на турбореактивные (ТВД) и двухконтурные турбореактивные двигатели (ДТРД). ТРД широко используются в качестве силовых установок на самолетах гражданской и военной авиации, а также на первых ступенях космических ракет, поскольку высокая эффективность этих двигателей позволяет использовать их на высотах полета более 30 км. Удельная тяга ТРД достигает более 700 Нс/кг, при общей тяге до 200 кН. В ДТРД имеются 2 контура – внутренний и внешний. Во внутреннем контуре содержатся те же основные узлы, что и в обычном ТРД, причем турбина развивает некоторую избыточную мощность, используемую для работы компрессора во внешнем контуре, в котором сгорает дополнительное количество топлива. Большая мощность и экономичность ДТРД в области не слишком высоких (дозвуковых) скоростей обуславливает их применение главным образом в транспортной авиации.

В стадии интенсивной разработки находятся в настоящее время электроракетные двигатели, весьма перспективные для использования в качестве силовых установок для «тяжелых» космических летательных аппаратов, предназначенных для длительных полетов при сравнительно небольшой силе тяги.

Существуют различные принципы создания электрореактивных двигателей за счет использования в качестве рабочего тела заряженных частиц, ускоряемых электрическими и магнитными полями. При этом, необходимые значительные количества электроэнергии будут создаваться за счет тепловой энергии ядерного реактора. В ионных ЭРД будет создаваться ионизация рабочего тела с последующим ускорением потока ионов: путем компенсации объемного ионного заряда электронами будет обеспечиваться электрическая нейтральность двигателя в целом. В то же время наличие этого объемного заряда ограничивает достижимую плотность ионного тока и тем самым – тягу ЭРД. Однако возможность достижения высоких скоростей истечения (до 200 км/с) позволяет использовать ионные ЭРД для многих космических систем, в которых не требуется обеспечение большой удельной тяги.

В плазменных ЭРД сила тяги будет создаваться потоком электрически нейтральной плазмы, образуемой в результате дугового разряда в газе,

например, в He, Ar, N и др. Поэтому такие двигатели могут развивать большую удельную тягу по сравнению с ионными ЭРД – 50 кНс/кг и более. Ускорение плазмы может осуществляться за счет магнитных сил или же обычным путем, за счет расширения в сопле. При больших значениях температуры и давления в плазме скорость истечения даже в простом расширении в сопле может быть весьма значительной. Характерной для ЭРД

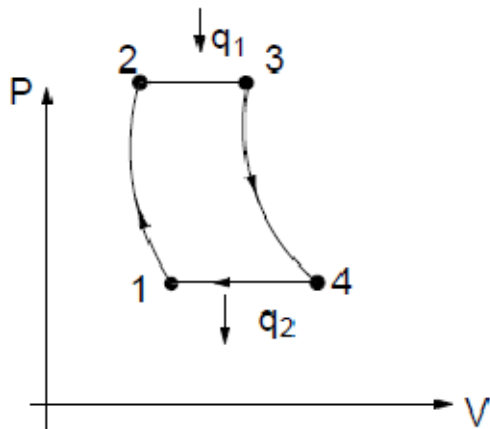


Рис. 10.21

будет очень большая величина срока службы, что является важнейшим требованием для осуществления длительных космических программ.

Рассмотрим некоторые термодинамические циклы, характерные для наиболее распространенных реактивных двигателей. В

безкомпрессорных ВРД прямоточного типа тепловыделение при сгорании топлива происходит при постоянном давлении (непрерывно). Сжатие воздуха происходит за счет скоростного напора при полете, причем в зоне горения, скорость должна

быть достаточной (не менее 150 м/с) для обеспечения непрерывного сгорания топлива, выпрыскиваемого в камеру через форсунки при $P = \text{const}$. Идеализированный цикл работы прямоточного ВРД представлен на рис. 10.21 и состоит из следующих процессов: 1-2 – адиабатическое сжатие воздуха во входной части – диффузоре, 2-3 – сгорание топлива при $P = \text{const}$, 3-4 – адиабатическое расширение продуктов сгорания в области выходного сопла, 4-1 – изобарное охлаждение продуктов сгорания в окружающей среде. Этот цикл обладает большим сходством с рассмотренным выше циклом ГТУ с теплоподводом при $P = \text{const}$ (см. рис. 10.17). Поэтому КПД цикла можно оценить по формуле (см. 10.98):

$$\eta_P = 1 - \frac{1}{\pi_D^{\frac{k-1}{k}}}, \quad (10.109)$$

где $\pi_D = P_2/P_1$ – степень повышения давления воздуха в диффузоре – является основным параметром данного цикла. С увеличением скорости полета, КПД двигателя возрастает. При нулевой скорости и тяга также равна 0, поэтому необходимы дополнительные стартовые двигатели (например, ТРД) для запуска

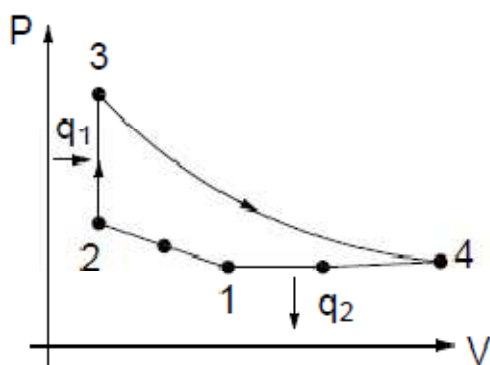


Рис. 10.22

летательных аппаратов с двигателями этого типа. Экономичное использование прямоточных безкомпрессорных ВРД возможно лишь при сверхзвуковых скоростях (в 2-3 раза больше скорости звука).

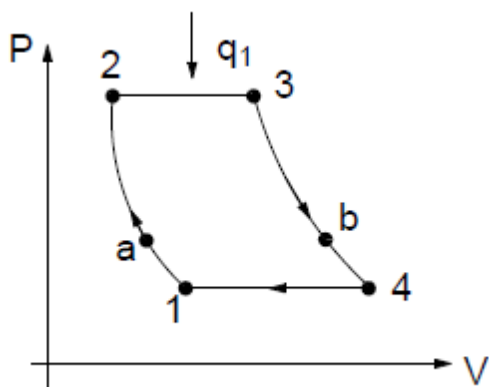


Рис. 10.23

Типичный цикл пульсирующего безкомпрессорного ВРД показан на рис. 10.22; для него характерно сгорание топлива в камере при закрытых клапанах, т. е. при постоянном объеме (процесс 2-3 на рис. 10.22). Остальные стадии цикла аналогичны перечисленным выше (см. рис. 10.21). Такой цикл аналогичен циклу ГТУ с теплоподводом при $V = \text{const}$ (см. рис. 10-18) и его КПД можно вычислить до формуле, сходной с (10.101):

$$\eta_V = 1 - k \left(\lambda^{\frac{1}{k}} - 1 \right) / \pi_D^{\frac{k-1}{k}} (\lambda - 1), \quad (10.110)$$

где π_D – степень повышения давления в диффузоре, λ – степень повышения давления в процессе тепловыделения при $V = \text{const}$. Как уже указывалось выше, по ряду причин ПуВРД находят лишь ограниченное применение (главным образом в авиамоделировании, ввиду экономичной работы при меньших скоростях, чем для ВРД).

Компрессорные турбореактивные двигатели (ТРД) являются основой силового обеспечения современной авиации (как гражданской, так и военной). Сжатие воздуха в ТРД осуществляется как за счет скоростного напора в полете, так и за счет действия осевого или центробежного компрессора (Π_k), так что полная степень повышения давления воздуха равна их сумме. Продукты сгорания из камеры поступают на рабочие лопатки турбины, расширяются и производят механическую работу, расходуемую на привод компрессора. В выходном сопле происходит расширение газов до достижения атмосферного давления. Тяга этого двигателя очевидно не равна нулю и на старте (при нулевой скорости).

Схема цикла ТРД показана на рис. 10.23. Здесь 1-а – сжатие воздуха в диффузоре, а-2 – сжатие в компрессоре, 2-3 – сгорание топлива, 3-в – расширение продуктов сгорания в турбине, в-4 – расширение в реактивном сопле, 4-1 – окончательное охлаждение продуктов сгорания в атмосфере. КПД цикла вновь определяется формулой (10.98) в которой:

$$\pi = \pi_g \cdot \pi_k = \frac{P_2}{P_1} \quad (10.111)$$

В заключении рассмотрим цикл жидкостно-реактивного двигателя (ЖРД), который в настоящее время используется на самолетах, баллистических ракетах и снарядах, а также в качестве силового привода установок бурения скважин в твердых породах. Жидкое топливо состоит из 2 компонентов – горючего и окислителя, которые смешиваются в ней и сгорают, а продукты сгорания расширяются в сопле и вытекают из него с большой скоростью, охлаждаясь в окружающей атмосфере. Сила реактивной тяги определяется простой формулой, уже приводившейся выше: $P = \sigma W$, где σ – массовый расход топлива, W – скорость газов в выходном сечении сопла.

Цикл ЖРД схематически представлен на рис. 10-24. Подача топлива в

камеру сгорания приводит к повышению давления от P_1 до P_2 , а топливо занимает объем, равный V_T . Обычно при термодинамическом рассмотрении объемом топлива пренебрегают по сравнению с объемом газообразных продуктов сгорания, когда линия 1-2 сливается с осью координат ($V=0$). На участке 2-3 происходит горение топлива при постоянном давлении и непрерывном увеличении объема газообразных продуктов сгорания. Процесс 3-4 соответствует расширению продуктов сгорания в реактивном сопле, а процесс 4-1 – их охлаждению после выброса в окружающую атмосферу. При термодинамических расчетах рабочее тело считают идеальным газом с постоянной теплоемкостью, а все составляющие цикла процессы – обратимыми (разумеется, эти допущения выполняются лишь с той или иной степенью приближения). Основным параметром цикла является степень расширения газа.

$$\delta = \frac{P_4}{P_3}. \quad (10.112)$$

Для количества подводимого и отводимого тепла q_1 и q_2 имеем:

$$q_1 = C_p(T_3 - T_2); \quad q_2 = C_p(T_4 - T_1). \quad (10.113)$$

Тогда термический КПД цикла, при допущении о малости температур T_1 и T_2 , по сравнению с T_3 и T_4 (которые достигают нескольких тысяч К) определяются по формуле:

$$\eta = 1 - \frac{q_2}{q_1} \approx 1 - \frac{T_4}{T_3}. \quad (10.114)$$

Если считать процесс расширения продуктов сгорания 3→4 адиабатическим, то

$$\frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{P_4}{P_3}\right)^{\frac{k-1}{k}}. \quad (10.115)$$

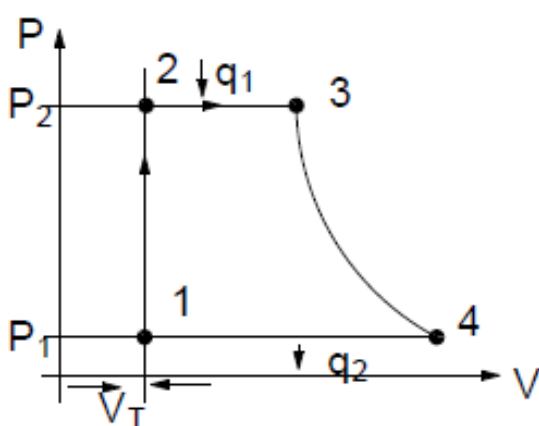


Рис. 10.24

При этом для КПД имеем:

$$\eta = 1 - \delta^{\frac{k-1}{k}}. \quad (10.116)$$

С увеличением степени расширения КПД цикла возрастает, однако этот рост значителен лишь до определенных значений, поэтому применение чрезмерно высоких давлений в камере сгорания, связанное с неизбежным утяжелением конструкции камеры, нецелесообразно. Более рациональным путем повышения КПД является увеличение K , что достигается увеличением содержания одно- или двухатомных газов в продуктах сгорания.

10.8 Холодильные машины и тепловые насосы

Как указывалось выше, машины, работающие по «обратному» термодинамическому циклу (см. п. 10-2), осуществляют перенос тепла от более холодных тел к более горячим за счет совершения механической

работы и потому являются холодильными машинами или тепловыми насосами. Применение этих машин в современной технике весьма многообразно.

Существуют различные системы холодильных машин – парокompректорные, адсорбционные, воздушно-расширительные и другие. В машинах первых 2-х типов охлаждение достигается в результате кипения низкокипящих жидкостей, в машинах третьего типа используется расширение сжатого воздуха в специальном устройстве – детандере. Наиболее широко распространенными и универсальными являются парокompректорные холодильные машины, содержащие испаритель, холодильный компрессор, конденсатор и терморегулирующий вентиль (ТРВ), герметично соединенные трубопроводом с соответствующей арматурой, причем используются разнообразные типы компрессоров – поршневые, ротационные, винтовые и другие. В испарителе рабочее тело-хладагент кипит и интенсивно испаряется при пониженном давлении и низкой температуре.

В качестве хладагентов обычно используются CO_2 , CH_3Cl , аммиак или фреоны (хладоны). Наиболее широкое применение нашли фреон – 13, кипящий при температуре ниже -50°C ; фреон – 12; фреон – 22 (кипящие ниже -10°C – «умеренные» хладагенты, например, фреон – 12-29, кипящие при 8°C). В результате теплоотвода на кипение температура охлаждаемого тела понижается, в пределе – до точки кипения хладагента. Образующийся при кипении пар, поступает в конденсатор с воздушным или водяным охлаждением, где и конденсируется. Жидкий хладагент возвращается в испаритель через ТРВ, в котором давление и температура снижаются до значений, необходимых для замыкания холодильного цикла. Для получения более низких температур используют многоступенчатые или каскадные холодильные машины. В первых сжатие пара проводится несколькими ступенями с промежуточными охлаждениями, что позволяет получить охлаждение ниже -80°C : вторые представляют собой по существу несколько последовательно включенных холодильных машин и дают возможность получить температуры кипения ниже -150°C .

Основными узлами абсорбционной холодильной машины являются: кипяильник, конденсатор, испаритель, абсорбер, насос и ТВР. Рабочим телом в них служат двухкомпонентные растворы; температуры кипения компонентов при одном и том же давлении существенно различны. Более низкокипящий компонент служит хладагентом, а высококипящий – абсорбентом. Часто используются водный раствор аммиака, в котором хладагентом служит аммиак, а также водный раствор бромида лития (хладагент – вода). Пары хладагента, образовавшиеся в испарителе, поглощаются в абсорбере, образующийся концентрированный раствор перекачивается насосом в кипяильник, в котором хладагент вновь испаряется и направляется в конденсатор, конденсируется и через ТРВ возвращается в испаритель; оставшийся в кипяильнике раствор

возвращается в абсорбер.

Воздушно-расширительная холодильная машина представляет собой холодильно-газовую машину с воздухом в качестве хладагента. Другими распространенными рабочими телами для этих машин служат гелий, водород, неон или азот. Рабочее тело сжимается компрессором и после прохождения через систему водяного охлаждения для отвода теплоты сжатия и предварительного охлаждения в теплообменнике испытывает основное охлаждение в результате расширения в детандере с совершением работы против внешних сил или дросселирования сжатого газа через узкое отверстие (см. эффект Джоуля-Томсона). Холодный газ, (воздух) используется в холодильной камере, а затем может быть возвращен в теплообменник для прохождения повторного сжатия (замкнутый цикл) или выброшен в атмосферу (разомкнутый цикл). Принцип дросселирования, будучи простым в конструктивном исполнении, используется лишь в малых холодильных машинах из-за его низкой эффективности. В больших машинах обычно используются расширители – детандеры, например, турбинного типа. Холодопроизводительность детандерных машин, т. е. количество теплоты, отводимое с их помощью от охлаждаемых объектов в единицу времени, достигают десятков КВт при 77 К; в современных мощных холодильных машинах достигнуты холодопроизводительности более 10 МВт.

Тепловой насос отличается от холодильной машины главным образом назначением – «производство» тепла, а не холода. Тепловой насос получает энергию от окружающей среды, помимо энергии, эквивалентной совершаемой работе, и потому является экономически выгодным способом выработки тепловой энергии, например, для целей отопления. Обычно тепловые насосы применяются на объектах, удаленных от ТЭЦ и других источников теплоснабжения, а также при наличии значительных ресурсов гидравлической энергии (горных рек). В областях с жарким климатом тепловой насос может использоваться для целей отопления, а летом – в качестве установки охлаждения воздуха в помещениях.

Эффективность холодильной машины можно охарактеризовать холодильным коэффициентом ε – отношением количества теплоты q_2 , отведенной от охлаждаемого тела, к затраченной работе за цикл на 1 кг хладагента:

$$\varepsilon = \frac{q_2}{a_{\text{ц}}} . \quad (10.117)$$

Для обратного цикла Карно

$$\varepsilon_k = \frac{q_2}{q_1 - q_2} = \frac{T_2}{T_1 - T_2} \quad (10.118)$$

(q_1 – количество теплоты, отданное в окружающую среду). Полная работа цикла определяется как

$$A = \frac{Q}{\varepsilon} , \quad (10.119)$$

где Q – холодопроизводительность цикла (см. выше). Если эту холодильную машину использовать как тепловой насос, то его эффективность можно охарактеризовать «относительным коэффициентом».

$$\varphi = \frac{q_1}{a_{\text{ц}}}, \quad (10.120)$$

где q_1 здесь – количество теплоты, сообщенное нагреваемому объекту (отопительной системе). Поскольку при этом $q_1 = q_2 + a_{\text{ц}}$, то можно показать что отопительный и холодильный коэффициенты связаны простым соотношением:

$$\varphi = \varepsilon + 1. \quad (10.121)$$

Если тепловой насос работает по циклу Карно, то из формул (10.118) и (10.121) следует:

$$\varphi = \frac{T_1}{T_1 - T_2}. \quad (10.122)$$

В реальных тепловых насосах величина φ обычно находится в интервале 3-5.

Рассмотрим теперь упрощенные термодинамические циклы некоторых холодильных машин, описанных выше. В воздушно-расширительной холодильной машине процессы сжатия в компрессоре от давления P_2 до P_1 и расширения в детандере до давления P_2 – можно приближенно считать адиабатическими, а процессы отвода тепла от охлаждаемого объекта в теплообменнике-рефрижераторе и отдачи тепла в окружающую среду в теплообменнике-холодильнике – изобарическими. Такой цикл из 2-х изобар и 2-х адиабат называют циклом Лоренца и представлен схематически на рис. 10.25. Количество теплоты, отводимое рабочим телом – воздухом – от охлаждаемого объекта q_2 в процессе 2-3 при $P = \text{const}$, считая воздух идеальным газом с постоянной теплоемкостью, можно записать как

$$a_2 = C_P(T_3 - T_2), \quad (10.123)$$

а количество теплоты, отдаваемое окружающей среде в процессе 4-1 (также при $P = \text{const}$) равно

$$q_1 = C_P(T_4 - T_1). \quad (10.124)$$

Таким образом, работа, совершаемая за цикл, определяется как

$$a_{\text{ц}} = C_P[(T_4 - T_1) - (T_3 - T_2)]. \quad (10.125)$$

Отсюда для холодильного коэффициента, согласно (10.117), получается выражение:

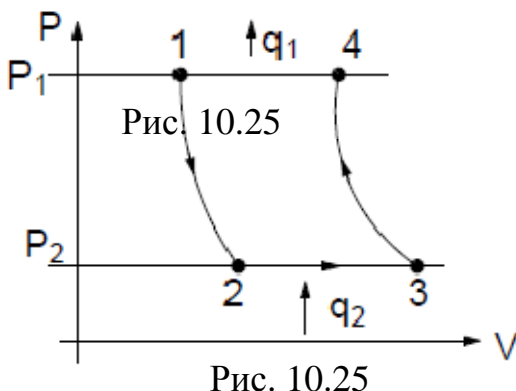
$$\varepsilon = \left(\frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} - 1 \right)^{-1}. \quad (10.126)$$

Для адиабатических процессов 3-4 и 1-2 можно написать выражение:

$$\frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{P_4}{P_3} \right)^{\frac{k-1}{k}}; \quad \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{k-1}{k}}. \quad (10.127)$$

Так как $P_1 = P_4$ и $P_2 = P_3$, то из (10.127) следует, что

$$\frac{T_4}{T_3} = \frac{T_1}{T_2}; \quad \frac{T_4 - T_2}{T_3 - T_1} = \frac{T_1}{T_2}. \quad (10.128)$$



при их транспортировке и хранении, в специальных научных исследованиях и т. д. Температуры хранения пищевых продуктов обычно находятся вблизи 1°C (для плодов и овощей – $1-1,2^{\circ}\text{C}$, картофеля – не ниже 4°C , охлажденное мясо обычно хранят при $-1-0^{\circ}\text{C}$, рыбу – от $-0,3$ до 0°C). Сроки хранения охлажденных пищевых продуктов весьма различны: рыбы – 2-10 сут., мяса – 8-12 сут. (при перевозке в вагонах-ледниках), зеленых овощей – 7-12 сут., яблок, груш, цитрусовых – 1-6 мес., корнеплодов – до 1 года. Часто охлаждение пищевых продуктов является лишь предварительной стадией их замораживания в целях консервирования, т. е. длительного хранения. При этом температуру продуктов понижают до -60°C и ниже. При такой температуре вода в растительных и животных тканях полностью замерзает (вода в живых тканях является солевым раствором и поэтому может не замерзнуть даже при от -30 до -40°C), жизнедеятельность микрофлоры практически прекращается, поэтому продукты могут сохранять свои начальные пищевые качества в течение весьма длительного времени. В пищевой промышленности широко практикуется замораживание мясных и рыбных продуктов и почти всех видов овощей.

Холодильные машины широко используют в химической нефтеперерабатывающей и газовой промышленности: при производстве аммиака и красителей, для разделения газовых смесей методом сжижения, при производстве высокооктановых бензинов, смазочных масел, для сжижения природного газа и выделения из него легкоконденсирующихся фракций. Для этих целей применяются мощные холодильные установки, работающие в широком интервале температур охлаждения. При этом применяется как непосредственное охлаждение, когда холод поступает к потребителю со сжиженным или сжатым хладагентом, так и охлаждение хладоносителем (охлажденным холодильным теплоносителем). По холодопроизводительности различают малые (до 30 тыс. ккал/ч), средние (30-500 тыс. ккал/ч) и крупные (свыше 500 тыс. ккал/ч) холодильные установки. Они применяются также в машиностроении, медицине, строительстве, для охлаждения приемников излучения с целью снижения шумов и многих других научных и технических областях.

Некоторые холодильники с малыми емкостями – менее 60 л – содержат холодильные устройства термоэлектрического типа, уступающие компрессионным машинам по основным технико-экономическим показателям. Их действие основано на термоэлектрическом эффекте Пельтье, подробно рассматриваемом в гл. 2 данного курса.

Весьма важной областью применения холодильных машин являются системы кондиционирования воздуха в общественных, производственных и жилых помещениях, предназначенные для обеспечения оптимального состава и физического состояния воздуха. В общественных и административных зданиях кондиционирование обеспечивает наиболее благоприятные (комфортные) условия для хорошего самочувствия людей. В промышленных помещениях кондиционирование воздуха направлено на

обеспечение оптимальных условий производства, с целью достижения стандартизованного качества продукции; во многих областях производства – в электронно-вакуумной, текстильной промышленности, в точном приборостроении – системы кондиционирования уже стали неотъемлемым оборудованием предприятий, и эта тенденция будет сохраняться и в дальнейшем. В рудниках и шахтах, в кабинах тракторов, комбайнов, кранов и т. п. кондиционирование служит для улучшения условий труда людей. В библиотеках, архивах, музеях, картинных галереях и т. п. кондиционирование обеспечивает наиболее благоприятные условия для длительного хранения книг и ценных произведений искусства. Кондиционирование воздуха осуществляется также в хранилищах пищевых и сельскохозяйственных продуктов, в сельскохозяйственных производственных зданиях (теплицах, парниках, птицефабриках), в медицинских учреждениях, в железнодорожных вагонах, автобусах и самолетах, на речных и морских судах и т. п. Системы кондиционирования воздуха зачастую служат для приточной вентиляции помещений, причем в теплое время года они охлаждают и осушают воздух, а в холодное время – подогревают и увлажняют его. Обычно эти системы представляют собой сложный комплекс технических средств очистки воздуха от пыли (воздушных фильтров), его осушения и увлажнения, нагрева и охлаждения, дезодорации (устранения неприятных запахов, например, на фабриках-кухнях), поддержания рационального ионного состава (степени ионизации), обогащения кислородом (регенерации воздуха) и бактериологической очистки.

Основным узлом установки для кондиционирования воздуха является кондиционер, в котором осуществляется обработка внешнего воздуха, поступающего в помещение. Кондиционеры бывают различных типов, из которых наибольшее практическое значение имеют автономные кондиционеры, представляющие собой единую систему из холодильного компрессора с двигателем, испарителя охладителя воздуха, конденсатора, воздушного фильтра и других приборов и устройств. Для кондиционирования воздуха в небольших помещениях с площадью до 50 м^2 – обычно применяются горизонтальные кондиционеры, устанавливаемые в оконных проемах с пропускной способностью до $1000 \text{ м}^3/\text{ч}$ и холодопроизводительностью до 4500 ккал/ч . Для обслуживания одного или нескольких помещений с общей площадью до 300 м^2 используются раздельно-агрегатные кондиционеры, скомпонованные в 2 корпусах, соединяемых трубопроводами (показатели – до $7000 \text{ м}^3/\text{ч}$ и до 30000 ккал/ч). В помещениях с площадью до 1700 м^2 применяются вертикальные автономные кондиционеры (шкафы), с показателями – до 16000 м^3 и до 750000 ккал/ч . Холодильные машины в кондиционерах обычно работают с фреоном – 12 или фреоном – 22 (нетоксичными и невзрывоопасными) в качестве рабочего тела по парокомпрессионному типу. Иногда используются также абсорбционные холодильные машины с газовым или электрическим

обогревом. Помимо автономных кондиционеров, используют также неавтономные кондиционеры, в которые холод или тепло поступает от внешних источников (с производительностью по воздуху до $500000 \text{ м}^3/\text{ч}$ и по холоду – до 3000000 ккал/ч) и кондиционеры-доводчики, в которые подается воздух от центрального кондиционера, тепло и холод – от внешних источников (они устанавливаются преимущественно в гостиницах, административных помещениях и т. д.). Для создания комфортного микроклимата в кабинах самолетов, кранов, автомобилей, комбайнов и т. п. и используются специальные кондиционеры-воздухоохладители, с приводами от двигателей обслуживаемых ими машин.

В будущем, системы кондиционирования воздуха получат еще более широкое распространение. В частности, во многих прикладных и фундаментальных научных исследованиях применяют климатические камеры со строго заданными параметрами состояния среды в них, которые обеспечиваются путем кондиционирования. В некоторых новых видах производства (например, полупроводников, лекарств и т. д.), обеспечение высокого качества продукции возможно только при условии поддержания чистоты и определенной температуры, что обеспечивается путем кондиционирования.

10.9 Термодинамика в химии

В химических реакциях, протекающих в газовой или жидкой фазе (например, в растворах), участвует большое количество частиц – атомов и молекул вещества. Разрыв или образование химических связей в ходе реакций приводит к изменению «внутреннего» энергетического состояния атомов или молекул; в результате этого, большинство реакций сопровождается выделением или поглощением некоторого количества энергии (в форме теплоты, кинетической энергии атомов продуктов реакции). Поэтому к химическим реакциям в полной мере применимы законы термодинамики, позволяющие описать динамику энергетических превращений без детального рассмотрения «микроскопических» механизмов реакции, которое может оказаться во многих случаях весьма затруднительным.

Специфической особенностью систем, в которых протекают химические реакции, является то, что число частиц того или иного вида (атомов или молекул) со временем изменяется. Таким образом, число частиц или масса соответствующего вещества являются также термодинамическими параметрами состояния системы, наряду с температурой и давлением. Благодаря этому, приходится вводить новую термодинамическую функцию – химический потенциал.

Запишем уравнение вида

$$U = tu, \quad (10.130)$$

где U – полная внутренняя энергия вещества, m – его масса, u – внутренняя энергия единицы массы. Полный дифференциал dU равен

$$dU = mdu + udm. \quad (10.131)$$

Согласно 1-му началу термодинамики, $du = TdS - PdV$, кроме того $mdS = d(mS) - Sdm$, а $mdV = du - Vdm$. Поэтому, после преобразований имеем:

$$dU = TdS - PdV + \mu dm. \quad (10.132)$$

Величина

$$\mu = u - \Delta T + PV \quad (10.133)$$

называется химическим потенциалом вещества:

$$\mu = \left(\frac{\partial U}{\partial m} \right)_{V,S}. \quad (10.134)$$

Протекание химической реакции изменяет массу и, следовательно, его химический потенциал. В результате, система становится неравновесной, а распределение химического потенциала – неравномерным. Эти «градиенты» химического потенциала в системе по существу и являются «движущей силой» химических реакций в ней. В результате перераспределения массы в системе изменяются также внутренняя энергия, энтропия и другие термодинамические функции. Эти изменения проявляются в виде выделения (или поглощения) теплоты или совершения механической работы. Таким образом, химическая реакция может рассматриваться как обычный термодинамический процесс, и к нему применимы все изложенные выше законы термодинамики.

Согласно изложенному выше, 1-й закон термодинамики применительно к химическим реакциям записывается в виде:

$$\Delta U = Q + A, \quad (10.135)$$

где Q и A – теплота и работа реакции, соответственно. Обычно все подобные уравнения в химии относят не к 1 кг, а к 1 кмоль вещества, поскольку реакция осуществляется отдельными молекулами, число которых в 1 кмолье всегда одинаково для любого вещества и равно $N_a = 6,02 \cdot 10^{26}$ молекул в 1 кмолье (число Авогадро). Кроме того, убыль внутренней энергии системы и выделяющаяся теплота обычно считаются положительными, т. е. (10.135) переписывается в ином виде:

$$-\Delta U = -(U_2 - U_1) = Q + A. \quad (10.136)$$

Работа реакции A представляется в виде:

$$A = \int_1^2 PdV + A_x, \quad (10.137)$$

где A_x учитывает работу электрических, магнитных и других «немеханических» сил, влияющих на протекание реакции.

При рассмотрении теплового эффекта Q химических реакций следует учитывать, что состояние системы должно характеризоваться минимум тремя параметрами из-за наличия химического потенциала (например, давление, плотность и концентрация вещества в растворе). В ходе реакции два параметра могут оставаться неизменными, а изменяется лишь третий параметр (при отсутствии реакции неизменным остается 1 параметр).

Обычно одним из этих двух параметров является температура реакции, а вторым – P или V . Это отражается в названии соответствующего термодинамического процесса, так, при $V=const$ и $T=const$, реакция называется изохорно-изотермической, а при $P=const$ и $T=const$ – изобарно-изотермической. В первом случае

$$A = A_{min} = 0; \Delta U = -(U_2 - U_1) = Q_{Vmax}. \quad (10.138)$$

Выделение теплоты при этом является максимальным.

Во втором случае, минимальная работа реакции равна

$$A_{min} = \int_{V_1}^{V_2} P dV = P(V_2 - V_1), \quad (10.139)$$

а максимальное выделяющееся количество тепла (тепловой эффект реакции):

$$Q_{Pmax} = \Delta U - P(V_2 - V_1). \quad (10.140)$$

Величины Q_{Vmax} и Q_{Pmax} существенно неодинаковы, т. е. теплота реакции зависит от условий ее протекания. Из (10.138) и (10.140) следует:

$$Q_{Vmax} = Q_{Pmax} + P(V_2 - V_1). \quad (10.141)$$

При реакции между веществами в газовой фазе, соотношение между Q_{Vmax} и Q_{Pmax} зависит от изменения числа молей газа Δn , и возможны случаи $Q_{Vmax} > Q_{Pmax}$, $Q_{Vmax} < Q_{Pmax}$ и $Q_{Vmax} = Q_{Pmax}$ (соответственно, при $\Delta n > 0$, $\Delta n < 0$ и $\Delta n = 0$). Как правило, в физической химии под теплотой реакции подразумевают Q_P (при $P=const$).

При соединении элементов с кислородом и образовании окисла (т. е. горении) обычно выделяется то или иное количество теплоты – теплота сгорания. При расчетах тепловых двигателей, тепловой эффект сгорания топлива характеризуют его теплотворной способностью, т. е. количеством теплоты, выделяющимся при сгорании 1 кг (или 1 м³) топлива.

С помощью первого начала термодинамики можно вывести некоторые эмпирические законы, установленные опытным путем в химии. Так, величина Q_{max} , согласно (10.138) и (10.140), определяются только начальными и конечными состояниями реагирующих веществ, и не зависит от пути реакции, т.е. пути перехода между этими состояниями. Это положение называется законом Гесса и представляет собой основной закон термохимии («закон постоянства тепловых сумм»). Из него следует, что теплота образования конечного продукта из исходных не зависит от способа получения, и что тепловой эффект реакции может быть найден как алгебраическая сумма теплоты образования, участвующих в реакции веществ (реагентов), из более простых (или же алгебраическая сумма теплоты сгорания реагентов до одинаковых конечных продуктов).

Закон Гесса имеет исключительное практическое значение, позволяя рассчитывать тепловые эффекты реакций (которые невозможно или затруднительно измерить калориметрическим способом), путем составления термохимических уравнений, в которых указываются состояния реагентов и тепловые эффекты реакций. Например, сгорание твердого углерода C^T , с образованием CO_2 («полном» сгорании) имеет вид:

$$C^{(T)} + O_2^{(r)} = CO_2^{(r)} + 393700 \left(\frac{\text{кДж}}{\text{моль}} \right). \quad (10.142)$$

Однако на практике процесс всегда идет с образованием монооксида CO , которая затем окисляется до CO_2 согласно уравнению:

$$CO^{(r)} + \frac{1}{2} O_2^{(r)} = CO^{(r)} + 283300 \left(\frac{\text{кДж}}{\text{моль}} \right). \quad (10.143)$$

Вычитая эти уравнения почленно и перенося CO в правую часть, можно получить

$$C^{(T)} + \frac{1}{2} O_2^{(r)} = CO^{(r)} + 110400 \left(\frac{\text{кДж}}{\text{моль}} \right). \quad (10.144)$$

Тем самым найден тепловой эффект неполного сгорания углерода по схеме (10.144).

Из (10.138) путем почленного дифференцирования можно получить:

$$\frac{\partial Q_{V \max}}{\partial T} = \left(\frac{\partial U_1}{\partial T} \right)_V - \left(\frac{\partial U_2}{\partial T} \right)_V = C_{V_1} - C_{V_2}. \quad (10.145)$$

Аналогичным образом для $Q_{P \max}$ из (10.140):

$$\frac{\partial Q_{P \max}}{\partial T} = C_{P_1} - C_{P_2} \quad (10.146)$$

или вообще:

$$\frac{\partial Q_{\max}}{\partial T} = C_1 - C_2. \quad (10.147)$$

Этот результат выражает так называемый закон Кирхгофа, согласно которому величина $\frac{\partial Q}{\partial T}$ – температурный коэффициент теплоты реакции — равен разности суммарных теплоемкостей исходных и конечных веществ для данной реакции.

Таким образом, первое начало термодинамики позволяет охарактеризовать количественно результат реакции. Направление протекания процессов указывает на 2-е начало термодинамики, согласно которому в замкнутой системе, в которой протекают химические реакции, энтропия может лишь возрасти (при необратимых процессах) или же оставаться неизменной (при обратимых процессах):

$$dS \geq 0. \quad (10.148)$$

Если, например, представить выражение (10.136) в виде

$$-dU = dQ + dA; \quad -dQ = dU + dA \quad (10.149)$$

и учесть, что

$$dS \geq -\frac{dQ}{dT}. \quad (10.149)$$

Согласно (10.148), то получим:

$$TdS \geq dU + dA. \quad (10.150)$$

После некоторых преобразований:

$$dF + PdV + SdT \leq 0, \quad (10.151)$$

где

$$F = U - TS \quad (10.152)$$

называется «изохорно-изотермическим потенциалом» или свободной энергией системы. Смысл введения функции состояния системы в виде свободной энергии « F » состоит в том, что при $V, T = \text{const}$ она характеризует

единственно вклады различных источников в работу, совершаемую системой. Из (10.152) следует:

$$dF \leq 0. \quad (10.153)$$

Таким образом, в изолированной термодинамической системе при постоянной температуре и объеме самопроизвольно протекают только реакции, сопровождающиеся уменьшением свободной энергии. При этом системой совершается механическая работа

$$A \leq F_1 - F_2 \quad (10.154)$$

(по-прежнему знак $<$ относится к необратимым, $=$ – к обратимым процессам), т. е. свободная энергия определяет ту долю внутренней энергии системы, которая может превратиться в механическую работу.

Уравнение (10.150) можно преобразовать и иным образом, введя величину

$$\Phi = U - TS + PV, \quad (10.155)$$

называемую изобарно-изотермическим потенциалом (или «термодинамическим потенциалом»).

Тогда можно получить неравенство:

$$d\Phi + SdT - VdP \leq 0. \quad (10.156)$$

При $P, T = \text{const}$ имеем:

$$d\Phi \leq 0. \quad (10.157)$$

Таким образом, при постоянном давлении в изотермической системе могут самопроизвольно протекать только процессы, сопровождающиеся уменьшением термодинамического потенциала. Заметим также, что в результате химических реакций, при которых изменяются массы веществ, химический и термодинамический потенциал при $P = \text{const}$ и $T = \text{const}$ связаны соотношением

$$\Phi = U - TS + PV = m\mu. \quad (10.158)$$

Весьма важным приложением законов термодинамики является установление законов равновесия термодинамических химических реакции. В простейшем случае изолированной системы условия равновесия можно получить из условия постоянства энтропии:

$$\Delta S = 0. \quad (10.159)$$

Выделяя 2 части (подсистемы), энтропия которых равна S_1 и S_2 , имеем:

$$dS_1 + dS_2 = 0. \quad (10.160)$$

Из (10.150) следует:

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{P}{T} dV. \quad (10.161)$$

Записывая это выражение для подсистем, и используя (10.160), можно получить.

$$\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) dU_1 + \left(\frac{P_1}{T_1} - \frac{P_2}{T_2}\right) dV_1 = 0 \quad (10.162)$$

Ввиду возможности произвольного выбора изменений внутренней энергии и объема, равенство (10.162) тождественно удовлетворяется при условиях:

$$\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} = 0; \quad \frac{P_1}{T_1} - \frac{P_2}{T_2} = 0. \quad (10.163)$$

Откуда и следуют искомые условия равновесия изолированной системы:

$$T_1 = T_2; \quad P_1 = P_2. \quad (10.164)$$

Если же система содержит две фазы, массы вещества в которых изменяются в результате химических реакций, причем общая масса системы не изменяется ($m_1 + m_2 = m = \text{const}$), а температуры и давления в фазах одинаковы ($P_1 = P_2, T_1 = T_2$), то условием равновесия является минимум термодинамического потенциала

$$d\Phi = 0 \quad (10.165)$$

или, согласно (10.158),

$$d\Phi_1 + d\Phi_2 = \mu_1 dm_1 + \mu_2 dm_2 = 0 \quad (10.166)$$

или, ввиду равенства $dm_1 = -dm_2$

$$\mu_1 = \mu_2. \quad (10.167)$$

Таким образом, равновесие фаз возможно при равенстве их температур, давлений и химических потенциалов. Для более сложных систем с числом фаз более двух, при $P, T = \text{const}$:

$$\sum_i \mu_i dm_i = 0. \quad (10.168)$$

Если i -й компонент системы является идеальным газом, то его химический потенциал можно представить в виде:

$$\mu_i = \frac{\Phi_i}{m_i} = \mu_{i0} + RT \ln P_i, \quad (10.169)$$

где P_i – парциальное давление компонента, μ_{i0} – постоянная величина, которую можно задать из дополнительных соображений.

Из этого условия можно вывести ряд весьма важных практических следствий. Рассмотрим, например, вывод одного из основных законов физической химии – закона действующих масс, согласно которому, отношение произведений парциальных давлений исходных и конечных реагентов, возведенных в степени, равные стехиометрическим коэффициентам веществ в уравнении реакции, при постоянной температуре является величиной постоянной, равной константе равновесия реакции K_p . Аналогичное утверждение относится к концентрациям веществ, C_i , тогда величина K_p заменяется на K_c . Таким образом, для реакции, уравнение которой имеет вид



(a, b, c, d – числа молей веществ; A, B, C, D – стехиометрические коэффициенты), закон действующих масс представляется в виде:

$$(a) \frac{P_A^a P_B^b}{P_C^c P_D^d} = K_p; \quad (b) \frac{C_A^a C_B^b}{C_C^c C_D^d} = K_c. \quad (10.171)$$

Условие равновесия реакции (10.168) в данном случае принимает вид:

$$d\Phi = c\mu_C + d\mu_D - a\mu_A - b\mu_B = 0. \quad (10.172)$$

Подставляя выражение (10.169) в случае применимости законов идеальных газов к веществам, участвующим в реакции, после

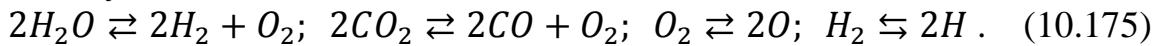
преобразований, можно получить:

$$\ln \frac{P_A^a P_B^b}{P_C^c P_D^d} = \frac{1}{RT} (c\mu_C + d\mu_D - a\mu_A - b\mu_B). \quad (10.173)$$

При $T=const$ правая часть этого равенства – постоянная величина, откуда и следует выражение (10.171a). Величины K_p и K_C совпадает лишь при равенстве числа молей до и после реакции:

$$\Delta n = (c + d) - (a + b) = 0; \quad K_p = K_C. \quad (10.174)$$

Закон действующих масс можно применять и при рассмотрении процессов термической диссоциации и обратного процесса – рекомбинации – молекул, интенсивно протекающих при высоких температурах газов, например, в камерах сгорания реактивных двигателей; например, для водяного пара, углекислого газа у кислорода и водорода эти обратимые процессы идут по схемам:



Реакция диссоциации является эндотермической (идет с поглощением тепла), а рекомбинация – экзотермической реакцией (идет с выделением теплоты). Величина α , характеризующая долю моля конечного вещества, разложившегося к моменту достижения равновесия реакции на исходные вещества, называется степенью диссоциации.

Так, в первой из реакции (10.175) в результате диссоциации вместо 2 моль водяного пара в продуктах горения водорода будет $2(1-\alpha)$ моль, а в смеси останутся непрореагировавшие 2α моль водорода и α моль кислорода. Таким образом, всего в смеси в момент равновесия будет находиться $2(1-\alpha)+2\alpha+\alpha=2+\alpha$ моль вещества. Выражая парциальные давления компонентов $P_{H_2O}, P_{H_2}, P_{O_2}$ через полное давление смеси по обычной формуле $P_i = \frac{n_i}{n}P$ (n_i и n – парциальное число молей и общее число молей в смеси, соответственно) и применяя закон действующих масс (10.171a), можно получить после преобразований:

$$P \frac{\alpha^3}{(2+\alpha)(1-\alpha)^2} = \frac{P_{H_2}^2 P_{O_2}}{P_{H_2O}^2} = const = K_p. \quad (10.176)$$

При $T=const$ и повышении давления, степень диссоциации уменьшается, т.е. полнота сгорания водорода возрастает, количество получаемого водяного пара возрастает. Таким образом, закон действующих масс указывает направление смещения равновесия химической реакции при изменении давления.

Аналогичное рассмотрение показывает, что константа равновесия реакций, протекающих без изменения числа молей реагентов, определяется:

$$K_p = \frac{P_{CO} \cdot P_{H_2O}}{P_{CO_2} \cdot P_{H_2}} = \frac{\alpha_2}{(1-\alpha)^2}, \quad (10.177)$$

так что и степень диссоциации в этом случае от давления не зависит.

Согласно изложенному выше, максимальная работа системы A_{max} при $T, V=const$ равна F_1-F_2 , а при $P, T=const$, равна $\Phi_1-\Phi_2$. На основе этих соотношений после некоторых вычислений можно получить так называемое

уравнение Гиббса—Гельмгольца (или уравнение максимальной работы) в общем виде:

$$A_{max} = Q_{max} + T \frac{dA_{max}}{dT}. \quad (10.178)$$

Для обратимой химической реакции (10.170), протекающей при $T=const$, максимальная работа системы, с учетом закона действующих масс, равна:

$$A_{max} = RT \left[\ln \frac{P_{Ao}^a P_{Bo}^b}{P_{Co}^c P_{Do}^d} - \ln K_P \right], \quad (10.179)$$

где индекс «о» относится к начальным неравновесным значениям парциальных давлений компонентов смеси, а отличие от равновесных значений (без индекса «о»). Определяя из (10.179) $\frac{dA_{max}}{dT}$ и подставляя в (10.178), после преобразований получается следующее уравнение:

$$\frac{d \ln K_P}{dT} = \frac{Q_{max}}{RT^2} \quad (10.180)$$

(эта формула справедлива как при $T, P=const$, так и при $T, V=const$).

Это важное соотношение указывает влияние температуры реакции на положение химического равновесия: при повышении температуры константа равновесия возрастает, давления исходных веществ также повышаются, и равновесие сдвигается в сторону увеличения концентрации исходных продуктов. Более полное протекание изотермической реакции возможно лишь при пониженной температуре.

Эти результаты являются частными случаями более общего принципа Ле-Шателье-Брауна, который выводится на основе максимальной энтропии как общего условия термодинамического равновесия и утверждает, что в результате внешнего воздействия на систему в ней ускоряются процессы (в частности, химические реакции), стремящиеся ослабить результат этого воздействия. На основе этого фундаментального принципа можно сравнительно просто предсказать результат того или иного изменения условий протекания процессов в данной системе.

Применительно к химическим реакциям это означает, что, например, при повышении температуры (т. е. при подведении некоторого количества тепла извне) в системе должны стимулироваться эндотермические реакции (например, диссоциация продуктов синтеза с повышением концентрации исходных веществ), как было уже установлено выше, на основе выражения (10.180). Аналогичным образом можно предсказать влияние изменения и других параметров состояния (например, давление в системе). Особенно полезным оказывается принцип Ле-Шателье-Брауна применительно к сложным многофазным системам, анализ равновесия в которых может представить значительные трудности (например, к многокомпонентным растворам).

Важные для химической практики результаты дают применение законов термодинамики при исследовании кинетики химических реакций, т. е. скоростей их протекания. Скорость реакции — есть изменение

концентрации реагирующих веществ за единицу времени. Так, для реакции (10.170) скорость прямой реакции $W_1 = K_1 C_D C_B$, а обратной реакции $W_2 = K_2 C_C C_D$, где K_1, K_2 – константы скоростей прямой и обратной реакций. В состоянии равновесия $W_1 = W_2$, так что

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{C_A^a C_B^b}{C_C^c C_D^d} = K_C. \quad (10.181)$$

Зависимость константы скорости от температуры реакции может быть получена на основе уравнения (10.180) при $V = \text{const.}$

$$\frac{\partial \ln K}{\partial T} = -\frac{Q}{RT^2}. \quad (10.182)$$

Учитывая (10.181) имеем:

$$\frac{d \ln K_2}{dT} - \frac{d \ln K_1}{dT} = \frac{Q}{RT^2} = \frac{E_2 - E_1}{RT^2}, \quad (10.183)$$

где E_1 и E_2 определяют энергии активации прямой и обратной реакции, соответственно.

Энергия активации характеризует тот минимум избыточной энергии, которым должны обладать молекулы, чтобы их столкновение привело к разрыву химических связей и стимулировало реакцию между веществами. Именно в наличии энергии активации заключается, например, причина отсутствия самовозгорания топлива (бензина и т.п.) при обычной (комнатной) температуре. Повышение температуры увеличивает энергию молекул, которая, в конце концов становится равной энергии активации реакции, после чего она и начинается (например, загорается топливо). Согласно «классической» статистической физике, доля активных молекул, способных вступить в реакцию, от общего их числа определяется «больцмановским множителем»:

$$\frac{N_a}{N} = e^{-\frac{E_a}{RT}}, \quad (10.184)$$

где E_a – энергия активации (на 1 моль вещества).

Заметим теперь, что выражение (10.183) можно представить в виде разности двух уравнений (для прямой и обратной реакций) вида (уравнение Вант-Гоффа):

$$\frac{d \ln K}{dT} = \frac{E}{RT^2} + \text{const} \cong \frac{E}{RT^2}, \quad (10.185)$$

где константа может быть положена равной нулю из экспериментальных данных.

Тогда интегрирование (10.185) дает:

$$K = C e^{-E/RT} = K_0 e^{-E/RT} \quad (10.186)$$

($C \geq K_0$ – постоянная интегрирования).

Очевидно, что если в (10.186) положить $E = E_a$, то мы получаем общий результат: скорость реакции определяется «больцмановским множителем» $e^{-\frac{E_a}{RT}}$ и зависит от энергии и температуры реакции. С повышением температуры, скорость эндотермической реакции возрастает.

Энергия активации обычно составляет 3-6 ккал/моль при участии атомов и свободных радикалов, 30-60 ккал/моль для реакций между

молекулами и 10-30 ккал/моль – в каталитических, реакциях, т. е. при наличии вещества (катализатора), стимулирующего реакцию, но непосредственно в ней не участвующего. Роль катализатора заключается в снижении энергии активации E_a , так что система быстрее достигает состояния равновесия (само это состояние не изменяется под действием катализатора). Катализ очень широко применяется в современной химической промышленности. Заметим еще, что выражение для скорости реакции типа

$$V = Ae^{-E_a/RT} \quad (10.187)$$

было уже давно получено эмпирическим путем и называется уравнением Аррениуса. Оно является основой для удобного представления экспериментальных скоростей реакций. Поскольку

$$\ln V = \ln A - \frac{1}{RT} E_a, \quad (10.188)$$

то график зависимости $\ln V$ от $\frac{1}{T}$ должен быть прямолинейным, и по его наклону можно вычислить величину энергии активации E_a .

Изложенное выше, отнюдь не исчерпывает всего многообразия приложений термодинамики в химии (например, очень большое значение имеют методы термодинамики в физике и химии растворов и т. д.), но детальное рассмотрение этих вопросов выходит за рамки данной книги.

10.10 Термодинамика биологических систем

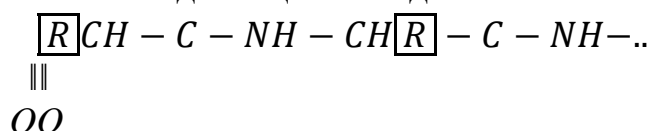
Одной из важнейших проблем современной биофизики является исследование энергетики биологических процессов – сложных взаимосвязанных явлений превращения энергии в биообъектах из одной формы в другую. При этом, за последнее время все шире используются методы как «классической» равновесной термодинамики, так и неравновесной термодинамики («открытых» систем). Особое значение в этом плане имело обобщение формальных законов термодинамики в рамках теории информации; применение этой теории к биологическим объектам является одним из самых перспективных направлений биофизики.

Рассмотрим вначале кратко применение первого начала термодинамики – обобщенного закона сохранения и превращения энергии – к биологическим явлениям. Работы в этом направлении были начаты еще в 18 в. Например, Лавуазье и Лаплас (1777 г.) помещали в изолированной камере с испытуемым животным кусок льда. По скорости таяния льда определялась величина отдаваемой животным тепловой энергии и сопоставлялась с количеством калорий, получаемых животным с едой. Впоследствии, подобные работы проводились многими другими исследователями с применением все более совершенных экспериментальных методов. В настоящее время нет никакого сомнения в возможности применения закона сохранения энергии к биологическим системам. В то же время на его основе можно производить различные расчеты, связанные,

например, с ходом биохимических реакций в живом организме, что позволяет делать важные выводы о механизме и кинетике этих реакций.

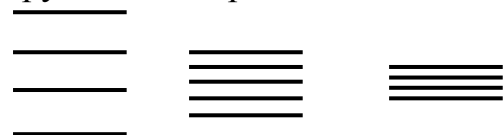
Остановимся более подробно на применении второго начала термодинамики и самого понятия энтропии к биологическим системам. Существенным обстоятельством при этом является большая сложность даже простейших биологических объектов – клеток, содержащих множество различных структур. Это обуславливает значительные трудности при вычислении термодинамических параметров – внутренней энергии, энтальпии, энтропии и др. Другой особенностью является существенная необратимость и, следовательно, неравновесность процессов, протекающих в живых организмах. Поэтому методы «классической» равновесной термодинамики зачастую оказываются неприменимыми к биосистемам, о чем упоминалось выше.

При вычислении термодинамических параметров сложных биологических систем, приходится применять их различные упрощенные модели. В качестве примера рассмотрим вычисление внутренней энергии μ молекулы белка, которая, независимо от её конкретной структуры, состоит из взаимосвязанных полипептидных цепей вида



где R – аминокислотный остаток.

В такой молекуле существуют три вида связей: ковалентные связи, формирующие молекулярную цепь, водородные – между атомными группами в цепи молекулы («спирали Полинга») и ван-дер-ваальсовы – между группами в различных цепях (например, между группами $C=O$ и $N-H$ существуют водородные «мостики»).



A

B

V

A – ковалентная связь

B – водородная связь

V – ванн-дер-ваальсова связь

Взаимодействие атомов подчиняется законам квантовой механики, согласно которым энергия атомов системы квантуется, т.е. принимает дискретный набор значений. Расстояние между уровнями зависит от типа связи – возрастает с увеличением силы связи. Поэтому для трех указанных типов связи схема уровней принимает вид, показанный на рис. 10.27 (разумеется, грубо упрощенно и без соблюдения

Рис. 10.27

истинных масштабов). Число пар атомов, обладающих энергией, соответствующей данному уровню, называется числом заполнения этого уровня. Если пронумеровать уровни данной системы (например, A), как E_i для i -того уровня, то полная энергия системы равна

$$U = \sum_i E_i N_i, \quad (10.189)$$

где N_i – соответствующие числа заполнения, которые в состоянии термодинамического равновесия, т. е. устойчивой конфигурации атомов, определяются законом распределения Больцмана:

$$N_i = \frac{N}{z} e^{-\frac{E_i}{KT}}; \quad z = \sum_i e^{-\frac{E_i}{KT}}, \quad (10.190)$$

где N – полное число атомов, z – статистическая сумма (или сумма состояний) для данной системы атомов.

Если обозначить число заполнения нижайшего («нулевого») энергетического уровня через N_0 , а его энергию – через E_0 , то для N_i имеем:

$$N_i = N_0 e^{-\frac{(E_i - E_0)}{KT}}. \quad (10.191)$$

Ясно, что величины N_i будут существенно отличными от нуля лишь при $E_i - E_0 \leq KT$. Уровни с $E_i - E_0 > KT$ будут практически «пустыми». Системы уровней E_i могут быть построены, например, расчетным путем для заданных групп атомов методами квантовой механики или же определены экспериментальным путем, например, по данным спектроскопических исследований. Таким образом, можно в первом приближении вычислить внутреннюю энергию атомной системы по формуле (10.189), а затем, проделав аналогичные вычисления, и для других атомных систем, входящих в молекулу белка, вычислить полную внутреннюю энергию этой молекулы. Зная статистическую сумму z , можно вычислить и другие термодинамические параметры биологической системы, например, свободную энергию Гемгольца:

$$A = -N_A K T \ln z \quad (10.192)$$

(N_A — число Авогадро). Эта величина оказывается полезной при анализе кинетики биохимических реакции и условий химического равновесия (при постоянном объеме V). Изменение ΔA этой величины определяет константу равновесия K при $V = \text{const}$:

$$\Delta A = -N_A K T \ln K. \quad (10.193)$$

Однако обычно биохимические реакции протекают при постоянном давлении ($P = \text{const}$). Тогда целесообразно ввести другой термодинамический параметр – свободную энергию Гиббса или термодинамический потенциал:

$$F = PV - N_A K T \ln z. \quad (10.194)$$

Тогда при постоянном давлении, константа равновесия определяется из уравнения:

$$\Delta F = -N_A K T \ln z. \quad (10.195)$$

В классической термодинамике исходной величиной для построения других термодинамических параметров (или термодинамических функций) служит энтропия S , связанная с вероятностью состояния системы W соотношением:

$$S = K \ln W. \quad (10.196)$$

Энтропия может рассматриваться как «мера беспорядка» в системе, поскольку вероятность состояния тем больше, чем большим числом способов его можно осуществить. При температурах, близких к 0 К, единственным

возможным для всех веществ (кроме гелия) состоянием явления вполне упорядоченная кристаллическая структура, реализуемая только одним способом; тогда $W=1$ и $S=0$, т. е. «беспорядок» в такой системе полностью отсутствует.

Рассмотрим теперь роль энтропии в описании состояния биологических систем. В качестве примера возьмем культуру бактерий в фазе максимального роста. Рост клетки осуществляется путем «извлечения» необходимых «строительных материалов» – молекул из внешней среды и включения их в различные клеточные структуры. Поскольку при этом, реже хаотически расположенные молекулы включаются в упорядоченную структуру, то ясно, что рост живой клетки должен сопровождаться уменьшением её энтропии (аналог – так же, как строительство дома уменьшает энтропию строительной площадки). Как указал Э. Шредингер, применение второго начала термодинамики в данном случае приводит к выводу, что убыль энтропии в клетке должна сопровождаться возрастанием энтропии внешней среды. По выражению Шредингера, рост клетки происходит при «потреблении отрицательной энтропии». Обозначая через S_i внутреннюю энтропию (клетки), а через S_o – внешнюю энтропию (среды), запишем в данном случае второе начало термодинамики в виде:

$$\Delta S_i + \Delta S_o \geq 0. \quad (10.197)$$

При постоянном давлении и температуре, изменение свободной энергии Гиббса ΔF связано с изменением энтропии ΔS соотношением:

$$\Delta F = \Delta H - T\Delta S, \quad (10.198)$$

где $H=U+PV$ – энтальпия (теплосодержание) системы. Поскольку при росте клетки полная свободная энергия может только уменьшаться, то

$$\Delta F_i + \Delta F_o \leq 0 \quad (10.199)$$

(индексы i и o имеют указанный выше смысл). Тогда из (10.197) и (10.198) следует, что

$$\Delta H_i - T\Delta S_i \leq -\Delta F_o \quad (10.200)$$

или

$$\Delta S_i \geq \frac{\Delta H_i + \Delta F_o}{T}. \quad (10.201)$$

При расчетах можно принять здесь знак равенства, поскольку эффективность биологических процессов, протекающих в живой клетке, очень высока.

Используя данные по теплу основных реакций, протекающих в клетке, можно показать, что изменение энтропии бактериальной клетки при 300 К близко к $\Delta S_i = 93 \text{ кал/град}$ на 1 г углерода клетки; если к тому же принять, что клетка примерно на 10% состоит из углерода, и ее масса – порядка 10^{-12} г, то получаем, что энтропия такой клетки равна $-9,3 \cdot 10^{-12} \text{ кал/град}$. Как будет показано ниже, на основе подобных данных можно получить оценку количества информации, содержащейся в клетке, и тем самым получить представление о сложности ее строения, что чрезвычайно важно при решении многих биологических проблем.

Теперь рассмотрим с термодинамических позиций некоторые основные положения теории информации. Если до получения информации вероятность какого-либо события была равна P , а после ее получения стала равной P' , то количество информации и в данном сообщении определяется формулой:

$$H = \log_2 \frac{P'}{P} \text{ (бит)} \quad (10.202)$$

(если $P=1/2$, $P'=1$, то $H=1$ бит; такая информация заключена, например, в сообщении «орел-решка»). Например, если нужно выбрать одну букву из 16, то $P=1/16$, а после осуществления выбора $P'=1$ и $H=\lg_2 16=4$. Следовательно, в этих условиях одна буква несет 4 бит информации. Формула (10.202) обладает очевидным сходством с формулой (10.196) для энтропии, что позволяет связать процесс передачи информации с изменением энтропии. Если P_i – вероятность нахождения молекулы (биологической системы) в i -м состоянии, то количество информации в молекуле равно

$$H = -\sum_i P_i \log_2 P_i. \quad (10.203)$$

В частном случае, когда все состояния равновероятны и число возможных конфигураций молекулы равно P , то $P_i=1/P$, и

$$H = P \cdot \frac{1}{P} \log_2 P = \log_2 P; \log_2 P = H \ln 2. \quad (10.204)$$

Тогда, согласно формуле (10.196) для S , получим:

$$S = RH \ln 2. \quad (10.205)$$

Здесь величина S и H относятся к одной молекуле; умножая на N_A , приводим величину S к молю вещества:

$$S_M = RH \ln 2 N_A. \quad (10.206)$$

Рассмотрим примеры определения количества информации в клетке, учитывая соотношение

$$H = \log_2 P. \quad (10.207)$$

Возьмем молекулу, состоящую из 8 полипептидных цепей.

Ясно, что для выбора одной цепи из 8 нужно сделать 3 шага («двоичных выбора»), т. к. $\lg_2 8=3$; это соответствует 3 бит информации. Примем далее, что молекула содержит 1000 аминокислот остатков 16 типов. Тогда для выбора одной аминокислоты нужно 4 бит информации ($\lg_2 16=4$), а для 1000-кратного выбора – $4 \cdot 10^3$ бит. Учет указанных выше дополнительных 3 бит практически не меняет дела. Таким образом, приближенная оценка количества информации в молекуле белка дает примерно $4 \cdot 10^3$ бит.

Рассмотрим теперь оценку количества информации в бактериальной клетке, которая может считаться наименьшим живым объектом (вирусы способны размножаться только в живых клетках). Как было указано выше, оценка энтропии клетки дает величину $S \approx 9,3 \cdot 10^{-12}$ кал/град. Тогда по формуле $H=S/(k \ln 2)$ находим: $H \approx 4 \cdot 10^{12}$ бит. Ввиду низкой точности определения энтропии по экспериментальным данным следует принять лишь порядок величины $\sim 10^{12}$ бит.

Такую же оценку можно получить совершенно иным способом,

рассматривая высушенную бактериальную клетку (которая и в этих условиях сохраняет жизнеспособность) как структуру, построенную примерно из 60 типов атомов. Принимая средний вес атомов в клетке равным 6 и сухой вес клетки – $6 \cdot 10^{-10}$ г, получим, что клетка построена примерно из $6 \cdot 10^{10}$ атомов. При среднем расстоянии между атомами 2А, объем, приходящийся на 1 атом, примерно равен $8 \cdot 10^{-24}$ см³. Если амплитуду колебаний ядер в атоме ($2 \cdot 10^{-10}$ см) принять за меру «тонкости» клеточной структуры, то число $8 \cdot 10^{-24} / (2 \cdot 10^{-10})^3 = 10^6$ дает меру «атомной неопределенности» структуры, а $\log_2 10^6 \approx 20$ дает количество информации, приходящейся на один атом. Учет информации, связанной с выбором типа атома ($\log_2 60 \approx 6$), мало меняет суть дела. Таким образом, информация, приходящаяся на $6 \cdot 10^{10}$ атомов, по порядку величины равна $206 \cdot 10^{10} \sim 10^{12}$ бит, т.е. совершенно различные методы дают согласующиеся величины Н. (Сделанные аналогичным путем оценки информации, содержащейся в человеческом организме, дают $H \sim 10^{25}$ бит, или $S \sim 10^9$ эрг/град).

Несмотря на возможные источники погрешности, приводящие к сильно завышенной оценке Н, величина все же 10^{12} бит очень велика. Она показывает, что вероятность образования бактерии из составляющих ее атомов в результате некоторого беспорядочного процесса чрезвычайно мала. Это обстоятельство необходимо учитывать при рассмотрении возможных путей возникновения жизни на Земле.

Очевидно, что решающее значение для правильной оценки количества информации в клетке имеет учет процесса ее формирования и роста, который, как показывает сделанная выше оценка, должен носить «упорядоченный», закономерный характер. Если принять определенные модели возникновения живой клетки (например, путем помещения нуклеопротеидной нити в смесь нескольких молекул ферментов, солей и аминокислот), то полученная выше оценка Н может быть значительно снижена (в указанном примере до 10^4 бит). Таким образом, при предположении о сравнительной «простоте» живых организмов процесс их возникновения из неживой материи должен быть весьма определенным и упорядоченным. Это предположение подтверждается также тем, что при наличии 10^{12} бит информации в клетке при ее росте и развитии должна «вырабатываться» информация со скоростью примерно 10^9 бит/с, что является чрезвычайно большой величиной (скорость сознательного восприятия информации человеком оценивается в 25 бит/с). Возникает естественный вопрос об «источнике» этой информации, т. е. о наличии какой-то группы молекул, осуществляющей контроль за этим процессом роста. Методы химического синтеза, использованные природой при возникновении живого на Земле, являлись, очевидно, значительно более совершенными и эффективными, чем те, что известны современной биохимии, и исследовать их – дело будущего.

Значение теории информации для биологии не исчерпывается указанной выше оценкой степени сложности биообъектов. Перевод

биологических представлений на язык теории информации позволяет передать их количественную форму и необходимую точность и определенность, что используется, например, в эволюционной теории. Проблема генетического кода имеет совершенно определенный информационный смысл; информация заложена в молекулах ДНК и передается молекулами информационной РНК. Это имеет место и в организме в целом: молекулы и ионы переносят в нем информацию, благодаря которой осуществляется управление регуляция различными жизненными функциями. Поэтому изучение этих биологических процессов при использовании теории информации приобретает точный количественный характер.

Согласно изложенному выше, язык термодинамики («энтропийный») и язык информации в основном эквивалентны. Обратимся к основным представлениям неравновесной термодинамики, которая, как упоминалось выше, используется для описания «открытых» систем, находящихся в непрерывном обмене энергией с окружающей средой. К таким относятся и живые организмы.

Общее изменение энтропии dS открытой неравновесной системы складывается из изменения энтропии внутри системы $d_i S$ и потока энтропии из системы в окружающую среду и обратно $d_e S$, т. е. $dS = d_i S + d_e S$. При наличии непроницаемой («адиабатической») оболочки вокруг системы $d_e S = 0$, и согласно 2-му началу термодинамики $dS = d_i S > 0$. Изменение энтропии можно связать с протеканием химических реакций в биологической системе, в частности, определить их направление в различных условиях.

Если же система открытая и $d_e S \neq 0$, то при неизменных граничных условиях, система будет стремиться к неравновесному стационарному состоянию. Таким образом, стационарное состояние поддерживается за счет оттока энтропии в окружающую среду.

Представим себе изолированную систему, заключающую в себе живой организм и окружающую его среду, с которой он обменивается питательными веществами и продуктами их потребления, а также энергией. В таких условиях находится, например, космонавт в космическом корабле, который в целом изолирован, но организм космонавта «открыт» по отношению к кораблю. Тогда, согласно 2-му началу термодинамики, общее изменение энтропии всей этой системы $dS = dS_1 + dS_2 > 0$. Для космонавта, изменение энтропии, согласно изложенному выше, $dS_1 = d_e S_1 + d_i S_1$. Если в окружающей космонавта среде нет процессов производства энтропии, то изменение ее энтропии $dS_2 = -d_e S_1$, и, следовательно, $dS = d_i S_1 > 0$. В стационарном жизненном состоянии организма космонавта:

$$dS_1 = 0; \quad d_e S_1 = -d_i S_1 < 0; \quad dS_e = dS = d_i S_1 > 0. \quad (10.208)$$

Таким образом, стационарное состояние космонавта поддерживается за счет возрастания энтропии окружающей среды; в этом состоит смысл произведенного выше высказывания Э. Шредингера о «питании организмов отрицательной энергией». Стационарное состояние будет поддерживаться до

тех пор, пока не истощаются питательные вещества в окружающей среде или пока не произойдут необратимые изменения в организме космонавта (старение).

Эти представления можно обобщить на все человечество, существующее в своей сфере обитания – биосфере. Существование биосферы можно рассматривать как стационарный процесс, осуществляемый под влиянием энергетического воздействия Солнца. В результате сложных процессов взаимодействия человека с другими биологическими популяциями стационарное состояние биосферы может существовать лишь ограниченное время. В линейном приближении неравновесной термодинамики стационарное состояние стабильно при небольших отклонениях от положения равновесия. При этих отклонениях возникают термодинамические силы X_i (например, градиенты температуры, концентрации и т. п.), вызывающие потоки I_i (вещества, энергии, импульса), причем связь между этими величинами определяется линейным соотношением:

$$I_i = \sum_K L_{iK} X_K, \quad (10.209)$$

где L_{iK} – кинетические коэффициенты (согласно «теореме взаимности» Онзагера, $L_{iK} = L_{Ki}$). Примеры таких соотношений были приведены выше при рассмотрении процессов тепло- и массопереноса. Необратимые процессы идут в сторону выравнивания температуры, концентрации и т. д., когда термодинамические силы обращаются в ноль. Необратимые процессы приводят к изменению энтропии. Количество энтропии, производимой в единицу времени, называется производством энтропии (σ); эта величина связана с величинами I_i и X_K соотношением:

$$\sigma = \sum_K I_K X_K = \sum_{iK} X_i L_{iK} X_K \geq 0. \quad (10.210)$$

Согласно теореме Пригожина, в стационарном состоянии величина σ минимальна; в этом состоянии потоки I_i обращаются в ноль. Доказательство этой теоремы основано на упомянутых выше соотношениях взаимности Онзагера $L_{iK} = L_{Ki}$.

При представлении лежат в основе линейной равновесной термодинамики, применение которой в биологии позволило объяснить «антиэнтропийность» биологических процессов и возможность существования «открытой» биологической системы в стационарном, но неравновесном состоянии. Однако, в ряде биологических явлений, соотношения Онзагера не выполняются, и линейная термодинамика к ним неприменима. Кроме того, в биологии часто бывают ситуации, когда состояние системы далеко от равновесия; в этом случае стационарное состояние неустойчиво. Такие ситуации реализуются, в частности, в процессах роста и эволюции.

Развитие соответствующих методов описания этих явлений в рамках нелинейной неравновесной термодинамики является задачей биофизики будущего.

Некоторые справочные данные по физике

1. Основные физические постоянные

Постоянная	Символ	Значение
1	2	3
Скорость света в вакууме	c	$2,997925 \cdot 10^8$ м/с
Элементарный электрический заряд	e	$1,60210 \cdot 10^{-19}$ Кл
Число Авогадро (по углеродной шкале)	N_A	$6,02252 \cdot 10^{23}$ моль ⁻¹
Атомная единица массы	$a.e.m.$	$1,6605655 \cdot 10^{-27}$ кг
Масса покоя: электрона	m_e	$9,1091 \cdot 10^{-31}$ кг
протона	m_p	$1,67252 \cdot 10^{-27}$ кг
нейтрона	m_n	$1,67474 \cdot 10^{-27}$ кг
Число Фарадея	F	$9,64870 \cdot 10^4$ Кл/г-экв
Постоянная Планка	h	$6,6256 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Постоянная Эйнштейна-Дирака	$\hbar = h/2\pi$	$1,0545 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Постоянная Ритберга:		
для бесконечной массы	R_∞	$1,0973731 \cdot 10^7$ м ⁻¹
для изотопа водорода	R_H	$1,096777576 \cdot 10^7$ м ⁻¹
для изотопа гелия	R_{He}^4	$1,09722267 \cdot 10^7$ м ⁻¹
Магнетон Бора	$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c}$	$9,2732 \cdot 10^{-24}$ Дж/Тл
Универсальная газовая постоянная (по углеродной шкале)	R	$8,3143 \cdot 10^0$ Дж/(моль·К)
Постоянная Больцмана	k, κ	$1,38034 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Постоянная Стефана-Больцмана	σ, σ_0	$5,6697 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м ² ·К ⁴)
Постоянная закона смещения Вина	ν	$2,8978 \cdot 10^{-3}$ м·К
Гравитационная постоянная	G, γ	$6,670 \cdot 10^{-11}$ Н·м ² /кг ²
Стандартное ускорение силы тяжести	g_0	$9,80665 \cdot 10^0$ м/с ²
Радиус первой боровской орбиты	$a_0 = \frac{\hbar^2}{e^2 m_e}$	$5,29171 \cdot 10^{-11}$ м
Электрическая постоянная (диэлектрическая проницаемость вакуума)	ε_0	$8,8542 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Магнитная постоянная (магнитная проницаемость вакуума)	μ_0	$1,2566 \cdot 10^{-6}$ Гн/м

1	2	3
Отношение заряда электрона к его массе	$\frac{e}{m_e}$	$1,758805 \cdot 10^{11}$ Кл/кг
Отношение масс протона и электрона	$\frac{m_p}{m_e}$	1836,15
Квант магнитного потока	$\Phi_0 = \frac{h}{2e}$	$2,06785 \cdot 10^{-15}$ Вб
Число Лоренца	$L_0 = \frac{\pi^2 k^2}{3e^2}$	$2,443 \cdot 10^{-8}$ В ² /К ²
Число Лошмидта	N_0	$2,687 \cdot 10^{25}$ м ⁻³
Температура тройной точки воды	-	273,16 К
Плотность воды при нормальных термодинамических условиях	-	999,84 кг/м ³
Плотность ртути при нормальных термодинамических условиях	-	13595,09 кг/м ³

2. Единицы и размерности физических величин
(кратные и дольные единицы не включены)

Физическая величина	Размерность	Единица СИ	Прочие единицы, употребляемые в технике
1	2	3	4
Длина	L	метр (м)	1 ангстрем (А)= 10^{-10} м 1 икс – единица = = $1,00206 \cdot 10^{-13}$ м 1 фут=0,3048 м 1 дюйм=0,0254 м 1 мил= $2,54 \cdot 10^{-5}$ м
Площадь	L^2	квадратный метр (м ²)	1 ар (а)=100 м ² 1 гектар (га)=10 ⁴ м ² 1 барн (б)= 10^{-28} м ² 1 кв. фут=0,0929 м ² 1 кв. дюйм= $6,4516 \cdot 10^{-4}$ м ²
Объем, вместимость	L^3	кубический метр (м ³)	1 литр (л)= 10^{-3} м ³ 1 куб. фут= $2,83168 \cdot 10^{-2}$ м ³ 1 куб. дюйм= $1,63871 \cdot 10^{-5}$ м ³
Волновое число; коэффициент ослабления	L^{-1}	м ⁻¹	
Число частиц (атомов) в единице объема	L^{-3}	м ⁻³	

1	2	3	4
Плоский угол	L^0	радиан (рад)	$1 \text{ градус } (^{\circ}) = \frac{\pi}{180} \text{ рад} =$ $= 0,01745329 \text{ рад}$ $1 \text{ минута } (') = 2,90882 \cdot 10^{-4} \text{ рад}$ $1 \text{ секунда } (") =$ $= 4,848137 \cdot 10^{-6} \text{ рад}$ $1 \text{ гон } (g) = 0,0157 \text{ рад}$
Телесный угол	L^0	стерадиан (ср)	$1 \text{ полный телесный угол} =$ $= 4\pi \text{ ср} = 12,56637 \text{ ср}$ $1 \text{ кв. градус } (^{\circ})^2 = (\pi/180)^2 \text{ ср}$ $= 3,0462 \cdot 10^{-4} \text{ ср}$
Время	T	секунда (с)	$1 \text{ минута (мин)} = 60 \text{ с}$ $1 \text{ час (ч)} = 3600 \text{ с}$ $1 \text{ сутки (сут)} = 86400 \text{ с}$ $1 \text{ год (средний солнечный)}$ $= 8765 \text{ ч } 48 \text{ мин } 46 \text{ с}$ $1 \text{ год (технический)} = 8760 \text{ ч}$
Частота; угловая скорость	T^{-1}	Герц (Гц) – для периодического процесса; 1 с^{-1} – для дискретных событий; 1 рад/с – для угловой скорости; $1 \text{ Гц} = 1 \text{ с}^{-1} =$ $= 2\pi \text{ рад/с} =$ $= 6,283185 \text{ рад/с}$	$1 \text{ об/с} = 1 \text{ с}^{-1}$ $1 \text{ об/мин} = \frac{1}{60} \text{ с}^{-1} = \frac{\pi}{30} \text{ рад/с}$ $1 \text{ угл. градус в секунду} =$ $= 1,745329 \cdot 10^{-2} \text{ рад/с}$
Скорость	$L \cdot T^{-1}$	м/с	$1 \text{ км/ч} = 0,2778 \text{ м/с}$ $1 \text{ фут/с} = 0,3048 \text{ см/с}$
Ускорение	$L \cdot T^{-2}$	м/с ²	$1 \text{ Г л} = 0,01 \text{ м/с}^2$ $1 \text{ фут/с}^2 = 0,3048 \text{ м/с}^2$ $1 \text{ дюйм/с}^2 = 25,4 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}^2$
Объемный расход	$L^3 \cdot T^{-1}$	м ³ /с	$1 \text{ л/с} = 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с}$ $1 \text{ куб. дюйм/с} = 1,64 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с}$
Масса	M	килограмм (кг)	$1 \text{ тонна (т)} = 10^3 \text{ кг}$ $1 \text{ карат (к)} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ кг}$ $1 \text{ англ. фунт} = 0,45359237 \text{ кг}$ $1 \text{ англ. тонна} = 1016,02 \text{ кг}$ $1 \text{ унция} = 2,83495 \cdot 10^{-2} \text{ кг}$ $1 \text{ а.е.т.} = 1,6605655 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$

1	2	3	4
Линейная плотность, толщина (нитей и др. изделий с неправильной геометрической формой поперечного сечения)	$M \cdot L^{-1}$	кг/м	1 текс = 10^{-6} кг/м 1 мтекс = 10^{-9} кг/м 1 ктекс = 10^{-3} кг/м
Тонина нити (величина, обратная толщине)	$L \cdot M^{-1}$	м/кг	единица «метрического номера» нити = 10^3 м/кг
Сила, вес	$L \cdot M \cdot T^{-2}$	Ньютон (Н)	1 дина = 10^{-5} Н 1 стен = 10^3 Н 1 гс = 1 понд = $9,80665 \cdot 10^{-3}$ Н 1 кгс = 9,80665 Н 1 тс = 9806,65 Н 1 фунт-сила = 4,44822 Н
Удельный вес	$L^{-2} \cdot M \cdot T^{-2}$	Н/м ³	1 кгс/м ³ = 9,80665 Н/м ³ 1 фунт-сила/куб.фут = = 157,087 Н/м ³
Плотность	$L^{-3} \cdot M$	кг/м ³	1 фунт/куб.дюйм = = $2,768 \cdot 10^4$ кг/м ³ 1 унция/куб.фут = = 1,011 кг/м ³
Давление; мех. напряжение, модуль упругости	$L^{-1} \cdot M \cdot T^{-2}$	Паскаль (Па)	1 пьеза (пз) = 10^3 Па 1 бар (бар) = 10^5 Па 1 бария = 0,1 Па 1 кгс/м ² = 1 мм вод. ст. = = 9,80665 Па 1 кгс/см ² = 1 ат = = $9,80665 \cdot 10^4$ Па 1 мм рт. ст. = 1 торр = = 133,322 Па 1 атм = $1,01325 \cdot 10^5$ Па 1 фунт-сила/кв.дюйм = = $6,894076 \cdot 10^3$ Па
Параметр Пашена (p·d)	$M \cdot T^{-2}$	Па·м	1 мм рт. ст.·см = = 1,33322 Па·м 1 атм·см = 1013,25 Па·м
Поверхностное натяжение	$M \cdot T^{-2}$	Н/м	1 дин/см = 10^{-3} Н/м
Ударная вязкость	$M \cdot T^{-2}$	Н/м	

1	2	3	4
Динамическая вязкость	$L^{-1} \cdot M \cdot T^{-1}$	Па·с	1 пуаз (П) = 0,1 Па·с 1 кгс·с/м ² = 9,80665 Па·с 1 пз·с = 10 ³ Па·с 1 фунт-сила-секунда/кв.фут = 47,88 Па·с
Кинематическая вязкость	$L^2 \cdot T^{-1}$	м ² /с	1 стокс (Ст) = 10 ⁻⁴ м ² /с
Текучесть (величина, обратная динамической вязкости)	$L \cdot M^{-1} \cdot T$	Па ⁻¹ с ⁻¹	1 ре (ре) = 10 Па ⁻¹ с ⁻¹
Работа, энергия, количество теплоты	$L^2 \cdot M \cdot T^{-2}$	Джоуль (Дж)	1 эВ = 1,6021·10 ⁻¹³ Дж 1 кВт·ч = 3,6·10 ⁶ Дж 1 кгс·м = 9,80665 Дж 1 фунт-сила·фут = 1,35582 Дж 1 калория (кал) = 4,1868 Дж 1 термия = 4,1868·10 ⁶ Дж 1 британская тепловая единица (В.Т.У)=1055,06 Дж 1 квад = 10 ¹⁵ В.Т.У. = 1,06·10 ¹⁸ Дж 1 тонна усл. топлива = 2,93076·10 ¹⁰ Дж
Момент силы	$L^2 \cdot M \cdot T^{-2}$	Н·м	1 фунт-сила·фут = 1,35582 Н·м 1 кгс·м = 9,80665 Н·м
Мощность, поток звуковой энергии, тепловой поток	$L^2 \cdot M \cdot T^{-3}$	Ватт (Вт)	1 кгс·м = 9,80665 Вт 1 кал/с = 4,1868 Вт 1 фунт-сила·фут = 1,35582 Вт 1 В.Т.У = 1055,06 Вт 1 л.с. = 736 Вт
Коэффициент вла-гопроницаемости	T	кг/(м·с·Па)	1 с = 1 кг/(м·с·Па)
Коэффициент вла-горастворимости	$L^2 \cdot T^2$	кг/(м ³ ·Па)	1 с ² /м ² = 1 кг/(м ³ ·Па)
Коэффициент диффузии	$L^2 \cdot T^{-1}$	м ² /с	

1	2	3	4
Теплопроводность	$L \cdot M \cdot T^{-3} \theta^{-1}$	Вт/(м·К)	1 фурье (ф) = 10^{-2} Вт/(м·К) 1 кал/(с·см·К) = = 418,68 Вт/(м·К) 1 В.Т.У./(дюйм·с·°F) = = $7,477 \cdot 10^4$ Вт/(м·К) 1 В.Т.У./(фут·ч·°F) = = 1,731 Вт/(м·К)
Поверхностная плотность теплового потока	$M \cdot T^{-3}$	Вт/м ²	1 кал/(с·см ²) = = $4,1868 \cdot 10^4$ Вт/м ² 1 ккал/(ч·м ²) = 1,163 Вт/м ² 1 В.Т.У./(кв.дюйм·с) = = $1,63535 \cdot 10^6$ Вт/м ² 1 В.Т.У./(кв.фут·с) = = $1,1357 \cdot 10^4$ Вт/м ²
Коэффициент теплоотдачи (теплообмена)	$M \cdot T^{-3} \cdot \theta^{-1}$	Вт/(м ² ·К)	1 кал/(с·см ² ·К) = = $4,1868 \cdot 10^4$ Вт/(м ² ·К) 1 кал/(ч·м ² ·К) = = 1,163 Вт/(м ² ·К) 1 В.Т.У./(кв. дюйм·с·°F) = = $2,9436 \cdot 10^6$ Вт/(м ² ·К) 1 В.Т.У./(кв.фут·ч·°F) = = $2,044 \cdot 10^4$ Вт/(м ² ·К)
Электрический ток	I	Ампер (А)	1 ед. СГС = $3,33 \cdot 10^{-10}$ А
Количество электричества (электрический заряд)	$T \cdot I$	Кулон (Кл) 1 Кл = 1 А·с	1 ед. СГС = $3,33 \cdot 10^{-10}$ Кл 1 Ампер-час (А·ч) = 3600 Кл
Плотность электрического тока	$L^{-2} \cdot I$	А/м ²	1 ед. СГС = $3,33 \cdot 10^{-6}$ А/м ²
Подвижность носителей заряда	$M^{-1} \cdot T^2 \cdot I$	м ² /(В·с)	
Поверхностная плотность электрического заряда, электрическое смещение	$L^{-2} \cdot T \cdot I$	Кл/м ²	1 ед. СГС = $3,33 \cdot 10^{-6}$ Кл/м ²
Объемная плотность электрического заряда	$L^{-3} \cdot T \cdot I$	Кл/м ³	1 ед. СГС = $3,33 \cdot 10^{-4}$ Кл/м ³
Электрический момент (диполя)	$L \cdot T \cdot I$	Кл·м	1 ед. СГС = $3,33 \cdot 10^{-12}$ Кл·м 1 дебай (Д) = $3,33 \cdot 10^{-30}$ Кл·м

1	2	3	4
Электрическое напряжение, электрический потенциал, электродвижущая сила)	$L^2 \cdot M \cdot T^3 \cdot I^{-1}$	Вольт (В) 1 В = 1 Вт/А = = 1 Дж/Кл	1 ед. СГС = 300 В
Напряженность электрического поля, электрическая прочность	$L \cdot M \cdot T^3 \cdot I^{-1}$	В/м	1 ед. СГС = $3 \cdot 10^4$ В/м 1 В/мил = 1 кВ/дюйм = = $3,933 \cdot 10^4$ В/м
Электрическое сопротивление	$L^2 \cdot M \cdot T^2 \cdot I^{-2}$	Ом (Ом) 1 Ом = 1 В/А	1 ед. СГС = $9 \cdot 10^{11}$ Ом
Удельное электрическое сопротивление	$L^3 \cdot M \cdot T^3 \cdot I^{-2}$	Ом·м	1 (Ом·мм ²)/м = 10^{-6} Ом·м 1 МОм·км = 10^9 Ом·м 1 ед. СГС = $9 \cdot 10^9$ Ом·м
Электрическая проводимость	$L^{-2} \cdot M^{-1} \cdot T^3 \cdot I^2$	Сименс (См) 1 См = 1 Ом ⁻¹	1 ед. СГС = $1,11 \cdot 10^{-12}$ См
Удельная электрическая проводимость	$L^{-2} \cdot M^{-1} \cdot T^3 \cdot I^2$	См/м	1 ед. СГС = $1,11 \cdot 10^{-10}$ См/м
Коэффициент термоэлектродвижущей силы	$L^{-2} \cdot M \cdot T^3 \cdot I^{-1} \cdot \theta^{-1}$	В/К	1 В/°F = 1,8 В/К
Электрическая емкость	$L^{-2} \cdot M^{-1} \cdot T^4 \cdot I^2$	Фарада (Ф) 1 Ф = 1 Кл/В	1 ед. СГС («сантиметр емкости») = $1,111 \cdot 10^{-12}$ Ф
Абсолютная диэлектрическая проницаемость	$L^{-3} \cdot M^{-1} \cdot T^4 \cdot I^2$	Ф/м	
Вектор Пойнтинга	$M \cdot T^3$	Вт/м ²	
Активная мощность	$L^2 \cdot M \cdot T^3$	Вт	
Реактивная мощность	$L^2 \cdot M \cdot T^3$	вар (вар) 1 вар = 1 Вт = = 1 В·А	
Полная мощность	$L^2 \cdot M \cdot T^3$	В·А 1 В·А = 1 Вт	
Магнитный поток	$L^2 \cdot M \cdot T^2 \cdot I^{-1}$	Вебер (Вб) 1 Вб = 1 В·с	1 ед. СГС = 1 максвелл (мкс) = 10^{-8} Вб
Магнитная индукция	$M \cdot T^{-2} \cdot I^{-1}$	Тесла (Тл) 1 Тл = 1 Вб/м ²	1 ед. СГС = 1 гаусс (Гс) = = 10^{-4} Тл
Магнитодвижущая сила, разность скалярных магнитных потенциалов	I	Ампер (А) («ампер-виток»)	1 ед. СГС = 1 гильберт (Гб) = 0,79577 А

1	2	3	4
Напряженность магнитного поля	$L^{-1} \cdot I$	А/м	1 ед. СГС = 1 эрстед (э) = = 79,577 А/м
Индуктивность	$L^2 \cdot M \cdot T^2 \cdot I^2$	Генри (Гн) 1 Гн = 1 Вб/А	1 ед. СГС = сантиметр индуктивности = 10^{-9} Гн
Магнитный момент диполя (тока)	$L^2 \cdot I$	А·м ²	
Магнитное сопротивление	$L^{-2} \cdot M^{-1} \cdot T^2 \cdot I^2$	А/Вб	
Магнитная проводимость	$L^2 \cdot M \cdot T^2 \cdot I^2$	Вб/А	
Абсолютная магнитная проницаемость	$L \cdot M \cdot T^2 \cdot I^2$	Гн/м	
Коэффициент Холла	$L^3 \cdot T^{-1} \cdot I^{-1}$	м ³ /Кл	
Сила света	J	Кандела (кд)	
Световой поток	J	Люмен (лм) 1 лм = 1 кд·ср	
Освещенность	$L^{-2} \cdot J$	Люкс (лк) 1 лк = 1 лм/м ²	1 фот = 10^4 лк
Яркость	$L^{-2} \cdot J$	кд/м ² («нить»)	1 стильб (сб) = 10^4 кд/м ² 1 апостильб (асб) = = 0,3183 кд/м ² 1 ламберт (лб) = 3183 кд/м ²
Светимость	$L^{-2} \cdot J$	лм/м ²	1 радфот = 10^4 лм/м ²
Активность нуклида	T^{-1}	Беккерель (Бк) 1 Бк = 1 расп./с	1 кюри (Ки) = $3,7 \cdot 10^{10}$ Бк 1 резерфорд (Рд) = 10^6 Бк
Поглощенная доза излучения, керма	$L^2 \cdot T^2$	Грэй (Гр) 1 Гр = 1 Дж/кг	1 рад = 0,07 Гр (не смешивать с обозначением «рад» для радиана)
Мощность поглощения дозы (мощность кермы)	$L^2 \cdot T^3$	Гр/с	1 рад/с = 0,01 Вт/кг
Эквивалентная доза излучения	$L^2 \cdot T^2$	Зиверт (Зв) 1 Зв = 1 Дж/кг	1 бэр (бэр) = 0,01 Зв
Мощность эквивалентной дозы	$L^2 \cdot T^3$	1 Зв/с = 1 Вт/кг	1 бэр/с = 0,01 Зв/с
Экспозиционная доза фотонного излучения	$M^{-1} \cdot T \cdot I$	Кл/кг	1 рентген (Р) = $2,58 \cdot 10^{-4}$ Кл/кг
Мощность экспозиционной дозы	$M^{-1} \cdot I$	Кл/(кг·с) 1 Кл/(кг·с) = = 1 А/кг	1 Р/с = $2,58 \cdot 10^{-4}$ Кл/(кг·с)

3. Кратные и дольные приставки в системе СИ

Наименование	Численное значение	Обозначение	
		русское	международное
Кратные приставки			
Экса	10^{18}	Э	E
Пэта	10^{15}	П	P
Тера	10^{12}	Т	T
Гига	10^9	Г	G
Мега	10^6	М	M
Кило	10^3	к	k
Гекто	10^2	г	h
Дека	10^1	да	da
Дольные приставки			
деци	10^{-1}	д	d
санти	10^{-2}	с	c
милли	10^{-3}	м	m
микро	10^{-6}	мк	μ
нано	10^{-9}	н	n
пико	10^{-12}	п	p
фемто	10^{-15}	ф	f
атто	10^{-18}	а	A

4. Соотношение между частотой и длиной электромагнитной волны (в вакууме)

f , Гц	λ	f , Гц	λ
50	6000 км	10^{11}	3 мм
10^3	300 км	$3 \cdot 10^{11}$	1 мм
10^8	3 м	10^{12}	0,3 мм
$3 \cdot 10^8$	1 м	$3 \cdot 10^{12}$	0,1 мм
10^9	3 дм	10^{13}	30 мкм
$3 \cdot 10^9$	1 дм	$3 \cdot 10^{13}$	10 мкм
10^{10}	3 см	10^{14}	3 мкм
$3 \cdot 10^{10}$	1 см	$3 \cdot 10^{14}$	1 мкм

5. Относительные и логарифмические величины

Процент (%) = 0,01 Промилле (‰) = 0,001 Миллионная доля (млн ⁻¹ = p.p.m) = 10^{-6}	1 Б (бел) = $\lg(P_2/P_1)$ при $P_2 = 10P_1$ = $2\lg(F_2/F_1)$ при $F_2 = \sqrt{10}F_1$ 1 Нп (непер) = $0,5\ln(P_2/P_1)$ при $P_2/P_1=e$ = $\ln(F_2/F_1)$ при $F_2/F_1=e$ 1 Дб = 0,1 Б = 0,1151 Нп 1 Нп = 0,8686 Б = 8,86 дБ 1 Б = 10 дБ = 1,151 Нп
--	---

6. Плотность ρ различных веществ

Вещество	ρ , г/см ³	Вещество	ρ , г/см ³	Вещество	ρ , г/см ³
Твердые тела				Жидкости ($t = 20^\circ\text{C}$)	
Алмаз	3,5	Медь	8,9	Ацетон	0,8
Алюминий	2,7	Молибден	10,2	Бензол	0,88
Бетон	2,2	Натрий	0,97	Бензин	0,7
Вольфрам	19,1	Никель	8,9	Вода	1,00
Гранит	2,8	Олово	7,4	Глицерин	1,26
Графит	1,6	Песчаник	2,4	Керосин	0,8
Дуб	0,8	Платина	21,5	Молоко	1,03
Дюралюминий	2,79	Пробка	0,20	Ртуть	13,6
Железо (сталь)	7,8	Свинец	11,34	Спирт	0,79
Золото	19,3	Серебро	10,5	Тяжелая вода	1,1
Иридий	22,4	Сосна	0,5	Эфир	0,72
Кадмий	8,65	Стекло (окон.)	2,5	Газы ($t = 0^\circ\text{C}$, $p = 101,3$ кПа)	
Каменный уголь	1,4	Титан	4,5	Азот	1,25
Кобальт	8,9	Уран	19,0	Аммиак	0,77
Латунь	8,6	Цинк	7,1	Водород	0,09
Лед	0,916	Фарфор	2,3	Воздух	1,293
Магний	1,74	Электрон	1,8	Кислород	1,43
				Метан	0,72
				Углекислый газ	1,98
				Хлор	3,21
				Пропан	2,2
				Гелий	0,179

 ρ , г/см³

Нейтронная звезда, атомное ядро

Золото

Земля

Луна

Горные породы на Земле

Солнце

Вода

Сатурн

Воздух (0°C , 760 мм рт.ст.)

Галактические плотности

Межгалактические плотности

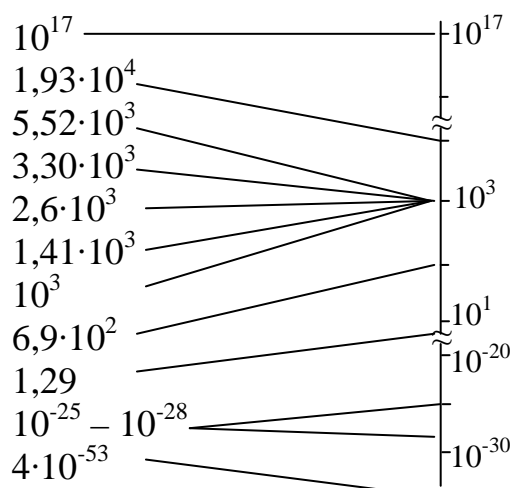


Рис. 1

7. Плотность (ρ), теплопроводность (λ) и удельная теплоемкость (c)
некоторых твердых материалов

Материал	$t, ^\circ\text{C}$	$\rho, \text{кг/м}^3$	$\lambda, \text{Вт/(м}\cdot\text{К)}$	$c, \text{Дж/(кг}\cdot\text{К)}$
Асбест распушенный, 3-й сорт	-	340		816
Асбестовый картон	-	900		816
Асбестовый шнур	-	800		816
Бумага обыкновенная	20	-		1510
Кембрик лакированный	38	-		-
Кварц кристаллический:	0	-		-
вдоль оси	0	-		-
поперек оси	0	917		2260
Лед	-100	928		1170
Льняная ткань	-	-		-
Магнезия (для изоляции труб)	50-200	266		-
Миканит	20	-		-
Парафин	20	920		-
Песок мелкий сухой	0-160	1520		800
Песок мелкий влажный	20	1650		2090
Прессшпан	20-50	-		-
Плексиглас	20	-		-
Резина твердая	0-100	1200		1380
Резина мягкая	20	-		1380
Сера ромбическая	21	-		762
Слюда (поперек слоев)	20	2600-3200		-
Стекло зеркальное	0-100	2550		779
Стекло обыкновенное	20	2500		670
Стекло термометрическое	20	2590		-
Стекло пирекс	0	-		-
	400	-		-
Стекло кварцевое	400	-		-

8. Коэффициент температуропроводности $a=\lambda/(c\rho)$ элементов ($\text{м}^2/\text{с}\cdot 10^6$) при
различных температурах T (К)

Ат. Номер	Элемент	T	a	Чистота элемента
1	2	3	4	5
4	Бериллий	\perp прессованию		Примеси, % 1,264
		473	38,4	
		873	21,1	
		1373	13,06	
		\parallel прессованию		(Al+Mg)
		473	33,0	
		873	16,65	
		1373	13,06	

1	2	3	4	5
6	Углерод (графит)	оси «с»		Электродный
		373	61,0	
		473	51,4	
		673	53,4	
		773	23,0	
		┴ оси «с»		
		293	36,1	
		373	33,4	
		673	19,43	
		843	16,67	
22	Титан	373	7,1	Чистота 99,6 %
		473	6,95	
		673	6,6	
		900	6,25	Иодидный, примеси 0,03 %
		1100	6,37	
		1155	7,5	
		1600	8,9	
23	Ванадий	100-300	11,6	Чистота 99,82 %
		500	11,3	
		700	10,7	
		900	9,5	
		1000	12,32	Чистота 99,72 %
		1100	12,26	
		1200	12,19	
		1400	12,07	
		1500	12,00	
		1700	11,87	
		1900	11,75	
24	Хром	1000	15,0	
		1100	14,0	
		1200	13,3	
		1300	12,25	
		1400	11,4	
		1500	10,0	
		1600	8,7	
		1700	7,5	

1	2	3	4	5
25	Железо	273	22,8	Примеси, %: 0,0027 C 0,001 Si 0,001 Mn 0,002 S 0,0064 O ₂ 0,001 N ₂
		293	21,9	
		323	20,6	
		373	18,7	
		473	15,5	
		673	10,7	
		873	7,15	
		998	4,71	
		1048	3,52	
		1073	4,45	
		1098	4,9	
		1123	5,1	
		1173	5,4	
		1189	5,5	
		1223	6,45	
		1273	6,5	
		1400	6,55	
		1600	6,85	
27	Кобальт	950	10,0	Чистота 99,9 %
		1100	9,3	
		1300	7,4	
		1400	5,7	
		1500	7,6	
		1600	7,6	
28	Никель	900-1200	14,3	Чистота 99,95 %
		1400	14,15	
		1670	13,7	
39	Иттрий	323	9,3	Чистота 99,7% Примеси, %: 0,03 Cu; 0,01 Al; 0,03 Fe; 0,12 Cd; 0,02 N ₂ ; 0,03 O ₂ ; 0,02 H ₂
		373	8,0	
		473	6,5	
		673	5,3	
40	Цирконий	900	10,0	Иодидный Примеси 0,08 %
		1000	9,8	
		1135	11,25	
		1400	14,1	
		1600	14,7	
		1800	14,8	
		2000	14,25	

1	2	3	4	5
41	Ниобий	303-323	22,6	Примеси, %: 0,013 C; 0,054 Fe; 0,014 Ti; 0,014 Si; 0,17 W; 0,04 Mo; 0,5 Ta
		375	22,5	
		455	22,0	
		500	21,1	
		600	22,2	
		673	21,8	
		693	22,0	
		773	22,9	
		893	22,6	
		1053	23,0	
		1100-1400	24,0	
		1800	23,4	Чистота 99,9 %
42	Молибден	500	56,0	Монокристалл
		600	51,5	
		800	47,0	
		1000	44,5	
		1200	41,5	
		1250	38,5	Чистота 99,9 % Примеси, %: 0,001 Ni; 0,001 Si; 0,01 - прочие
		1500	35,0	
		1750	32,0	
		2000	28,0	
43	Технеций	298	18,0	Примеси, %: 0,15 (Al+Fe)
		373	17,3	
		473	16,65	
		573	16,15	
		673	16,0	
		773-848		
46	Палладий	675	24,5	
		800	25,0	
		900	25,2	
		1100	25,3	
		1300	25,4	
		1400	25,0	
		1500	24,8	
		1700	23,0	

1	2	3	4	5
73	Тантал	303-393	23,2	Примеси, %: 0,002 C; 0,06Fe; 0,008Ti; 0,003Si; 0,005W; 0,001Mo; 0,5Nb
		413	23,3	
		457	23,0	
		593	23,5	
		683	23,0	
		723	22,7	
		743	23,2	
		771	23,6	
		1073	23,8	
		1173	24,0	
		1400	22,6	Чистота 99,3 %
		1800	22,0	
		2000	21,7	-
		2200	21,2	
		2400	20,6	
		2600	20,1	
		2800	19,5	
		3000	18,6	
		3150	17,5	
74	Вольфрам	1100	46,3	Чистота 99,95 % Примеси, %: 0,0001Mo; 0,0001H ₂ ; 0,0001N ₂ ; 0,001O ₂ ; 0,02C
		1200	44,3	
		1300	42,4	
		1400	40,7	
		1500	39,1	
		1600	37,5	
		1700	36,3	
		1900	34,1	
		2000	33,2	
		2100	32,4	
		2200	31,5	
		2400	29,8	
77	Иридий	800	42,0	
		1200	35,5	
		1600	3,0	
		2000	2,65	
		2400	2,3	

1	2	3	4	5
78	Платина	300	24,3	Чистота 99,999 %
		400	24,0	
		500	23,7	
		800	23,5	
		900	23,6	
		1000	23,8	
		1100	23,9	
		1200	24,1	
		1400	26,3	
		1500	26,15	
		1600	26,0	
		1800	24,2	
		2000	22,0	

9. Теплопроводность некоторых веществ (в 10^{-4} кал·см⁻¹·сек⁻¹·°C⁻¹)

Вещества	Объемн. вес, г/см ³	Теплопро- водность	Вещества	Объемн. вес, г/см ³	Теплопро- водность
1	2	3	4	5	6
<i>Твердые вещества</i>			Овчина	0,08	1,0
Асбестовое волокно, бумага	0,5	3,5	Опилки	0,20	1,4
Бетон	2,2 ок.	25	Почва (сухая)	-	4,3
Бумага	-	1,2	Пробка	0,20	1,2
Войлок (шерсть)	0,27	0,9	Резина (чистая)	-	3,1
Древесина бальса	0,14	1,3	Снег	0,25	3,6
Древесина деловая перпенд. волокнам	-	2,6- 3,8	Сталь	7,8	1100
Древесина деловая, вдоль волокон	-	5,3- 8,4	Стекловолоконное волокно	0,22	0,9
Капок	0,015	0,8	Стружка стальная	0,10	1,9
Кварц	2,2	24	Хлопчатобумажное волокно	0,08	1,0
Кирпич	1,6	12	Целлулоид	1,4	5,0
Константан	8,9	540	Шелк искусственный	-	1,0
Латунь	8,6	2600	Шлаковая шерсть	0,20	1,1
Лед	0,92	53	Эбонит	1,2	3,8
Натриевое стекло	2,6	17	Шифер	-	33

1	2	3	4	5	6
<i>Жидкости</i>			<i>Газы при 0°C</i>		
Анилин	-	4,0	Азот	-	0,55
Бензин	-	3,3	Водород	-	3,30
Вода	-	14,0	Воздух	-	0,57
Керосин	-	3,6	Кислород	-	0,56
Скипидар	-	3,3	Метан	-	0,74
Спирт метиловый	-	5,0	Углекислый газ	-	0,33
Спирт этиловый	-	4,2			

10. Термические постоянные химических элементов

$T_{пл}$ – температура плавления ($^{\circ}\text{C}$), $T_{кип}$ – температура кипения ($^{\circ}\text{C}$) при нормальном давлении, c – удельная теплоемкость ($\text{кал}\cdot\text{г}^{-1}\cdot\text{град}^{-1}$), L – скрытая теплота плавления ($\text{кал}\cdot\text{г}^{-1}$), α – коэффициент линейного расширения (10^{-6}град^{-1}), λ – теплопроводность ($\text{кал}\cdot\text{см}^{-1}\cdot\text{сек}^{-1}\cdot\text{град}^{-1}$).

Элемент	$T_{пл}$	$T_{кип}$	c		L	α	λ
			обл. т-р $^{\circ}\text{C}$	знач.			
1	2	3	4	5	6	7	8
Азот	-209,9	-195,8	-208÷-196	0,028	-	-	-
Алюминий	660,1	2330	17÷100	0,217	94	26	0,504
Аргон	-189,2	-186	-	-	-	-	-
Барий	704	1600	18	0,07	-	-	-
Бериллий	1280	2770	0÷100	0,425	-	12	-
Бор	2100	2550	0÷100	0,307	-	-	-
Бром	-7,3	59	13÷45	0,107	16	-	-
Ванадий	1720	-	0÷100	0,115	-	-	-
Висмут	271	1470	17÷100	0,0303	14	12	0,019
Водород	-259	-252,7	-253	6,0	-	-	-
Вольфрам	3380	-	20÷100	0,034	-	4	0,48
Галлий	30,0	2100	-	-	-	-	-
Гелий	-272	-268,8	-	-	-	-	-
Германий	958	2700	0÷100	0,074	-	-	-
Железо	1535	2450	18÷100	0,113	49	12	0,161
Золото	1063	2700	17÷100	0,031	16	14	0,70
Индий	156	2100	0÷100	0,057	-	46	-
Йод	113,5	184,4	9÷98	0,054	12	90	-
Иридий	2443	-	18÷100	0,0323	-	7	0,141
Иттрий	1490	-	-	-	-	-	-
Кадмий	320,9	772	20	0,0549	13	30	0,222
Калий	62,5	760	0÷56	0,19	15	80	0,23
Кальций	850	1400	0÷20	0,149	-	-	-
Кислород	-218,8	-182,97	-200÷-183	0,35	-	-	-
Кобальт	1492	3000	15÷100	0,104	58	12	-
Кремний	1440	2600	20	0,170	-	7	-
Криптон	-157	-153	-	-	-	-	-

1	2	3	4	5	6	7	8
Ксенон	-112	-108	-	-	-	-	-
Лантан	920	1800	0÷100	0,045	-	-	-
Литий	186	1360	0÷100	1,09	-	60	0,17
Магний	651	1120	17÷100	0,247	37	26	0,38
Марганец	1260	2150	0÷100	0,110	-	21	-
Медь	1083	2310	15÷100	0,093	42	17	0,92
Молибден	2625	4800	15÷93	0,072	-	5	0,346
Мышьяк	возг.	450	0÷100	0,08	-	5	-
Натрий	97,5	883	0	0,283	27	70	0,31
Неодим	1,024	-	-	-	-	-	-
Неон	-249	-245,9	-	-	-	-	-
Никель	1453	3000	15÷100	0,109	65	13	0,142
Ниобий	2415	3300	-	-	-	-	-
Олово	231,5	2337	20	0,054	14	23	0,155
Осмий	2700	-	19÷98	0,031	-	7	-
Палладий	1552	3560	18÷100	0,059	36	12	0,168
Платина	1769	3910	15÷100	0,0322	27	9	0,166
Празеодим	932	-	-	-	-	-	-
Радий	700	1440	-	-	-	-	-
Родий	1960	-	10÷100	0,058	-	9	0,210
Ртуть	-38,87	356,58	20	0,0333	3	-	0,019
Рубидий	38,7	679	-	0,08	-	90	-
Рутений	2450	-	0÷100	0,061	-	10	-
Самарий	1050	-	-	-	-	-	-
Свинец	327,3	1750	20÷100	0,0305	6	-	0,083
Селен	220	690	22÷62	0,084	84	37	-
Сера (ромбич.)	112,8	444,60	0÷55	0,18	9	70	0,0005
Сера (моноклин.)	119,0	-	-	-	-	-	-
Серебро	960,8	2193	15÷100	0,056	26	19	0,974
Стронций	770	1300	-	-	-	-	-
Сурьма	630,5	1440	20	0,0503	39	12	0,042
Таллий	302	1460	20÷100	0,033	7	31	0,09
Тантал	2850	-	58	0,036	-	7	0,13
Теллур	452	1007	15÷100	0,048	-	17	-
Титан	1660	-	20	0,142	-	-	-
Торий	1842	-	0÷100	0,028	-	12	-
Углерод	возг.	3600	11	0,160	-	5	-
Уран	1133	-	0÷100	0,03	-	-	-
Фосфор	44	282	7÷30	0,19	5	124	-
Фтор	-223	-188	-	-	-	-	-
Хлор	-102	-34	0÷24	0,226	-	-	-
Хром	1800	2200	17÷100	0,110	32	-	-
Цезий	30	690	0÷26	0,048	4	-	-
Церий	800	1400	0÷100	0,045	-	-	-
Цинк	419,5	908	20	0,0924	26	28	0,265
Цирконий	1860	-	0÷100	0,067	-	-	-

11. Температура плавления $T_{пл}$ и удельная теплота плавления λ
при $P = 101,325$ кПа для некоторых веществ

Вещество	$T_{пл}, ^\circ\text{C}$	$\lambda, \text{кДж/кг}$	Вещество	$T_{пл}, ^\circ\text{C}$	$\lambda, \text{кДж/кг}$
Азот	-210,0	-	Латунь	920	-
Алюминий	660,1	397	Медь	1083	205
Аммиак	-77,7	-	Метиловый спирт	-97,7	92
Ацетон	-94,9	98	Никель	1453	303
Бензол	5,53	128	Оксид углерода (II)	-205,1	-
Висмут	271,3	5202	Олово	231,9	59,6
Вода	0	333,7	Парафин	54	-
Водород	-259,2	58,6	Платина	1769,3	111
Вольфрам	3380	192	Ртуть	-38,87	11,8
Глицерин	18,4	201	Свинец	327,4	23,0
Диоксид углерода	-56,6	-	Серебро	960,3	104,5
Железо	1535	277	Серый чугун	1200	-
Золото	1063	6507	Сталь	1500	-
Иридий	2454	117	Углерод	3650	-
Кислород	-218,8	-	Цезий	28,64	16,4
Кремень	1420	164	Цинк	419,5	111

12. Удельные теплоемкости c_p и c_v некоторых газов
при $T = 20^\circ\text{C}$, $P = 101,325$ кПа

Газ	$c_p, \text{кДж/(кг}\cdot\text{K)}$	$c_v, \text{кДж/(кг}\cdot\text{K)}$	c_p/c_v
Азот	1,051	0,745	1,40
Аммиак	2,244	1,675	1,31
Аргон	0,523	0,322	1,67
Ацетилен	1,683	1,352	1,25
Водород	14,269	10,132	1,41
Воздух	1,009	0,720	1,40
Гелий	5,269	3,182	1,66
Кислород	0,913	0,653	1,40
Криптон	0,251	0,151	1,67
Ксенон	0,159	0,096	1,70
Метан	2,483	1,700	1,31
Неон	1,038	0,620	1,68
Оксид азота (I)	0,913	0,715	1,27
Оксид азота (II)	0,976	0,695	1,40
Оксид серы (IV)	0,645	0,502	1,29
Оксид углерода (II)	1,047	0,754	1,40
Оксид углерода (IV)	0,837	0,653	1,30
Пропан	1,863	1,650	1,13
Сероводород	1,026	0,804	1,34
Хлор	0,520	0,356	1,36
Этан	1,729	1,444	1,20
Этилен	1,528	1,222	1,25

13. Удельная теплоемкость c_p некоторых веществ в твердом и жидком состояниях

Твердое состояние	$T, ^\circ\text{C}$	$c_p, \text{кДж}/(\text{кг}\cdot\text{K})$	Жидкое состояние	$T, ^\circ\text{C}$	$c_p, \text{кДж}/(\text{кг}\cdot\text{K})$
Алюминий	20	0,896	Азотная кислота	20	1,72
Бериллий	20	1,750	Алюминий	660,4-1000	1,084
Бетон	0	0,84	Анилин	0	2,018
Бетон	20	0,88	Анилин	20	2,641
Ванадий	20	0,502	Анилин	50	2,144
Висмут	20	0,123	Ацетон	0	2,114
Вольфрам	20	0,134	Ацетон	20	2,160
Дерево (дуб)	0-100	2,39	Бензин	10	1,42
Железо	20	0,452	Бензин	50	2,09
Золото	20	0,129	Вода	20	4,182
Кремний	0	0,678	Глицерин	20	2,43
Магний	0	1,001	Золото	1065-1300	0,142
Медь	20	0,383	Керосин	20-100	2,085
Натрий	0	1,189	Литий	200-1000	4,19
Никель	0	0,442	Магний	651	1,327
Ниобий	0	0,268	Масло (подсолн.)	20	1,775
Олово	0	0,225	Мед	20	2,428
Песок	0-100	0,79	Молоко (цельн.)	20	3,936
Платина	0	0,133	Олово	250	0,243
Свинец	0	0,128	Ртуть	0	0,1465
Сера	0	0,699	Ртуть	20	0,1390
Серебро	0	0,233	Ртуть	100	0,1373
Слюда	20	0,88	Ртуть	300	0,1359
Соль (NaCl)	25	0,87	Свинец	327,4	0,163
Тантал	0	0,137	Серебро	961-1300	0,289
Текстолит	20	1,47	Серная кислота	20	1,38
Титан	20	0,611	Сероуглерод	20	1,00
Углерод (алмаз)	20	0,502	Скипидар	20	1,800
Углерод (графит)	0	0,641	Спирт метиловый	0	2,43
Уран	25	0,134	Спирт этиловый	0	2,30
Хром	2	0,427	Спирт этиловый	20	2,47
Цезий	20	0,230	Спирт этиловый	50	2,81
Цинк	20	0,385	Топливо Т-1	20	2,01
Цирконий	20	0,289	Топливо ТС-Т	20	0,84
			Фреон-12	20	2,01

14. Физические свойства некоторых газов и паров

Вещество	Плотность при 0°C и 10 ⁵ Па, кг/м ³	Удельная теплоемкость, Дж/(кг·К)				Коэффициент теплопровод- ности, Вт/(м·К) при 273 К
		T, K	c_p	c_v	$\gamma = c_p / c_v$	
1	2	3	4	5	6	7
Азот	1,251	293	1047	755	1,40	0,0228
Аммиак	0,771	293	2137	1634	1,30	0,0200
Аргон	1,783	273	510	301	1,67	0,0158
Водород	0,08988	289	14288	10140	1,40	0,159
Углекислый газ	1,977	293	838	628	1,30	0,0137
Гелий	0,1785	291	5240	3150	1,66	0,139
Закись азота (N ₂ O)	1,7978	-	-	-	-	-
Радон	9,73	-	-	-	-	-
Этан	1,357	-	-	-	-	-
Ацетилен	1,173	-	-	-	-	-
Этилен	1,261	-	-	-	-	-
Йодистый водород (HI)	5,789	-	-	-	-	-
Кислород	1,429	293	922	670	1,40	0,0233
Криптон	3,71	-	-	-	-	-
Ксенон	5,85	-	-	-	-	-
Метан	0,777	-	-	-	-	-
Неон	0,900	-	-	-	-	-
Озон	2,139	-	-	-	-	-
Окись азота (NO)	1,34	-	-	-	-	-
Окись углерода (CO)	1,25	291	1050	754	1,40	0,0444

Серная кислота (50%-я)	1,40 (0°C)	1420	-
Соляная кислота (40% HCl)	1,20 (0°C)	-	-
Спирт этиловый безводный	0,79 (18°C)	2430	0,182
Хлороформ	1,48 (18°C)	-	-

15. Физические свойства сухого воздуха при 10^5Па
в интервале от -50 до 1200°C

$t, ^\circ\text{C}$	$\rho, \text{кг/м}^3$	$c_p,$ $\text{кДж}/(\text{кг}\cdot\text{K})$	$\lambda\cdot 10^2,$ $\text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{K})$	$\alpha\cdot 10^6,$ $\text{м}^2/\text{с}$	$\mu\cdot 10^6,$ $\text{Па}\cdot\text{с}$	$\nu\cdot 10^6,$ $\text{м}^2/\text{с}$	Pr
-50	1,584	1,013	2,04	12,7	14,6	9,23	0,728
-40	1,515	1,013	2,12	13,8	15,2	10,04	0,728
-30	1,453	1,013	2,20	14,9	15,7	10,80	0,723
-20	1,395	1,009	2,28	16,2	16,2	12,79	0,716
-10	1,342	1,009	2,36	17,4	16,7	12,43	0,712
0	1,293	1,005	2,44	18,8	17,2	13,28	0,707
10	1,247	1,005	2,51	20,0	17,6	14,16	0,705
20	1,205	1,005	2,59	21,4	18,1	15,06	0,703
30	1,165	1,005	2,67	22,9	18,6	16,00	0,701
40	1,128	1,005	2,76	24,3	19,1	16,96	0,699
50	1,093	1,005	2,83	25,7	19,6	17,95	0,698
60	1,060	1,005	2,90	27,2	20,1	18,97	0,696
70	1,029	1,009	2,96	28,6	20,6	20,02	0,694
80	1,000	1,009	3,05	30,2	21,1	21,09	0,692
90	0,972	1,009	3,13	31,9	21,5	22,10	0,690
100	0,946	1,009	3,21	33,6	21,9	23,13	0,688
150	0,834	1,015	3,56	42,1	24,1	28,95	0,683
200	0,746	1,026	3,93	51,4	26,0	34,85	0,680
300	0,615	1,047	4,60	71,6	29,7	48,33	0,674
400	0,524	1,068	5,21	93,1	33,0	63,09	0,678
500	0,456	1,093	5,74	115,3	36,2	79,38	0,687
600	0,404	1,114	6,22	138,3	39,1	96,89	0,699
800	0,329	0,156	7,18	188,8	44,3	134,8	0,713
1000	0,277	1,185	8,07	245,9	49,0	177,1	0,719
1200	0,239	1,210	9,15	316,5	53,5	233,7	0,724

16. Динамическая вязкость η некоторых жидкостей и газов
при $T = 20^\circ\text{C}$, $P = 101,3 \text{ кПа}$

Жидкость	η , мПа·с	Газ	η , мПа·с
Ацетон	0,322	Водород	0,0088
Бензол	0,648	Аммиак	0,00995
Бензин	0,649	Метан	0,0108
Вода	1,005	Оксид углерода (IV)	0,0147
Этиловый спирт	1,20	Азот	0,0175
Ртуть	1,554	Оксид углерода (II)	0,0177
Масло техническое	30-5000	Воздух	0,0182
Глицерин	830-1480	Гелий	0,0196
Смола	$3 \cdot 10^{10}$	Кислород	0,0202

17. Коэффициент взаимной диффузии некоторых газовых смесей

Смесь газов	$D_{12} \cdot 10^5 \text{ м}^2/\text{с}$
$\text{H}_2 - \text{O}_2$	6,79
$\text{CO} - \text{H}_2$	6,49
$\text{CO}_2 - \text{H}_2$	5,38
$\text{CO} - \text{O}_2$	1,83
$\text{O}_2 - \text{N}_2$	1,74
$\text{CO}_2 - \text{CO}$	1,36
$\text{H}_2 - \text{D}_2$	1,20
$\text{H}_2\text{O} - \text{CO}_2$	0,98

18. Критические постоянные газов

Газ	Крит. давл., ат	Крит. т-ра, $^\circ\text{C}$	Крит. плотн., $\text{г}/\text{см}^3$
Азот	33,49	-147,13	0,311
Аммиак	112,3	132,9	0,233
Аргон	47,996	-122,44	0,531
Бром	-	302	-
Водород	12,80	-239,91	0,031
Водяной пар	217,96	374	0,329
Гелий	2,261	-267,91	0,069
Кислород	49,713	-118,82	0,430
Криптон	54,24	-62,6	-
Ксенон	58,22	16,6	0,154
Метан	45,8	-82,1	0,162
Неон	26,86	-228,71	0,484
Оксид углерода	5	-139	0,303
Углекислый газ	72,72	30,96	0,464
Хлор	76,1	144	0,573

19. Температура кипения $T_{\text{кип}}$ и удельная теплота испарения r
при $P = 101,3$ кПа для некоторых веществ

Вещество	$T_{\text{кип}}, ^\circ\text{C}$	$r, \text{кДж/кг}$	Вещество	$T_{\text{кип}}, ^\circ\text{C}$	$r, \text{кДж/кг}$
Азот	-195,82	198	Метан	-161,5	510
Алюминий	2450	10900	Метиловый спирт	64,6	1100
Аммиак	-33,4	1370	Никель	2800	6480
Ацетон	56,25	525	Олово	2430	2450
Бензол	80,1	394	Пентан	36,1	360
Вода	100	2256	Пропиловый спирт	97,2	750
Водород	-252,77	454	Ртуть	356,58	285
Гелий	-268,94	20,6	Свинец	1750	8600
Глицерин	290,5	-	Сера	444,6	290
Диоксид серы	-10,02	390	Толуол	110,62	364
Диэтилэфир	34,5	384	Углерод	4350	$5 \cdot 10^4$
Железо	2735	6340	Фосфор	280	400
Золото	2700	1650	Фреон-12	-24,9	162
Кислород	-182,97	213	Хлороформ	61,3	279
Криптон	-153,4	108	Цинк	907	1755
Медь	2590	4790	Этиловый спирт	78,33	840

20. Поверхностное натяжение некоторых жидкостей σ , дн/см (эрг/см²),
при различных температурах

Вещество	0°C	10°C	20°C	30°C	40°C	50°C	60°C
Анилин $\text{C}_6\text{H}_5\text{NH}_2$	45,42	44,38	43,30	42,24	41,20	40,1	38,4
Ацетон CH_3COCH_3	25,21	25,0	23,32	22,01	21,16	19,90	18,61
Вода H_2O	75,64	74,22	72,75	71,18	69,56	67,91	66,18
Гексан C_6H_{14}	20,52	19,4	18,42	17,40	16,35	15,30	14,20
Метиловый спирт CH_3OH	24,50	23,50	22,60	21,80	20,90	20,10	19,30
Нитробензол $\text{C}_6\text{H}_5\text{NO}_2$	46,40	45,20	43,90	42,70	41,50	40,20	39,0
Ртуть Hg	-	-	471,6	-	468,20	-	-
Толуол $\text{C}_6\text{H}_5\text{CH}_3$	30,80	29,60	28,53	27,40	26,20	25,0	23,80
Уксусная кислота CH_3COOH	29,70	28,80	27,63	26,80	25,80	24,65	23,80
Хлорбензол $\text{C}_6\text{H}_5\text{Cl}$	36,0	34,80	33,28	32,30	31,10	29,90	28,70
Четыреххлористый углерод CCl_4	29,38	28,05	26,70	25,54	24,41	23,22	22,38
Этиловый спирт $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$	24,05	23,14	22,32	21,48	20,60	19,80	19,01

21. Вязкость жидкостей в 10^{-5} пуаз

Жидкость	Т-ра, °C	Вязкость	Жидкость	Т-ра, °C	Вязкость
Азотная кислота	10	1770	Масло льняное	30	$331 \cdot 10^3$
Ацетон	20	330	Масло оливковое	20	$84 \cdot 10^3$
Бензин	20	649	Серная кислота	20	$22 \cdot 10^3$
Глицерин	20	$83 \cdot 10^4$	Сероуглерод	20	367
Ксилол мета	20	615	Скипидар	20	1490
Ксилол орто	20	807	Спирт метиловый	20	591
Ксилол пара	20	643	Спирт этиловый	20	1192
Масло касторовое	20	$986 \cdot 10^3$	Эфир	20	234

22. Вязкость газов в 10^{-5} пуаз

Газ	Т-ра, °C	Вязкость	Газ	Т-ра, °C	Вязкость
Азот	20	18,4	Метан	20	12,0
Аммиак	20	10,8	Неон	0	29,8
Аргон	0	21,0	Окись азота	20	18,6
Водород	20	9,5	Окись углерода	20	18,4
Водяной пар	15	9,8	Сернистый газ	20	13,8
Воздух	20	18,1	Сероводород	20	13,0
Гелий	0	18,9	Углекислый газ	20	16,0
Кислород	20	20,9	Хлор	20	14,7
Криптон	0	23,3	Хлористый водород	0	14,0
Ксенон	0	21,1			

23. Давление и плотность насыщенного водяного пара
при различной температуре

$t, ^\circ\text{C}$	$p, \text{мм рт.ст.}$	$\rho, \text{г/м}^3$	$t, ^\circ\text{C}$	$p, \text{мм рт.ст.}$	$\rho, \text{г/м}^3$
-20	0,772	0,88	25	23,756	23,0
-18	0,935	1,05	26	25,209	24,4
-16	1,128	1,27	27	26,739	25,8
-14	1,357	1,51	28	28,349	27,2
-12	1,627	1,80	29	30,043	28,7
-10	1,946	2,14	30	31,824	30,3
-8	2,321	2,54	31	33,695	32,0
-6	2,761	2,99	32	35,663	33,8
-4	3,276	3,51	33	37,729	35,6
-2	3,879	4,13	34	39,898	37,6
0	4,579	4,84	35	42,175	39,6
2	5,294	5,60	36	44,563	41,7
4	6,101	6,40	37	47,067	44,0
6	7,013	7,3	38	49,692	46,2
8	8,045	8,3	39	52,442	48,6
10	9,209	9,4	40	55,324	51,2
11	9,844	10,0	45	71,88	65,6
12	10,518	10,7	50	92,51	83,2
13	11,231	11,4	55	118,04	104,6
14	11,987	12,1	60	149,38	130,5
15	12,78	12,8	65	187,54	161,5
16	13,634	13,6	70	233,71	198,4
17	14,530	14,5	75	289,13	242,1
18	15,477	15,4	80	355,12	293,8
19	16,477	16,3	85	433,62	354,1
20	17,535	17,3	90	525,76	424,1
21	18,650	18,3	95	633,90	505,0
22	19,847	19,4	100	760,00	598,0
23	21,068	20,6	110	1074,26	827,0
24	22,377	21,8	120	1489,14	1122,0

24. Давление насыщенного пара воды, льда и переохлажденной воды

$t, ^\circ\text{C}$	$p, \text{Па}$	$t, ^\circ\text{C}$	$p, \text{Па}$	$t, ^\circ\text{C}$	$p, \text{Па}$	$t, ^\circ\text{C}$	$p, \text{Па}$
Вода				Лед		Переохлажденная вода	
0	610,48	100	101,33	0	610	0	610
5	872,33	110	143,27	-1	562	-1	568
10	1221,8	120	198,54	-2	517	-2	527
15	1704,9	130	270,11	-3	475	-3	489
20	2337,8	140	361,37	-4	436	-4	454
25	3167,2	150	476,01	-5	401	-5	421
30	4245,2	160	618,02	-10	259	-10	286
35	5622,3	170	791,99	-20	103		
40	7375,9	180	1002,7	-30	37,3		
45	9583,2	190	1255,3	-40	12,3		
50	12334	200	1555,0	-50	3,9		
55	15737	220	2320,2	-60	0,93		
60	19916	240	3348,0				
65	25003	260	4694,4				
70	31157	280	6419,4				
75	38544	300	8591,6				
80	47343	320	11290				
85	57809	340	14608				
90	70101	360	18674				
95	84513	370	21053				
100	101325	374,2	22087				

25. Давление насыщенного пара ртути

$t, ^\circ\text{C}$	$p, \text{Па}$	$t, ^\circ\text{C}$	$p, \text{Па}$	$t, ^\circ\text{C}$	$p, \text{Па}$
-40	0,239	40	0,81571	140	0,2449
-30	0,893	50	1,6960	160	0,5522
-20	2,933	60	3,3679	180	1,159
-10	8,976	70	6,4305	200	2,283
0	25,13	80	11,9	250	9,882
10	66,28	90	23,1	300	32,87
20	162,66	100	38,3	350	89,64
30	373,46	120	100,5	358	103,60

26. Степень диссоциации некоторых молекулярных газов

Вещество	Давление, кПа	Температура, К				
		500	1000	1500	2000	2500
H ₂	101,3	$3,46 \cdot 10^{-21}$	$1,12 \cdot 10^{-9}$	$8,79 \cdot 10^{-6}$	$8,11 \cdot 10^{-1}$	$1,26 \cdot 10^{-2}$
Cl ₂	101,3	$7,46 \cdot 10^{-11}$	$1,91 \cdot 10^{-4}$	$2,9 \cdot 10^{-2}$	0,344	0,860
Br ₂	101,3	$2,36 \cdot 10^{-8}$	$2,86 \cdot 10^{-3}$	0,144	0,728	0,967
I ₂	101,3	$2,83 \cdot 10^{-6}$	$2,8 \cdot 10^{-2}$	0,524	0,946	0,996
HCl	} независимо от давления	$1,42 \cdot 10^{-10}$	$1,1 \cdot 10^{-5}$	$5,0 \cdot 10^{-4}$	$3,4 \cdot 10^{-3}$	$1,08 \cdot 10^{-2}$
HBr		$2,54 \cdot 10^{-6}$	$1,45 \cdot 10^{-3}$	$1,25 \cdot 10^{-2}$	$3,6 \cdot 10^{-2}$	$6,33 \cdot 10^{-2}$
HI		0,142	0,27	0,33	0,37	0,38
H ₂ O	1013	$3,22 \cdot 10^{-16}$	$1,13 \cdot 10^{-7}$	$8,88 \cdot 10^{-5}$	$2,56 \cdot 10^{-3}$	$1,90 \cdot 10^{-2}$
H ₂ O	101,3	$6,94 \cdot 10^{-16}$	$2,44 \cdot 10^{-7}$	$1,90 \cdot 10^{-4}$	$5,5 \cdot 10^{-3}$	$4,1 \cdot 10^{-2}$
H ₂ O	10,13	-	$5,25 \cdot 10^{-7}$	$4,12 \cdot 10^{-4}$	$1,18 \cdot 10^{-2}$	$8,6 \cdot 10^{-2}$
H ₂ O	1,013	-	$1,13 \cdot 10^{-6}$	$8,88 \cdot 10^{-4}$	$2,53 \cdot 10^{-2}$	0,175
CO ₂	1013	$1,22 \cdot 10^{-17}$	$8,85 \cdot 10^{-8}$	$1,67 \cdot 10^{-4}$	$7,0 \cdot 10^{-3}$	$6,2 \cdot 10^{-2}$
CO ₂	101,3	$2,62 \cdot 10^{-17}$	$1,90 \cdot 10^{-7}$	$3,60 \cdot 10^{-4}$	$1,50 \cdot 10^{-2}$	0,13
CO ₂	10,13	-	$4,14 \cdot 10^{-7}$	$7,82 \cdot 10^{-4}$	$3,22 \cdot 10^{-2}$	0,256
CO ₂	1,013	-	$8,85 \cdot 10^{-7}$	$1,68 \cdot 10^{-3}$	$6,8 \cdot 10^{-2}$	0,46
COCl ₂	101,3	$3,63 \cdot 10^{-3}$	0,944	-	-	-
O ₂	101,3	$5,75 \cdot 10^{-24}$	$7,81 \cdot 10^{-11}$	$2,01 \cdot 10^{-6}$	$3,32 \cdot 10^{-4}$	$7,20 \cdot 10^{-3}$
N ₂	101,3	$2,26 \cdot 10^{-47}$	$1,47 \cdot 10^{-22}$	$3,01 \cdot 10^{-14}$	$4,47 \cdot 10^{-10}$	$1,45 \cdot 10^{-7}$
F ₂	101,3	$2,65 \cdot 10^{-6}$	$4,78 \cdot 10^{-2}$	0,799	0,990	0,999

27. Характеристики различных степеней вакуума

Характеристика	Вакуум			
	низкий	средний	высокий	сверхвысокий
Диапазон давлений p , Па	$10^5 \div 10^2$	$10^2 \div 10^{-1}$	$10^{-1} \div 10^{-5}$	10^{-6} и ниже
Число молекул в 1 м^3	$10^{25} \div 10^{22}$	$10^{22} \div 10^{19}$	$10^{19} \div 10^{16}$	10^{15} и менее
Режим течения газа	вязкостный	переходный	молекулярный	молекулярный
Явления переноса (χ, η)	Не зависят от p	Зависят от p (опре	Пропорциональны p	Практически отсутствуют
Ср. длина св. пробега $\bar{\lambda}$ (воздух, 20°C) по отношению к размеру сосуда L	$\bar{\lambda} \ll L$	$\bar{\lambda} \approx L$	$\bar{\lambda} \gtrsim L$	$\bar{\lambda} > L$
Темп. кипения воды, $^\circ\text{C}$	$100 \div 17,5$	$17,5 \div 66,7$	$-66,7 \div -100$	$-100 \div -180$
Критерии выбора системы откачки	Откачиваемый объем (независимо от формы), длительность откачки	Откачиваемый объем, с учетом его формы	Размеры и состояние поверхностей; скорость откачки $1000 \frac{\text{л/с}}{\text{м}^2}$ при поддержании вакуума $-100 \frac{\text{л/с}}{\text{м}^2}$	Размеры и состояние поверхностей
Рекомендуемые насосы	Объемные (поршневые и вращательные) струйные, эжекторные	Пароструйные, эжекторные, бустерные пароструйные и механические	Диффузионные	Диффузионные, сорбционные, ионные, молекулярные

28. Модуль Юнга E , коэффициент Пуассона μ , модуль сдвига G для некоторых веществ

Вещество	$E \cdot 10^{10}, \text{Н/м}^2$	μ	$G \cdot 10^{16}, \text{Н/м}^2$
Каучук	0,0008	0,46	0,0003
Плексиглас	0,52	0,35	0,15
Бетон	1,05-4	0,32-36	0,7-1,7
Свинец	1,62	0,45	0,56
Гранит, мрамор	3,5-5,0	0,1-0,15	1,4-2,4
Стекло	4,9-7,8	0,2-0,3	1,75-2,9
Кадмий	4,99	0,3	1,9
Фарфор	5,8	0,23	-
Алюминий	7,1	0,34	2,6
Дуралюмин	7,3	0,34	2,7
Кварцевое стекло	7,5	0,17	3,2
Серебро	7,9	0,37	2,8
Золото	7,9	0,42	2,9
Германий	8,1	0,31	3,1
Латунь	9,8	0,35	3,6
Серый чугун	10,8	0,22	4,4
Титан	11,6	0,32	4,4
Медь	12,3	0,35	4,55
Манганин	12,4	0,33	4,6
Платина	14,7	0,39	6,1
Константан	16,3	0,33	6,2
Кобальт	19,6-20,8	-	-
Никель	20,5	0,3	7,7
Сталь	20,6	0,28	8
Вольфрам	34,2-40	0,29	8,8-21,5
Молибден	45,8	0,32	-
Иридий	52,8	0,26	-

29. Коэффициент трения покоя ($\mu_{\text{п}}$) и трения скольжения ($\mu_{\text{ск}}$)

Соприкасающиеся вещества	$\mu_{\text{п}}$	$\mu_{\text{ск}}$	
		сухое	со смазкой
Автошина-асфальт	0,55	0,3	0,15
Автошина-булыжник	0,55	0,5	0,2 (с водой)
Дерево-дерево	0,65	0,3	0,1
Кожа-дерево	0,47	0,27	0,014 (с водой)
Кожа-серый чугун	0,56	0,28	0,12
Металл-дерево	0,5-0,6	0,4-0,5	0,03-0,08
Сталь-сталь	0,15	0,1	0,01

30. Равномерно темперированная шкала (частоты)

C [/] (до 1-й октавы)	261,63	G (соль)	392,00
C # (до-диез)	277,18	G # (соль-диез)	415,31
D (ре)	293,67	A (ля)	440
D # (ре-диез)	311,13	A # (ля-диез)	466,16
E (ми)	329,23	H (си)	493,88
F (фа)	349,23	C ^{//} (до 2-й октавы)	523,25
F # (фа-диез)	369,99		

Все частоты даны в герцах

31. Скорость звука в веществе (м/сек)

Твердые вещества (при 20°C)

Алюминий	5100	Серебро	2600
Латунь	3400	Цинк	3700
Медь	3600	Кирпич	3700
Железо	5000	Шифер	4500
Сталь	5100	Стекло	5000
Никель	4900	Дерево	3000-4000
Платина	2700		

Жидкости (при 20°C)

Спирт	1210		
Вода	1457	зависимость от t (0÷25°C):	$1390+3,3t$

Газы (при нормальных условиях)

Воздух (сухой)	331,36	зависимость от t :	$331,36+0,54t$
Двуокись углерода	259		
Светильный газ	490-500		
Водород	1262		
Кислород	316		

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ ПОСТАНОВКИ И РЕШЕНИЯ ТЕПЛОВЫХ ЗАДАЧ

В ряде случаев, например, при изучении процессов на электродах (контактах), в плавких вставках специальных типов предохранителей и т.д. возникают задачи определения температурного поля в телах, на поверхности которых воздействует тепловой поток, зависящий от координат и времени. Ниже рассматривается несколько таких задач.

Задача 1

Определить стационарное температурное поле в полуограниченном теле, в котором в плоскости $z=0$, к площадке радиуса r_0 , в направлении оси z подводится тепловой поток $Q(r)$. Теплообменом на поверхности z тела при $r > r_0$ пренебрегаем. Математически задачу можно сформулировать следующим образом:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial T}{\partial R} + \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} = 0; \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial Z} \right|_{Z=0} = \begin{cases} -\frac{1}{\pi r_0 \lambda} Q(R) & 0 \leq R \leq 1, \\ 0 & 1 < R < \infty, \end{cases} \quad (2)$$

$$T|_{Z \rightarrow \infty} = 0; \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial Z} \right|_{R \rightarrow \infty} = 0; \quad (T|_{R \rightarrow \infty} = 0), \quad (4)$$

где

$$R = \frac{r}{r_0};$$

$$Z = \frac{z}{r_0};$$

λ – коэффициент теплопроводности материала тела.

Применяя к (1) – (4) преобразование Ханкеля по R с бесконечными пределами

$$\bar{T} = \int_0^\infty T R I_0(\mu R) dR,$$

получим:

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial Z^2} - \mu^2 \bar{T} = 0; \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial Z} \right|_{Z=0} = -\frac{1}{\pi r_0 \lambda} \int_0^1 Q(R) R I_0(\mu R) dR; \quad (6)$$

$$\bar{T}|_{Z \rightarrow \infty} = 0. \quad (7)$$

Решением уравнения (5) будет следующая функция:

$$\bar{T}(\mu, Z) = A \exp \mu Z + B \exp(-\mu Z), \quad (8)$$

где A и B определяются из условий (6) и (7),

$$\left. \begin{aligned} A &= 0 \\ B &= \frac{1}{\pi r_0 \lambda \mu} \int_0^1 Q(R) R I_0(\mu R) dR \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Итак,

$$\bar{T} = \frac{1}{\pi r_0 \lambda \mu} \exp(-\mu Z) \int_0^1 Q(R) R I_0(\mu R) dR. \quad (10)$$

Применяя обратное преобразование Ханкеля

$$T = \int_0^\infty \mu I_0(\mu R) \bar{T} d\mu, \quad (11)$$

получим выражение для определения температурного поля

$$T = \frac{1}{\pi r_0 \lambda} \int_0^\infty \exp(-\mu Z) \left[\int_0^1 Q(R) R I_0(\mu R) dR \right] I_0(\mu R) d\mu. \quad (12)$$

Рассмотрим частный случай, когда

$$Q(R) = -aR + b,$$

тогда

$$\begin{aligned} T = \frac{a}{2r_0 \lambda} \int_0^\infty \frac{I_1(\mu) H_0(\mu) - H_1(\mu) I_0(\mu)}{\mu^2} I_0(\mu R) \exp(-\mu Z) d\mu + \\ + \frac{b-a}{\pi r_0 \lambda} \int_0^\infty \frac{I_1(\mu) I_0(\mu R) \exp(-\mu Z)}{\mu} d\mu \end{aligned} \quad (13)$$

Задача 2

Определить стационарное температурное поле в неограниченном цилиндре радиуса r_1 , в центре которого в радиусе r_0 действует источник тепла мощностью $Q(r)$. Через боковую поверхность цилиндра осуществляется теплообмен с окружающей средой. Теплообменом на поверхности тела $z=0$ при $r > r_0$ пренебрегаем.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial T}{\partial R} + \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} = 0; \quad (14)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial Z} \right|_{Z=0} = \begin{cases} -\frac{1}{\pi r_0 \lambda} Q(R) & 0 \leq R \leq 1; \\ 0 & 1 < R < R_1; \end{cases} \quad (15)$$

$$T|_{Z \rightarrow \infty} = 0; \quad (16)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial R} \right|_{R=R_1} = -B_i T|_{R=R_1} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{r_1}{r_0}; \\ B_i &= \frac{\alpha r_0}{\lambda}; \end{aligned}$$

α – коэффициент теплоотдачи.

Применяя к (14) – (17) преобразование Ханкеля по R с конечными пределами

$$\bar{T} = \int_0^{R_1} T R I_0(\mu_k R) dR, \quad (18)$$

получим:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} - \mu_k^2 \bar{T} = 0; \quad (19)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial Z} \right|_{Z=0} = -\frac{1}{\pi r_0 \lambda} \int_0^1 Q(R) R I_0(\mu_k R) dR; \quad (20)$$

$$\bar{T}|_{Z \rightarrow \infty} = 0. \quad (21)$$

$$B_i I_0(\mu_k R_1) + \mu_k I_0'(\mu_k R_1) = 0. \quad (22)$$

Решением уравнения (19) будет иметь следующий вид:

$$\bar{T} = A_k \exp \mu_k Z + B_k \exp(-\mu_k Z), \quad (23)$$

где A_k и B_k определяются из условий (20), (21), а μ_k - из выражения (22)

$$\left. \begin{aligned} A_k &= 0 \\ B_k &= \frac{1}{\pi r_0 \lambda \mu_k} \int_0^1 Q(R) R I_0(\mu_k R) dR \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Итак,

$$\bar{T} = \frac{\exp(-\mu_k Z)}{\pi r_0 \lambda \mu_k} \int_0^1 Q(R) R I_0(\mu_k R) dR. \quad (25)$$

Применяя теорему обращения для преобразования Ханкеля с конечными пределами, получим формулу распределения температурного поля

$$T = \frac{2}{\pi r_0 R_1^2 \lambda} \sum_k \frac{\mu_k \int_0^1 Q(R) R I_0(\mu_k R) dR}{(B_i^2 + \mu_k^2) [I_0(\mu_k R_1)]^2} I_0(\mu_k R) \exp(-\mu_k Z). \quad (26)$$

В частном случае для $Q(R) = -aR + b$

$$\begin{aligned} T = \frac{2}{\pi r_0 R_1^2 \lambda} \left\{ \frac{a\pi}{2} \sum_k \frac{[I_1(\mu_k) H_0(\mu_k) - I_0(\mu_k) H_1(\mu_k)]}{\mu_k (B_i^2 + \mu_k^2) [I_0(\mu_k R_1)]^2} \times I_0(\mu_k R) \exp(-\mu_k Z) + \right. \\ \left. + (b - a) \sum_k \frac{I_1(\mu_k)}{(B_i^2 + \mu_k^2) [I_0(\mu_k R_1)]^2} I_0(\mu_k R) \exp(-\mu_k Z) \right\}, \end{aligned} \quad (27)$$

где $I_0(\mu_k)$ и $I_1(\mu_k)$ - функции Бесселя первого рода действительного аргумента; $H_0(\mu_k)$ и $H_1(\mu_k)$ - функции Струве.

Задача 3

Определить стационарное температурное поле в цилиндре высотой h , радиусом r_0 , в котором в плоскости $z=0$ действует источник тепла мощностью Q , линейно зависящей от температуры.

Через основание цилиндра и боковую поверхность осуществляется теплообмен с окружающей средой. Начальная температура тела t_0 .

$$\frac{\partial^2 T}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial T}{\partial R} + \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} = 0; \quad (28)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial Z} \right|_{Z=0} = -\frac{aT+b}{\pi r_0 \lambda} \Big|_{Z=0}; \quad (29)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial Z} \right|_{Z=\frac{h}{r_0}} = -Bi T \Big|_{Z=\frac{h}{r_0}}; \quad (30)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial R} \right|_{R=1} = -Bi_1 T \Big|_{R=1} \quad (31)$$

где $Bi_1 = \frac{\alpha_1 r_0}{\lambda}$;

$$T = t - t_0$$

Применяя преобразование Ханкеля по R с конечными пределами к (28)-(31), получим:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} - \mu_k^2 \bar{T} = 0; \quad (32)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial Z} \right|_{Z=0} = -\frac{a}{\pi r_0 \lambda} \bar{T}|_{Z=0} - \frac{b}{\pi r_0 \lambda \mu_k} I_1(\mu_k); \quad (33)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial Z} \right|_{Z=\frac{h}{r_0}} = -Bi \bar{T}|_{Z=\frac{h}{r_0}}. \quad (34)$$

$$Bi I_0(\mu_k) + \mu_k I'_0(\mu_k) = 0. \quad (35)$$

Решением уравнения будет

$$\bar{T} = A_k \exp \mu_k Z + B_k \exp(-\mu_k Z).$$

Постоянные A_k и B_k определяем из условия (33), (34), а μ_k из соотношения (35)

$$A_k = \frac{b(\mu_k - Bi) I_1(\mu_k) \exp\left(-\frac{\mu_k h}{r_0}\right)}{2\pi r_0 \lambda \mu_k \left[\left(\mu_k^2 - \frac{aBi}{\pi r_0 \lambda}\right) sh \frac{\mu_k h}{r_0} + \left(\mu_k Bi - \frac{a\mu_k}{\pi r_0 \lambda}\right) ch \frac{\mu_k h}{r_0} \right]}; \quad (36)$$

$$B_k = \frac{b(\mu_k + Bi) I_1(\mu_k) \exp\left(\frac{\mu_k h}{r_0}\right)}{2\pi r_0 \lambda \mu_k \left[\left(\mu_k^2 - \frac{aBi}{\pi r_0 \lambda}\right) sh \frac{\mu_k h}{r_0} + \left(\mu_k Bi - \frac{a\mu_k}{\pi r_0 \lambda}\right) ch \frac{\mu_k h}{r_0} \right]}. \quad (37)$$

Итак,

$$T = \frac{b I_1(\mu_k)}{\pi r_0 \lambda \mu_k} \left[\mu_k ch \mu_k \left(\frac{h}{r_0} - Z \right) + Bi sh \mu_k \left(\frac{h}{r_0} - Z \right) \right] \times \\ \times \frac{1}{\left[\left(\mu_k^2 - \frac{aBi}{\pi r_0 \lambda}\right) sh \frac{\mu_k h}{r_0} + \left(\mu_k Bi - \frac{a\mu_k}{\pi r_0 \lambda}\right) ch \frac{\mu_k h}{r_0} \right]}. \quad (38)$$

Применяя теорему обращения, получим выражение для определения температурного поля

$$T = \frac{2b}{\pi r_0 \lambda} \sum_k \mu_k I_1(\mu_k) \left[\mu_k ch \mu_k \left(\frac{h}{r_0} - Z \right) + Bi sh \mu_k \left(\frac{h}{r_0} - Z \right) \right] \times \\ \times \frac{I_0(\mu_k R)}{(Bi_1^2 + \mu_k^2) [I_0(\mu_k)]^2 \left[\left(\mu_k^2 - \frac{aBi}{\pi r_0 \lambda}\right) sh \frac{\mu_k h}{r_0} + \left(\mu_k Bi - \frac{a\mu_k}{\pi r_0 \lambda}\right) ch \frac{\mu_k h}{r_0} \right]}. \quad (39)$$

Задача 4

Найти стационарное распределение температуры в цилиндре высотой h , радиусом r_1 , в котором в плоскости $z=0$, в радиусе $r_3 \leq r \leq r_2$ действует источник постоянной мощности Q . Коэффициент теплоотдачи через основание α , а через боковую поверхность α_1 .

$$\frac{\partial^2 T}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial T}{\partial R} + \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} = 0; \quad (40)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial Z} \right|_{Z=0} = \begin{cases} 0 & 0 \leq R < R_3 \\ -\frac{Q}{\pi h \lambda (R_2^2 - R_3^2)} & R_3 \leq R \leq R_2; \\ 0 & R_2 < R \leq R_1 \end{cases} \quad (41)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial Z} \right|_{Z=1} = -Bi_i T|_{Z=1}; \quad (42)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial R} \right|_{R=R_1} = -Bi_1 T|_{R=R_1}, \quad (43)$$

где

$$R = \frac{r}{h}, \quad Z = \frac{z}{h}, \quad Bi = \frac{\alpha h}{\lambda}, \quad Bi_1 = \frac{\alpha_1 h}{\lambda}, \\ R_1 = \frac{r_1}{h}, \quad R_2 = \frac{r_2}{h}, \quad R_3 = \frac{r_3}{h}, \quad T = t - t_0.$$

Решение уравнения (40) находим методом разделения переменных

$$T = \sum_k [A_k \exp \mu_k Z + B_k \exp(-\mu_k Z)] I_0(\mu_k R), \quad (44)$$

где μ_k определяются из условия (43).

Подставив (44) в (43), получим выражение для определения μ_k

$$\mu_k I'_0(\mu_k R_1) + Bi_1 I_0(\mu_k R_1) = 0. \quad (45)$$

Коэффициенты A_k и B_k определяются из условий (41) и (42)

$$A_k = \frac{Q[R_2 I_1(\mu_k R_2) - R_3 I_1(\mu_k R_3)]}{\pi h \lambda R_1^2 (R_2^2 - R_3^2) \mu_k^2} \times \frac{(\mu_k - Bi) \exp(-\mu_k)}{\{[I'_0(\mu_k R_1)]^2 + [I_0(\mu_k R_1)]^2\}(\mu_k \operatorname{sh} \mu_k + Bi \operatorname{ch} \mu_k)}; \quad (46)$$

$$B_k = \frac{Q[R_2 I_1(\mu_k R_2) - R_3 I_1(\mu_k R_3)]}{\pi h \lambda R_1^2 (R_2^2 - R_3^2) \mu_k^2} \times \frac{(\mu_k + Bi) \exp(\mu_k)}{\{[I'_0(\mu_k R_1)]^2 + [I_0(\mu_k R_1)]^2\}(\mu_k \operatorname{sh} \mu_k + Bi \operatorname{ch} \mu_k)}. \quad (47)$$

Подставим A_k и B_k в (44), получим выражение для стационарного температурного поля цилиндра при кольцевом источнике тепла

$$T = \frac{2Q}{\pi h \lambda R_1^2 (R_2^2 - R_3^2)} \sum_k \left\{ \frac{R_2 I_1(\mu_k R_2) [\mu_k \operatorname{ch} \mu_k (1-Z) + Bi \operatorname{sh} \mu_k (1-Z)]}{(Bi_1^2 + \mu_k^2) [I_0(\mu_k R_1)]^2 (\mu_k \operatorname{ch} \mu_k + Bi \operatorname{sh} \mu_k)} I_0(\mu_k R) - \right. \\ \left. - \sum_k \frac{R_3 I_1(\mu_k R_3) [\mu_k \operatorname{ch} \mu_k (1-Z) + Bi \operatorname{sh} \mu_k (1-Z)]}{(Bi_1^2 + \mu_k^2) [I_0(\mu_k R_1)]^2 (\mu_k \operatorname{ch} \mu_k + Bi \operatorname{sh} \mu_k)} I_0(\mu_k R) \right\}. \quad (48)$$

Стянем кольцо в линию, т.е. $R_2 \rightarrow R_3$. В этом случае получим следующее распределение температуры:

$$T = \frac{Q}{\pi h \lambda R_1^2} \sum_k \left\{ \frac{\mu_k I_0(\mu_k R_3) [\mu_k \operatorname{ch} \mu_k (1-Z) + Bi \operatorname{sh} \mu_k (1-Z)]}{(Bi_1^2 + \mu_k^2) [I_0(\mu_k R_1)]^2 (\mu_k \operatorname{sh} \mu_k + Bi \operatorname{sh} \mu_k)} I_0(\mu_k R) \right\}. \quad (49)$$

Задача 5

Определить нестационарное температурное поле в цилиндре высотой h радиусом r_1 , в центре которого действует источник тепла мощностью Q , имеющий радиус r_0 . Через основание и боковую поверхность цилиндра осуществляется теплообмен с окружающей средой. Коэффициент теплоотдачи через основание α , через боковую поверхность цилиндра α_l .

$$\frac{\partial T}{\partial F_0} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial T}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} = 0; \quad (50)$$

$$T|_{F_0=0} = 0; \quad (51)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial Z} \right|_{Z=0} = \begin{cases} -\frac{Q}{\pi R_0^2 h \lambda} & 0 \leq R \leq R_0; \\ 0 & R_0 < R < R_1; \end{cases} \quad (52)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial Z} \right|_{Z=1} = -BiT|_{Z=1}; \quad (53)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial R} \right|_{R=R_1} = -Bi_1 T|_{R=R_1} \quad (54)$$

где

$$R = \frac{r}{h}, \quad Z = \frac{z}{h}, \quad R_0 = \frac{r_0}{h}, \quad R_1 = \frac{r_1}{h}, \\ Bi = \frac{\alpha h}{\lambda}, \quad Bi_1 = \frac{\alpha_1 h}{\lambda}, \quad F_0 = \frac{\alpha \tau}{h^2}, \quad T = t - t_0;$$

λ - коэффициент теплопроводности материала цилиндра; α - коэффициент температуропроводности; t_0 - температура окружающей среды.

Решение проведем в два этапа: сначала решим стационарную задачу, затем, используя стационарное решение, найдем выражение для нестационарного поля. Стационарное распределение температуры описывается уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial^2 T}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial T}{\partial R} + \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} = 0; \quad (55)$$

со следующими граничными условиями

$$\left. \frac{\partial T}{\partial Z} \right|_{Z=0} = \begin{cases} -\frac{Q}{\pi R_0^2 h \lambda} & 0 \leq R \leq R_0; \\ 0 & R_0 < R < R_1; \end{cases} \quad (56)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial Z} \right|_{Z=1} = -BiT|_{Z=1}; \quad (57)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial R} \right|_{R=R_1} = -Bi_1 T|_{R=R_1} \quad (58)$$

Применяя интегральное преобразование Ханкеля с конечными пределами по R к уравнению (55) и граничным условиям (56)-(58), получим:

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial Z^2} - \mu_k^2 \bar{T} = 0; \quad (59)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial Z} \right|_{Z=0} = -\frac{Q}{\pi R_0 h \lambda \mu_k} I_1(\mu_k R_0); \quad (60)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial Z} \right|_{Z=1} = -Bi \bar{T}|_{Z=1}; \quad (61)$$

$$Bi_1 I_0(\mu_k R_1) + \mu_k I'_0(\mu_k R_1) = 0; \quad (62)$$

Решением уравнения (59) будет следующая функция:

$$\bar{T}(\mu_k, Z) = A_k \exp \mu_k Z + B_k \exp(-\mu_k Z). \quad (63)$$

Постоянные A_k и B_k находим из условий (60), (61)

$$\left. \begin{aligned} A_k &= \frac{Q}{2\pi R_0 h \lambda \mu_k^2} I_1(\mu_k R_0) (Bi + \mu_k) \left[\frac{\exp \mu_k}{\mu_k \operatorname{sh} \mu_k + Bi \operatorname{ch} \mu_k} - \frac{2}{Bi + \mu_k} \right] \\ B_k &= \frac{Q}{2\pi R_0 h \lambda \mu_k^2} I_1(\mu_k R_0) \frac{(\mu_k + Bi) \exp \mu_k}{\mu_k \operatorname{sh} \mu_k + Bi \operatorname{ch} \mu_k} \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

Итак,

$$\bar{T} = \frac{Q}{2\pi R_0 h \lambda \mu_k^2} I_1(\mu_k R_0) (Bi + \mu_k) \left[\frac{\exp \mu_k \operatorname{ch} \mu_k Z}{\mu_k \operatorname{sh} \mu_k + Bi \operatorname{ch} \mu_k} - \frac{\exp \mu_k Z}{Bi + \mu_k} \right]. \quad (65)$$

Применяя теорему обращения для преобразования Ханкеля с конечными пределами, получим формулу для определения стационарного температурного поля

$$T = \frac{2Q}{\pi R_1^2 R_0 h \lambda} \left\{ \sum_k \frac{I_1(\mu_k R_0)(Bi + \mu_k) \exp \mu_k I_0(\mu_k R) \operatorname{ch} \mu_k Z}{(Bi_1^2 + \mu_k^2)[I_0(\mu_k R_1)]^2 (\mu_k \operatorname{sh} \mu_k + Bi \operatorname{ch} \mu_k)} - \sum \frac{I_1(\mu_k R_0) I_0(\mu_k R) \exp \mu_k Z}{(Bi_1^2 + \mu_k^2)[I_0(\mu_k R_1)]^2} \right\}, \quad (66)$$

где μ_k определяются из условия (62).

Перейдем к нестационарной задаче.

После преобразования Ханкеля по переменной R уравнение (50) и начальное условие (51) имеют вид:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial F_0} = -\mu_k^2 \bar{T} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial Z^2}; \quad (67)$$

$$\bar{T}|_{F_0=0} = 0. \quad (68)$$

Условия (52)-(54) соответствуют условиям (60)-(62). Решение уравнения (67) будем искать в следующем виде:

$$\bar{T} = \bar{T}_{\text{стац}} + \sum_n \bar{T}_n(\mu_k, F_0) \cos \nu_n Z, \quad (69)$$

где $\bar{T}_{\text{стац}}$ определяется по формуле (65); ν_n - собственные значения, которые определяются из уравнения

$$\operatorname{ctg} \nu_n = \frac{\nu_n}{Bi}. \quad (70)$$

Подставив (69) в (67), получим уравнение для определения $\bar{T}_n(\mu_k, F_0)$

$$\frac{\partial \bar{T}_n}{\partial F_0} + (\mu_k^2 + \nu_n^2) \bar{T}_n = 0. \quad (71)$$

Общее решение уравнения (71) имеет вид:

$$\bar{T}_n(\mu_k, F_0) = A_n \exp[-(\mu_k^2 + \nu_n^2) F_0], \quad (72)$$

где A_n определяются из условия (68),

$$A_n = -\frac{2Q Bi I_1(\mu_k R_0)}{\pi R_0 h \lambda \mu_k (\mu_k^2 + \nu_n^2) (Bi + \sin^2 \nu_n)}. \quad (73)$$

Тогда соотношение (69) можно записать:

$$\bar{T} = \bar{T}_{\text{стац}} - \frac{2Q Bi I_1(\mu_k R_0)}{\pi R_0 h \lambda \mu_k} \sum_n \frac{\exp[-(\mu_k^2 + \nu_n^2) F_0] \cos \nu_n Z}{(Bi + \sin^2 \nu_n) (\mu_k^2 + \nu_n^2)}. \quad (74)$$

Применив теорему обращения для преобразования Ханкеля с конечными пределами, получим формулу для определения нестационарного температурного поля

$$T = \frac{2Q}{\pi R_1^2 R_0 h \lambda} \sum \frac{I_0(\mu_k R) I_1(\mu_k R_0)}{(Bi_1^2 + \mu_k^2)[I_0(\mu_k R_1)]^2} \times \left\{ \left[\frac{(Bi + \mu_k) \exp \mu_k \operatorname{ch} \mu_k Z}{\mu_k \operatorname{sh} \mu_k + Bi \operatorname{ch} \mu_k} - \exp \mu_k Z \right] - \right. \\ \left. - 2Bi \mu_k \sum \frac{\exp[-(\mu_k^2 + \nu_n^2) F_0]}{(Bi + \sin^2 \nu_n) (\mu_k^2 + \nu_n^2)} \cos \nu_n Z \right\}. \quad (75)$$

Задача 6

Определить температурное поле в цилиндре конечных размеров (радиуса r и высотой h), на торце которого действует поверхностный источник тепла $Q(r)$ по кольцевой площадке, заключенной между кругами с радиусами r_2 и r_3 ($r_3 \leq r \leq r_2$) в условиях, когда осуществляется теплообмен с окружающей средой со стороны боковой поверхности с коэффициентом теплоотдачи α , а с торцевой поверхности – с коэффициентом теплоотдачи α_1 .

Поставленная задача сводится к решению уравнения нестационарной теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial F_0} = \frac{\partial^2 T}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial T}{\partial R} + \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} = 0; \quad (76)$$

при следующих условиях:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial Z} \right|_{Z=0} = \begin{cases} 0 & 0 \leq R < R_3 \\ -\frac{Q}{\pi h \lambda (R_2^2 - R_3^2)} & R_3 \leq R \leq R_2, \\ 0 & R_2 < R \leq R_1 \end{cases} \quad (77)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial Z} \right|_{Z=1} = -BiT|_{Z=1}; \quad (78)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial R} \right|_{R=R_1} = -BiT|_{R=R_1} \quad (79)$$

$$T|_{F_0=0} = 0. \quad (80)$$

где $R = \frac{r}{h}$, $Z = \frac{z}{h}$, $F_0 = \frac{\alpha \tau}{h^2}$, $h_1 = \frac{r_1}{h}$, $R_2 = \frac{r_2}{h}$, $R_3 = \frac{r_3}{h}$, $Bi = \frac{\alpha h}{\lambda}$, $Bi_1 = \frac{\alpha_1 h}{\lambda}$, $T = t - t_0$ - безразмерные координаты; λ - коэффициент теплопроводности материала; α - коэффициент температуропроводности; t_0 - температура окружающей среды; α, α_1 - коэффициенты теплоотдачи через основание цилиндра и боковую поверхность соответственно. Применив к (76) – (80) конечное преобразование Ханкеля по R ,

$$\bar{T} = \int_0^{R_1} T R I_0(\mu_k R) dR, \quad (81)$$

получим

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial F_0} = -\mu_k^2 \bar{T} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial Z^2}, \quad (82)$$

где

$$\mu_k I_0'(\mu_k R_1) + Bi_1 I_0(\mu_k R_1) = 0; \quad (83)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial Z} \right|_{Z=0} = -\frac{1}{\pi h \lambda (R_2^2 - R_3^2)} \int_{R_3}^{R_2} Q(R) R I_0(\mu_k R) dR; \quad (84)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial Z} \right|_{Z=1} = -Bi \bar{T}|_{Z=1}; \quad (85)$$

$$\bar{T}|_{F_0=0} = 0. \quad (86)$$

Решение уравнения (82) ищем в виде суммы двух решений

$$\bar{T}(F_0, \mu_k, Z) = \bar{T}_1(\mu_k, Z) + \bar{T}_2(F_0, \mu_k, Z). \quad (87)$$

где $\bar{T}_1(\mu_k, Z)$ характеризует стационарный, $\bar{T}_2(F_0, \mu_k, Z)$ - нестационарный режим. Стационарное распределение температуры удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \bar{T}_1}{\partial Z^2} - \mu_k^2 \bar{T}_1 = 0 \quad (88)$$

и условиям (84), (85).

Решением уравнения (88) будет

$$\bar{T}_1 = A_k \exp \mu_k Z + B_k \exp(-\mu_k Z). \quad (89)$$

Коэффициенты A_k и B_k определяются из условий (84) и (85):

$$A_k = \frac{(\mu_k - Bi) \exp(-\mu_k) \int_{R_3}^{R_2} Q(R) RI_0(\mu_k R) dR}{2\pi(R_2^2 - R_3^2) h \lambda \mu_k (\mu_k \operatorname{sh} \mu_k + Bi \operatorname{ch} \mu_k)}, \quad (90)$$

$$B_k = \frac{(\mu_k + Bi) \exp \mu_k \int_{R_3}^{R_2} Q(R) RI_0(\mu_k R) dR}{2\pi(R_2^2 - R_3^2) h \lambda \mu_k (\mu_k \operatorname{sh} \mu_k + Bi \operatorname{ch} \mu_k)}. \quad (91)$$

Подставляя A_k и B_k в (89), получаем

$$\bar{T}_1(\mu_k, Z) = \frac{[\mu_k \operatorname{ch} \mu_k (1 - Z) + Bi \operatorname{sh} \mu_k (1 - Z)] \int_{R_3}^{R_2} Q(R) RI_0(\mu_k R) dR}{\pi(R_2^2 - R_3^2) h \lambda \mu_k (\mu_k \operatorname{sh} \mu_k + Bi \operatorname{ch} \mu_k)}. \quad (92)$$

Применив теорему обращения для преобразования Ханкеля с конечными пределами, получим выражение для определения стационарного температурного поля

$$T_1(R, Z) = \frac{2}{R_1^2 \pi h \lambda (R_2^2 - R_3^2)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k I_0(\mu_k R) [\mu_k \operatorname{ch} \mu_k (1 - Z) - Bi \operatorname{sh} \mu_k (1 - Z)]}{(B_{i1}^2 + \mu_k^2) [I_0(\mu_k R_1)]^2 (\mu_k \operatorname{sh} \mu_k + Bi \operatorname{ch} \mu_k)} \times \\ \times \int_{R_3}^{R_2} Q(R) RI_0(\mu_k R) dR. \quad (93)$$

Решение уравнения (82) получаем в виде суммы двух решений, используя метод разделения переменных:

$$\bar{T} = \bar{T}_1(\mu_k, Z) + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{T}_n(\mu_k, F_0) \varphi_n(Z). \quad (94)$$

Подставляя (94) в (82) и используя условие (84), получаем

$$\bar{T} = \bar{T}_1(\mu_k, Z) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp[-(\mu_k^2 - \nu_n^2) F_0] \cos \nu_n Z, \quad (95)$$

где ν_n - собственные значения, которые определяются из условия (85)

$$\operatorname{ctg} \nu_n = \frac{\nu_n}{Bi} \quad (96)$$

Коэффициенты A_n определяются из начального условия (86)

$$\bar{T}_1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \nu_n Z = 0. \quad (97)$$

Умножив выражение (97) на $\cos \nu_n Z$ и проинтегрировав по Z от 0 до 1, получим выражение для A_n

$$A_n = - \frac{R Bi \int_{R_3}^{R_2} Q(R) RI_0(\mu_k R) dR}{\pi h \lambda (R_2^2 - R_3^2) (\mu_k^2 + \nu_n^2) (Bi + \sin^2 \nu_n)}. \quad (98)$$

Подставив A_n в выражение (95) и применив теорему обращения, получим нестационарное распределение температуры

$$T = \frac{2}{\pi h \lambda R_1^2 (R_2^2 - R_3^2)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k \int_{R_3}^{R_2} Q(R) RI_0(\mu_k R) dR}{(B_{i1}^2 + \mu_k^2) [I_0(\mu_k R_1)]^2} I_0(\mu_k R) \times \\ \times \left\{ \frac{\mu_k \operatorname{ch} \mu_k (1 - Z) + Bi \operatorname{sh} \mu_k (1 - Z)}{Bi \operatorname{ch} \mu_k + \mu_k \operatorname{sh} \mu_k} - 2 Bi \mu_k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp[-(\mu_k^2 - \nu_n^2) F_0] \cos \nu_n Z}{(\mu_k^2 + \nu_n^2) (Bi + \sin^2 \nu_n)} \right\}. \quad (99)$$

Из данного выражения можно получить решения для различных законов распределения мощности источников по радиусу. Рассмотрим сначала группу задач с постоянным тепловым источником, т.е. $Q = \text{const}$.

1. Тепло выделяется в кольце радиусом $R_3 \leq R \leq R_2$. Тогда, вычислив интеграл в формуле (99), получим

$$T = \frac{2Q}{R_1^2 \pi h \lambda (R_2^2 - R_3^2)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[R_2 I_1(\mu_k R_2) - R_3 I_1(\mu_k R_3)]}{(B_{i1}^2 + \mu_k^2) [I_0(\mu_k R_1)]^2} I_0(\mu_k R) \times \\ \times \left\{ \frac{\mu_k ch \mu_k (1-Z) + Bish \mu_k (1-Z)}{\mu_k sh \mu_k + Bich \mu_k} - 2Bi \mu_k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp[-(\mu_k^2 - \nu_n^2) F_0] \cos \nu_n Z}{(\mu_k^2 + \nu_n^2) (Bi + \sin^2 \nu_n)} \right\}. \quad (100)$$

2. Тепло выделяется по линии R_2 , лежащей внутри площадки радиусом R_1 . Стягиваем кольцо в линию, т.е. $R_3 \rightarrow R_2$ в формуле (100), и получаем

$$T = \frac{Q}{R_1^2 \pi h \lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k I_0(\mu_k R_2) I_0(\mu_k R)}{(B_{i1}^2 + \mu_k^2) [I_0(\mu_k R_1)]^2} \times \\ \times \left\{ \frac{\mu_k ch \mu_k (1-Z) + Bish \mu_k (1-Z)}{\mu_k sh \mu_k + Bich \mu_k} - 2Bi \mu_k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp[-(\mu_k^2 - \nu_n^2) F_0] \cos \nu_n Z}{(\mu_k^2 + \nu_n^2) (Bi + \sin^2 \nu_n)} \right\}. \quad (101)$$

3. Тепло выделяется по круговой площадке радиусом R_2 . Устремляя в формуле (100) $R_3 \rightarrow 0$, получаем

$$T = \frac{2Q}{R_1^2 R_2^2 \pi h \lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_1(\mu_k R_2) I_0(\mu_k R)}{(B_{i1}^2 + \mu_k^2) [I_0(\mu_k R_1)]^2} \times \\ \times \left\{ \frac{\mu_k ch \mu_k (1-Z) + Bish \mu_k (1-Z)}{\mu_k sh \mu_k + Bich \mu_k} - 2Bi \mu_k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp[-(\mu_k^2 - \nu_n^2) F_0] \cos \nu_n Z}{(\mu_k^2 + \nu_n^2) (Bi + \sin^2 \nu_n)} \right\}. \quad (102)$$

4. Тепло выделяется по всей площадке радиусом R_1 . Тогда, устремляя в формуле (100) $R_2 \rightarrow R_1, R_3 \rightarrow 0$, получаем

$$T = \frac{2Q}{R_1^2 \pi h \lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_1(\mu_k R_1) I_0(\mu_k R)}{(B_{i1}^2 + \mu_k^2) [I_0(\mu_k R_1)]^2} \times \\ \times \left\{ \frac{\mu_k ch \mu_k (1-Z) + Bish \mu_k (1-Z)}{\mu_k sh \mu_k + Bich \mu_k} - 2Bi \mu_k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp[-(\mu_k^2 - \nu_n^2) F_0] \cos \nu_n Z}{(\mu_k^2 + \nu_n^2) (Bi + \sin^2 \nu_n)} \right\}. \quad (103)$$

5. Тепло выделяется в точке $R=0$ (точечный источник тепла). Устремляя в формуле (100) $R_2 \rightarrow R_3 \rightarrow 0$, получаем

$$T = \frac{2Q}{R_1^2 \pi h \lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k I_0(\mu_k R)}{(B_{i1}^2 + \mu_k^2) [I_0(\mu_k R_1)]^2} \times \\ \times \left\{ \frac{\mu_k ch \mu_k (1-Z) + Bish \mu_k (1-Z)}{\mu_k sh \mu_k + Bich \mu_k} - 2Bi \mu_k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp[-(\mu_k^2 - \nu_n^2) F_0] \cos \nu_n Z}{(\mu_k^2 + \nu_n^2) (Bi + \sin^2 \nu_n)} \right\}. \quad (104)$$

Рассмотрим другую группу задач, когда тепловой поток является функцией радиуса, например, сила $Q = Q_0 \left(1 - \frac{R}{R_2}\right)$.

1. Тепло выделяется в кольце $R_3 \leq R \leq R_2$. Вычислив интеграл в формуле (99), получим

$$T = \frac{Q_0}{\pi h \lambda R_1^2 R_2 (R_2^2 - R_3^2)} \sum_{k=1}^{\infty} I_0(\mu_k R) \left\{ \frac{R_2 I_1(\mu_k R_2) H_0(\mu_k R_2) - R_3 I_1(\mu_k R_3) H_0(\mu_k R_3)}{(B_{i1}^2 + \mu_k^2) [I_0(\mu_k R_1)]^2} - \right. \\ \left. - \frac{R_2 I_1(\mu_k R_2) H_1(\mu_k R_2) - R_3 I_0(\mu_k R_3) H_1(\mu_k R_3) + \frac{2R_3 \mu_k}{\pi} (R_2 - R_3) I_1(\mu_k R_3)}{(B_{i1}^2 + \mu_k^2) [I_0(\mu_k R_1)]^2} \right\} \times \\ \times \left\{ \frac{\mu_k ch \mu_k (1-Z) + Bish \mu_k (1-Z)}{\mu_k (\mu_k sh \mu_k + Bich \mu_k)} - 2Bi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp[-(\mu_k^2 - \nu_n^2) F_0] \cos \nu_n Z}{(\mu_k^2 + \nu_n^2) (Bi + \sin^2 \nu_n)} \right\}, \quad (105)$$

где $H_0(\mu_k R), H_1(\mu_k R)$ - функции Струве.

2. Тепло выделяется по площадке радиусом R_2 , лежащей внутри площадки радиусом R_1 . Устремляя в формуле (105) $R_3 \rightarrow 0$, получаем

$$T = \frac{Q_0}{\pi h \lambda R_1^2 R_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_1(\mu_k R_2) H_0(\mu_k R_2) - H_1(\mu_k R_2) I_0(\mu_k R_2)}{(B_{i1}^2 + \mu_k^2) [I_0(\mu_k R_1)]^2} I_0(\mu_k R) \times \\ \times \left\{ \frac{\mu_k ch \mu_k (1-Z) + Bish \mu_k (1-Z)}{\mu_k (\mu_k sh \mu_k + Bich \mu_k)} - 2Bi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp[-(\mu_k^2 - \nu_n^2) F_0] \cos \nu_n Z}{(\mu_k^2 + \nu_n^2) (Bi + \sin^2 \nu_n)} \right\}. \quad (106)$$

Тепловой поток является квадратичной функцией от радиуса, например, вида $Q = Q_0 \left(1 - \frac{R^2}{R_2^2}\right)$.

1. Тепло выделяется в кольце $R_3 \leq R \leq R_2$. Вычислив интеграл в формуле (99), получим

$$T = \frac{2Q_0}{\pi h \lambda R_1^2 (R_2^2 - R_3^2)} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{2I_2(\mu_k R_2) + \frac{2R_3^2}{R_2^2} I_0(\mu_k R_3)}{(B_{i1}^2 + \mu_k^2) [I_0(\mu_k R_1)]^2} + \frac{\mu_k R_3 I_1(\mu_k R_3) \left[\frac{R_3^2}{R_2^2} - \frac{4}{\mu_k^2 R_2^2} - 1 \right]}{(B_{i1}^2 + \mu_k^2) [I_0(\mu_k R_1)]^2} \right\} I_0(\mu_k R) \times \\ \times \left\{ \frac{\mu_k ch \mu_k (1-Z) + Bish \mu_k (1-Z)}{\mu_k (\mu_k sh \mu_k + Bich \mu_k)} - 2Bi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp[-(\mu_k^2 - \nu_n^2) F_0] \cos \nu_n Z}{(\mu_k^2 + \nu_n^2) (Bi + \sin^2 \nu_n)} \right\}. \quad (107)$$

2. Тепло выделяется по площадке радиусом R_2 , лежащей внутри площадки радиусом R_1 . Устремляя в формуле (107) $R_3 \rightarrow 0$, получим

$$T = \frac{4Q_0}{\pi h \lambda R_1^2 R_2^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_2(\mu_k R_2) I_0(\mu_k R)}{(B_{i1}^2 + \mu_k^2) [I_0(\mu_k R_1)]^2} \times \\ \times \left\{ \frac{\mu_k ch \mu_k (1-Z) + Bish \mu_k (1-Z)}{\mu_k (\mu_k sh \mu_k + Bich \mu_k)} - 2Bi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp[-(\mu_k^2 - \nu_n^2) F_0] \cos \nu_n Z}{(\mu_k^2 + \nu_n^2) (Bi + \sin^2 \nu_n)} \right\}. \quad (108)$$

Таким образом, из решения (99) сформулированной в общем виде тепловой задачи путем соответствующих вычислений интегралов оказалось возможным получить нестационарное распределение температуры для ряда частных случаев, которые могут встречаться в зависимости от конструкции сопрягаемых контактных (электродных) пар и режимов их работы. Это пример оправданного усложнения задачи в самой ее постановке.

Навчальне видання

НАМІТОВ Кемаль Кадирович

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

З ТЕХНІЧНОЇ ФІЗИКИ

(ТОМ I. МЕХАНІКА, МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА, ТЕРМОДИНАМІКА)

(для вищих технічних навчальних закладів)

(Рос. мовою)

За авторською редакцією

Відповідальний за випуск *Л. А. Назаренко*

Комп'ютерне верстання *Т. Ю. Четверякова*

Дизайн обкладинки *Т. Є. Ключко*

План 2014, поз. 210Л

Підп. до друку 06.08.2014 р.
Друк на ризографі
Тираж 50 пр.

Формат 60×84/16
Ум. друк. арк. 16
Зам. №

Видавець і виготовлювач:

Харківський національний університет міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Революції, 12, Харків, 61002

Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:

ДК № 4705 від 28.03.2014 р.